# طرق التنبؤ الإحصائي

## بواسطة R

( الجزء الأول )
الطبعة الثانية

تأليف د. عدنان ماجد عبدالرحمن بري
أستاذ الإحصاء وبحوث العمليات المشارك (سابقا)

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا ونبينا محمد وعلى آله وصحبه وسلم.
أما بعد.
هذه هي الطبعة الثانية لكتاب طرق التنبؤ الإحصائي لطلاب مرحلة البكالوريوس.
هذا الكتاب سوف أقوم بتطويره وتجديده وتحسينه بشكل مستمر وسيظل بشكله الإلكتروني هذا لأني أعتقد ان العلوم والتقنية تتطور يوميا وبشكل متسارع بحيث ان وضعها في كتاب جامد ستاتيكي لايتناسب مع ديناميكية الموضوع وخاصة في عصر ثورة المعلومات والإنترنت.
يغطي الجزء الأول من الكتاب الأساسيات الأولية للموضوع ويتطرق إلى موضوع التنبؤ الإحصائي بإستخدام نماذج ARIMA والتي كانت اول معالجة رياضية جادة ومحكمة للتنبؤ الإحصائي بإستخدام المتسلسلات الزمنية Time Series كما تطرقت في آخر الكتاب إلى بعض الطرق التقليدية الهورستيكية للتنبؤ الإحصائي وفي جميع أجزاء الكتاب قمت بتوضيح الأمثلة والحالات الدراسية بإستخدام الحزمة الإحصائية R وهي برامج حاسب طورت لعلم الإحصاء بجميع فروعه وهذه الحزمة متوفرة بالمجان.
الجزء الثاني من الكتاب وموجه لطلاب الدراسات العليا سوف يتطرق بإذن الله لمواضيع مثل تحليل التدخل Intervention Analysis ونماذج دالة التحويل Transfer Function Models ونماذج المتسلسلات الزمنية المتعددة Multivariate Time Series Models ونماذج المتسلسلات الزمنية الموجهه Vector Time Series Models ونماذج فضاء الحالة ومرشح كالمن State Space Models and Kalman Filtering ونماذج الحد Threshold Time Series Models ونماذج ARCH ونماذج GARCH وتطبيقاتها في التنبؤ المالي Finantial Time Series Forecasting كما سنتطرق إلى الشبكات العصبية Neural Networks وإستخدامها في التنبؤ الإحصائي.
هذا وارجوا من الله ان يوفقني في إنجاز هذا العمل لوجهه الكريم ولإثراء المكتبة العربية الفقيرة إلى مثل هذا الكتاب.

سيكون هذا الكتاب مجاني لأي طالب علم وهو سيكون متواجد على شبكة الإنترنت في الموقع http://www.abarry.ws/statisticalForecast1.pdf
والله الموفق.

المؤلف
د. عدنان ماجد عبد الرحمن بري

يناير 2018 م

# المحتويات

مقدمة

1- الفصل الأول: مقدمة وتعاريف.....10

1-1 أمثلة على المتسلسلات الزمنية ..... 10

2-1 الغرض من دراسة وتحليل المتسلسلات الزمنية ..... 10

3-1 الخطوات المتخذة لبناء نموذج تنبؤ ..... 11

1-3-1 تعيين النموذج ..... 11

2-3-1 تطبيق النموذج ..... 11

3-3-1 تشخيص وإختبار النموذج ..... 11

4-3-1 توليد التنبؤات ..... 11

5-3-1 إستخدام التنبؤات ووضع القرارات ..... 11

4-1 تعاريف ومبادئ أولية ..... 12

1-4-1 تعريف ماضي أو تاريخ الظاهرة ..... 12

2-4-1 تعريف الحاضر أو الآن ..... 12

3-4-1 تعريف أخطاء التطبيق ..... 12

4-4-1 تعريف أخطاء التنبؤ ..... 13

5-4-1 تعريف الإستقرار ..... 13

6-4-1 تعريف الضجة البيضاء ..... 13

7-4-1 مثال 1 : المشي العشوائي ..... 14

8-4-1 تعريف دالة التغاير الذاتي ..... 14

9-4-1 تعريف دالة الترابط الذاتي ..... 15

10-4-1 مثال 2 : دالة الترابط الذاتي للضجة البيضاء ..... 15

11-4-1 تعريف دالة الترابط الذاتي الجزئي ..... 16

12-4-1 مثال 3: دالة الترابط الذاتي الجزئي للضجة البيضاء ..... 16

13-4-1 تعريف دالة الترابط الذاتي للعينة ..... 17

14-4-1 تعريف دالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة ..... 17

15-4-1 مثال 4: دالة الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للعينة ..... 18

2- الفصل الثاني: نماذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك ARMA
3- وإستخداماتها في التنبؤ..... 25
1-2 تعريف نماذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك من الدرجة (p,q) ..... 25
2-2 تعريف عامل الإزاحة الخلفي .....25
3-2 تعريف عامل الإزاحة الأمامي ..... 26
4-2 تعريف عامل التفريق ..... 26
5-2 تعريف عامل التجميع ..... 26
6-2 أمثلة ..... 26
7-2 خصائص نماذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك ..... 28
1-7-2 نموذج ARMA(0,0) ..... 28
2-7-2 نموذج AR(1) ..... 32
3-7-2 نموذج AR(2) ..... 37
4-7-2 نموذج MA(1) ..... 43
5-7-2 نموذج MA(2) ..... 47
6-7-2 نموذج ARMA(1,1) ..... 51
7-7-2 خواص نماذج ARMA(p,q) ..... 56
3- الفصل الثالث: نماذج المتسلسلات الزمنية غير المستقرة ..... 58
1-3 عدم الإستقرار في المتوسط ..... 58
2-3 عدم الإستقرار في التباين ..... 59
3-3 نماذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة (p,d,q) ..... 62
1-3-3 نموذج ARIMA(1,1,0) ..... 62
2-3-3 نموذج ARIMA(0,1,1) ..... 62
3-3-3 نموذج المشي العشوائي بإنجراف ..... 63
4-3 دالة الأوزان $\psi(B)$ وتمثيل نماذج ARMA(p,q) ..... 63
5-3 امثلة لدالة الأوزان لبعض النماذج ..... 64
1-5-3 دالة الأوزان لنموذج AR(1) ..... 64
2-5-3 دالة الأوزان لنموذج MA(1) ..... 65

3-5-3 دالة الأوزان لنموذج AR(2) ..... 66
3-5-4 دالة الأوزان لنموذج MA(2) ..... 66
3-5-5 دالة الأوزان لنموذج ARMA(1,1) ..... 67
3-5-6 دالة الأوزان لنموذج ARI(1) ..... 68
3-5-7 دالة الأوزان لنموذج المشي العشوائي ARIMA(1,0,1) ..... 68
3-6 بعض خواص دالة الأوزان $\psi(B)$ ..... 69
4- الفصل الرابع: التنبؤات ذات متوسط مربع الخطأ الأدنى لنماذج ARMA(p,q) ..... 71
4-1 نظرية 2: أخطاء التنبؤ ..... 72
4-2 مجموعة المعلومات Information Sets ..... 72
4-3 نظرية 3: المتنبئ ذا متوسط مربع الخطأ الأدنى ..... 72
4-4 قاعدة 2 ..... 73
4-5 تعريف دالة التنبؤ ..... 73
4-6 دوال التنبؤ لنماذج ARIMA(p,d,q) ..... 73
4-6-1 دالة التنبؤ لنموذج AR(1) ..... 73
4-6-2 شرط الإستمرار ..... 74
4-6-3 دالة التنبؤ لنموذج AR(2) ..... 75
4-6-4 دالة التنبؤ لنموذج ARIMA(0,1,1) ..... 76
4-6-5 دالة التنبؤ لنموذج MA(1) ..... 77
4-6-6 دالة التنبؤ لنموذج MA(2) ..... 78
4-6-7 دالة التنبؤ لنموذج ARMA(1,1) ..... 79
4-7 حدود التنبؤ ..... 80
4-7-1 تعريف فترة تنبؤ للقيمة المستقبلية ..... 80
4-7-2 مثال ..... 81
5- الفصل الخامس: تصميم وبناء نظام تنبؤ إحصائي ..... 82
5-1 تعيين أو تحديد النموذج ..... 82
5-1-1 تثبيت التباين ..... 82
5-1-2 إختيار درجة التفريق d ..... 82
5-1-3 تحديد p,q ..... 83
5-1-4 إضافة معلم إنجراف ..... 83

2-5 تقدير النموذج ..... 85
1-2-5 طريقة العزوم ..... 85
2-2-5 تقدير العزوم لبعض النماذج ..... 86
1-2-2-5 لنموذج AR(1) ..... 86
2-2-2-5 لنموذج MA(1) ..... 87
3-2-2-5 لنموذج AR(2) ..... 87
4-2-2-5 لنموذج MA(2) ..... 88
5-2-2-5 لنموذج ARMA(1,1) ..... 88
3-2-5 طريقة المربعات الدنيا الشرطية ..... 89
4-2-5 تقديرات المربعات الدنيا الشرطية لبعض النماذج ..... 90
1-4-2-5 لنماذج AR(1)..... 90
2-4-2-5 لنماذج MA(1) ..... 91
3-5 تشخيص وإختبار النموذج..... 94
1-3-5 فحص البواقي ..... 94
1-1-3-5 إختبار المتوسط للبواقي ..... 94
2-1-3-5 إختبار العشوائية للبواقي ..... 95
3-1-3-5 إختبار الترابط أو الإستقلال للبواقي ..... 95
4-1-3-5 إختبار طبيعية البواقي ..... 95
2-3-5 بعض المعايير الاخرى لإختيار نموذج مناسب ..... 95
1-2-3-5 إحصائية كيو للجنق وبكس ..... 95
2-2-3-5 معيار الإعلام الذاتي AIC ..... 96
3-3-5 أمثلة وحالات دراسة ..... 96
6- الفصل السادس: نماذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك الموسمية ..... 142
1-6 دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لبعض النماذج الموسمية ..... 143
1-1-6 لنموذج SARMA(0,1)(1,1)12 ..... 144
2-6 دوال الترابط الذاتي لبعض النماذج الموسمية ..... 145
1-2-6 SARIMA(0,d,0)(0,D,1)s .....145
2-2-6 SARIMA(0,d,0)(1,D,1)s ..... 145
3-2-6 SARIMA(0,d,1)(0,D,1)s ..... 145

6-2-4 SARIMA(0,d,0)(1,D,1)s ..... 146
6-2-5 SARIMA(0,d,1)(1,D,0)s ..... 146
6-2-6 SARIMA(0,d,2)(0,D,1)s ..... 146
6-3 دالة الترابط الذاتي الجزئي للنموذج الموسمي التضاعفي ..... 148
6-4 أمثلة على المتسلسلات الزمنية الموسمية ..... 149
6-5 إشتقاق دوال تنبؤ لبعض نماذج المتسلسلات الموسمية التضاعفية ..... 157
6-5-1 دالة التنبؤ للنموذج SARIMA(0,0,0)(0,1,1)12 ..... 158
6-5-2 دالة التنبؤ للنموذج SARIMA(0,1,1)(0,1,1)12 ..... 158
6-6 أمثلة وحالات دراسة للمتسلسلات الزمنية الموسمية ..... 159
الجزء العملي:
7- الفصل السابع: ورقة تدريب عملي على التنبؤ بواسطة نماذج الإنحدار
الذاتي-المتوسط المتحرك ..... 188
8- الفصل الثامن: مثال تحليل البواقي ومعيير إختيار نموذج مناسب ..... 204
9- الفصل التاسع: تحليل أو تفكيك المتسلسلة الزمنية إلى مركبات ..... 212
10- الفصل العاشر: التمهيد والتنبؤ بواسطة المتوسط المتحرك ..... 225
10-1 الوسيط الجاري ..... 242
11- الفصل الحادي عشر: التمهيد والتنبؤ بواسطة التمهيد الأسي البسيط ..... 245.
12- الفصل الثاني عشر: التمهيد والتنبؤ بواسطة التمهيد الأسي المزدوج ..... 250
12-1 طريقة براون ..... 250
12-2 طريقة هولت ..... 251
12-3 أمثلة ..... 251
13- الفصل الثالث عشر: التمهيد الأسي الثلاثي والتنبؤ بواسطة طريقة
ونترز للمتسلسلات الموسمية المنجرفة ..... 257
13-1 النموذج الإضافي ..... 258
13-2 النموذج التضاعفي ..... 260
13-3 مثال لبناء نموذج تنبؤ ..... 263
13-4 مثال آخر لبناء نموذج تنبؤ ..... 270
ملحق (1) أسئلة وإجابات الإختبارات السابقة ..... 278
المراجع ..... 358

## الفصل الأول

# مقدمة وتعاريف

**تعريف 1:**

**المتسلسلة الزمنية Time Series هي متتابعة من القيم المشاهدة لظاهرة عشوائية مرتبة مع الزمن ( او مرتبة على المكان )**

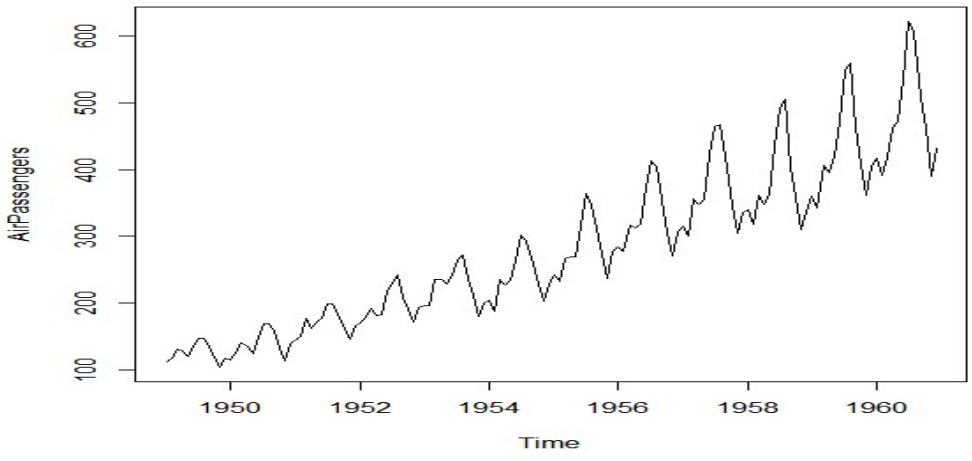
**امثلة على المتسلسلات الزمنية:**

1- سعر اقفال سهم بنك الرياض يوميا.
2- عدد الوحدات المطلوبة اسبوعيا من انتاج سلعة معينة.
3- حجم المبيعات شهريا من سلعة ما.
4- حجم الإنتاج اليومي للنفط الخام بالمملكة.

**والغرض من دراسة وتحليل المتسلسلات الزمنية هو:**

1- فهم ونمذجة عشوائية الظاهرة المشاهدة.
2- التنبؤ عن القيم المستقبلية للظاهرة العشوائية.
3- التحكم بالظاهرة العشوائية إذا امكن ذلك.

الشكل التالي لمتسلسلة زمنية مشاهدة وهي عبارة عن عدد المسافرين جوا من احد المطارات



## الخطوات المتخذة لبناء نموذج تنبؤ:

إن إيجاد نموذج مناسب تنطبق علية متسلسلة زمنية مشاهدة يعتبر من المهام الصعبة والتي تحتاج الى الكثير من البحث والخبرة. سوف نستعرض بعض الخطوات العريضة لبناء نموذج رياضي للتنبؤ عن متسلسلة زمنية ما:

1- **تعيين النموذج أو تحديد النموذج Model Identification**:

وهذا يتم برسم المتسلسلة الزمنية فيما يسمى Time Plot حيث يكون الإحداثي الافقي هو الزمن والرأسي حجم الظاهرة المشاهدة ومن ثم إختيار نموذج رياضي معتمدين علي بعض المقاييس الإحصائية التى تميز نموذج عن آخر وعلى الخبرة المستمدة من الدراسات والابحاث.

2- **تطبيق النموذج Model Fitting**:

بعد ترشيح نموذج او اكثر كنموذج مناسب لوصف المتسلسلة المشاهدة نقوم بتقدير معالم هذا النموذج من البيانات المشاهدة بإستخدام طرق التقدير الإحصائي الخاصة بالمتسلسلات الزمنية وهذا النموذج المرشح يؤخذ كنموذج اولي قابل للتعديل لاحقا.

3- **تشخيص وإختبار النموذج Model Diagnostics:**

إجراء إختبارات تفحصية على أخطاء التطبيق Fitting Errors لمعرفة مدى تطابق المشاهدات مع القيم المحسوبة من النموذج المرشح ومدى صحة فرضيات النموذج. في حالة إجتياز النموذج المرشح لهذه الإختبارات نقوم بإعتمادة على انه النموذج النهائي ويستخدم لتوليد تنبؤات للقيم المستقبلية وإلا نعود للخطوة الاولى لتعيين نموذج جديد.

4- **توليد التنبؤات Forecast Generation:**

يستخدم النموذج النهائي لتوليد تنبؤات عن القيم المستقبلية ومن ثم حساب أخطاء التنبؤ Forecast Errors كلما استجدت قيم جديدة مشاهدة من المتسلسلة الزمنية ومراقبة هذه الأخطاء فى ما يسمى بمخططات المراقبة Control Charts والتي توضع للقبول بنسبة خطأ معين إذا تجاوزتة أخطاء التنبؤ يعاد النظر في النموذج وتعاد الدورة من جديد بتحديد نموذج مرشح آخر.

5- **إستخدام التنبؤات ووضع القرارات Implementation and Decision making:** تقدم التنبؤات فى تقرير لصانعي القرار للنظر في إستخدامها بالشكل المناسب.

## تعاريف ومبادئ اولية:

سوف نرمز للظاهرة العشوائية أو العملية العشوائية التي تولد المتسلسلة الزمنية بالرمز $\{\cdots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\}$ او اختصارا $\{Z_t, t \in \{\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\}\}$ او ببساطة $\{Z_t\}$ وللمتسلسلة الزمنية المشاهدة بالرمز $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$

**تعريف2:**

**القيم $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ تسمى بالماضى او تاريخ الظاهرة History**

والتاريخ مهم جدا في عملية النمذجة

**تعريف 3 :**

**القيمة $z_n$ تسمى الحاضر او الآن**

وهي المشاهدة الأخيرة .

**تعريف 4:**

**أخطاء التطبيق تعطى بالعلاقة $e_t = z_t - \hat{z}_t, \quad t = 1, 2, ..., n$ حيث $\hat{z}_t$ هي القيم المطبقة ( القيم التي نتحصل عليها من النموذج) وتسمي أيضا الرواسب Residuals**

ويلاحظ ان اخطاء التطبيق نحصل عليها دفعة واحدة بعد تقدير النموذج.

**ملاحظة:** سوف نرمز للمشاهدات المستقبلية بالرموز $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, ...$ او بشكل عام $z_{n+\ell}, \ell \geq 0$ ونرمز لتنبؤاتها بالرمز $z_n(1), z_n(2), z_n(3), ...$ او بشكل عام $z_n(\ell), \ell \geq 0$

**تعريف 5:**

**أخطاء التنبؤ تعطى بالعلاقة** $e_n(\ell) = z_{n+\ell} - z_n(\ell), \quad \ell \geq 0$

وأخطاء التنبؤ تنتج الواحدة تلو الاخرى كلما تقدم الزمن وشوهدت القيم الحقيقية

**تعريف 6:**

**يقال ان المتسلسلة الزمنية المشاهدة** $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$ **مستقرة Stationary إذا حققت الشروط التالية:**

1) $E(z_t) = \text{constant} = \mu, \quad \forall t$

2) $\text{cov}(z_t, z_s) = \begin{cases} \text{constant} = \gamma_0, \forall t, \forall s, t = s \\ f(|s-t|), \forall t, \forall s, t \neq s \end{cases}$

الآن سوف نعرف متسلسلة زمنية مهمة جدا لكونها حجرة او طوب البناء Building Blocks لجميع النماذج التي سوف ندرسها

**تعريف 7:**

**متسلسلة الضجة البيضاء White Noise Series اوعملية الضجة البيضاء White Noise Process** $\{a_t\}$ **هي عبارة عن متتابعة من المشاهدات العشوائية غير المترابطة ( واحيانا نفترض انها متتابعة من المتغيرات العشوائية التي تكون مستقلة ولها توزيعات متطابقة Independent, Identically Distributed (IID) ) بمتوسط صفري وتباين ثابت** $\sigma^2$ **أي:**

1) $E(a_t) = 0, \forall t$

2) $\text{cov}(a_t, a_s) = \begin{cases} \sigma^2, & \forall t, \forall s, t = s \\ 0, & \forall t, \forall s, t \neq s \end{cases}$

**ويرمز لها بالرمز** $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$

**مثال1:**

**متسلسلة المشي العشوائي Random Walk :**

سوف نبني عملية عشوائية $\{Z_t\}$ كالتالي:

$$Z_1 = a_1$$
$$Z_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$Z_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$$

أو

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t$$

أي لو اعتبرنا ان $a_j$ هو حجم الخطوة التي تؤخذ الي الامام او الخلف عند الزمن $j$ فان $Z_t$ هي موقع ماشي عشوائي عند الزمن $t$

**ملاحظة:** هذه العملية او المتسلسلة من النماذج الهامة جدا التي تصف اسواق المال العالمية

تمرين: اوجد $E(Z_t)$ و $\operatorname{cov}(Z_t, Z_s)$ لجميع قيم $t,s$ وهل العملية مستقرة؟

**تعريف 8:**

**دالة التغاير الذاتي Autocovariance Function وتعرف كالتالي:**

$$\gamma_{t,s} = \operatorname{cov}(Z_t, Z_s), \forall t, \forall s$$
$$= E\left[(Z_t - \mu)(Z_s - \mu)\right], \forall t, \forall s$$

**وإذا عرفنا التخلف $k$ علي انه الفترة الزمنية التي تفصل بين $Z_t$ وبين $Z_{t-k}$ أو $Z_{t+k}$ فإن دالة التغاير الذاتي تعطى بالعلاقة:**

$$\gamma_k = \operatorname{cov}(Z_t, Z_{t-k}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$
$$= E\left[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

**ملاحظة:** سوف نستخدم التعريف الثاني دائما

**تعريف 9:**

**دالة الترابط الذاتي Autocorrelation Function (ACF) وتعرف كالتالي:**

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

ولها الخواص التالية:

1. $\rho_0 = 1$
2. $\rho_{-k} = \rho_k$
3. $|\rho_k| \le 1$

**مثال 2:**

سوف نشتق الآن دالة الترابط الذاتي لعملية الضجة البيضاء

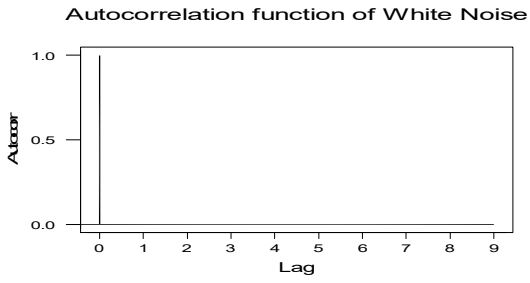
دالة التغاير الذاتي لعملية الضجة البيضاء هي:

$$\gamma_k = \operatorname{cov}(a_t, a_{t-k}) = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

وذلك من التعريف 7 ومنها نجد دالة الترابط الذاتي:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:



**تعريف 10:**

**دالة الترابط الذاتي الجزئي Partial Autocorrelation Function (PACF)**

**وتعطي مقدار الترابط بين $Z_t$ و $Z_{t-k}$ بعد إزالت تأثير الترابط الناتج من المتغيرات $Z_{t-1}, Z_{t-2}, ..., Z_{t-k+1}$ الواقعة بينهما ويرمز لها عند التخلف $k$ بالرمز $\phi_{kk}$ وأحد طرق حسابها تقوم علي حساب معامل الإنحدار الجزئي $\phi_{kk}$ في التمثيل:**

$$Z_t = \phi_{k1} Z_{t-1} + \phi_{k2} Z_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_{t-k} + a_t$$

حساب $\phi_{11}$ :

$$Z_t = \phi_{11} Z_{t-1} + a_t$$

بضرب طرفي العلاقة بـ $Z_{t-1}$ وأخذ التوقع نجد

$$E\left(Z_{t-1} Z_t\right) = \phi_{11} E\left(Z_{t-1} Z_{t-1}\right) + E\left(Z_{t-1} a_t\right)$$

أي

$$\gamma_1 = \phi_{11} \gamma_0$$

حيث $E\left(Z_{t-1} a_t\right) = 0$ ( بشكل عام $E\left(Z_{t-k} a_t\right) = 0, k = 1,2,...$ كما سنبين لاحقا )

وبالقسمة علي $\gamma_0$ نجد

$$\phi_{11} = \rho_1$$

**تعريف 11:**

**بشكل عام تعرف دالة الترابط الذاتي الجزئي كالتالي:**

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \rho_1, & k = 1 \\ \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, & k = 2,3,... \end{cases}$$

حيث $|\ |$ ترمز الي محددة مصفوفة

التعريف السابق صعب الإستخدام لقيم $k$ الكبيرة ولهذا سوف نعطي تعريف آخر لحساب دالة الترابط الذاتي الجزئي تكراريا:

**تعريف 11 ب:**

**تحسب $\phi_{kk}$ تكراريا من العلاقات**

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_j}, \quad k = 2,3,...$$

**حيث**

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,k-1}, \quad j = 1,2,...,k-1$$

حساب $\phi_{22}$ :

من تعريف 11 ب:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \phi_{11}\rho_1}{1 - \phi_{11}\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

وذلك لأن $\phi_{11} = \rho_1$.

**<u>مثال 3:</u>**

سوف نشتق الآن دالة الترابط الذاتي الجزئي لعملية الضجة البيضاء:

من تعريف 11 ب

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0$$

وذلك من مثال 1 السابق

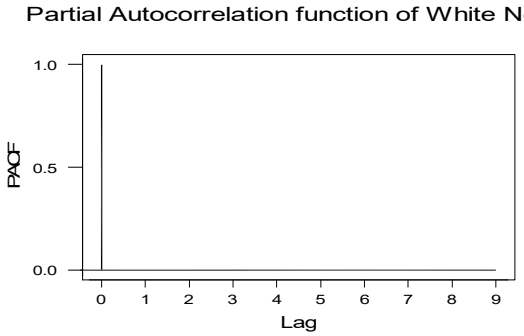
وبالتعويض في تعريف 11 ب عن $\phi_{kk}$ نجد

$$\phi_{22} = \phi_{33} = \cdots = 0$$

وهكذا:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:



**ملاحظة:** لاحظ أن كل من دالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لعملية الضجة البيضاء تساوي الصفر من التخلف الأول. وهذه خاصية جميع المتغيرات العشوائية غير المترابطة او المستقلة. لإختبار عدم الترابط بين قيم مشاهدة لمتغير عشوائي تستخدم دالة الترابط الذاتي لذلك.

**تعريف 12 :**

**دالة الترابط الذاتي للعينة Sample Autocorrelation Function SACF لمسلسلة زمنية مشاهدة** $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n$ **ويرمز لها بالرمز** $r_k,\ k = 0,1,2,...$ **وتعطى بالعلاقة:**

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(z_t - \overline{z})(z_{t+k} - \overline{z})}{\sum_{t=1}^{n}(z_t - \overline{z})^2}, \quad k = 0,1,2,...$$

**حيث** $\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t$

وهي مُقدِّر Estimator لدالة الترابط الذاتي أي $\hat{\rho}_k = r_k, \quad k = 0,1,2,...$ وبما انها مُقدِّر فهي إذا تتغير عشوائيا من عينة لاخرى ولهذا فإن لها الخواص العينية التالية:

1- إذا كانت $\rho_k = 0, \quad k > q$ فإن

$$V(r_k) \cong \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{q}\rho_k^2\right), \quad k > q$$

وفي الحالة الخاصة عندما $\rho_k = 0, \quad k > 0$ فإن $V(r_k) \cong \frac{1}{n}, \quad k > 0$

2- لقيم $n$ الكبيرة و $\rho_k = 0$ فإن $r_k$ يكون لها تقريبا توزيع طبيعي وبالتالي نستطيع القيام بالاختبار التالي:

$$H_0 : \rho_k = 0$$
$$H_1 : \rho_k \neq 0$$

وذلك بإستخدام الإحصائة:

$$\frac{|r_k|}{n^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{n}\,|r_k|$$

وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وترفض $H_0$ إذا كانت $\sqrt{n}\left|r_k\right| > 1.96$

3- تحت الفرضية $H_0 : \rho_k = 0, \forall k$ فإن $corr\left(r_k, r_{k-s}\right) \cong 0, s \neq 0$

4- تُقدَّر التباينات لدالة الترابط الذاتي للعينة كالتالي:

$$\hat{V}\left(r_k\right) \cong \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{q} r_k^2\right), \quad k > q$$

**تعريف 13:**

**دالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة Sample Partial Autocorrelation Function**

**SPACF لمسلسلة زمنية مشاهدة $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n$ ويرمز لها بالرمز**

**$r_{kk},\ k = 0,1,2,...$ تعطى بالعلاقة:**

$$r_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ r_1, & k = 1 \\ \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & \cdots & r_{k-2} & r_1 \\ r_1 & 1 & \cdots & r_{k-3} & r_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & r_1 & r_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & \cdots & r_{k-2} & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & \cdots & r_{k-3} & r_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & r_1 & 1 \end{vmatrix}}, & k = 2,3,... \end{cases}$$

و لحساب دالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة تكراريا:

**تعريف 13 ب:**

**تحسب $r_{kk}$ تكراريا من العلاقات**

$$r_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$r_{11} = r_1$$

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j}, \quad k = 2,3,...$$

**حيث**

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,k-1}, \quad j = 1,2,...,k-1$$

وهي ايضا مقدَّر Estimator لدالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة أي $\hat{\phi}_{kk} = r_{kk}, \quad k = 0,1,2,...$ وبما انها مُقدِّر فهي إذا تتغير عشوائيا من عينة لاخرى ولهذا فإن لها الخواص العينية التالية:

1- $V(r_{kk}) \cong \frac{1}{n}, \quad k > 0$

2- لقيم $n$ الكبيرة فإن $r_{kk}$ يكون لها تقريبا توزيع طبيعي وبالتالي نستطيع القيام بالاختبار التالي:

$$H_0 : \phi_{kk} = 0$$
$$H_1 : \phi_{kk} \neq 0$$

وذلك بإستخدام الإحصائة:

$$\frac{|r_{kk}|}{n^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{n}\,|r_{kk}|$$

وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وترفض $H_0$ إذا كانت $\sqrt{n}\,|r_{kk}| > 1.96$

3- تحت الفرضية $H_0 : \phi_{kk} = 0, \forall k$ فإن $corr(\phi_{kk}, \phi_{k-s,k-s}) \cong 0, s \neq 0$

4- تُقدّر التباينات لدالة الترابط الذاتي للعينة كالتالي:

$$\hat{V}\left(r_{kk}\right) \cong \frac{1}{n}, \quad k > 0$$

**مثال 4:**

البيانات التالية تمثل الطلب علي منتج معين يوميا:

158 222 248 216 226 239 206 178 169

أحسب الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للعينة وارسمهما:

اولا: نحسب المتوسط $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t = \frac{1}{9}\left(158 + 222 + \cdots + 169\right) = 206.89$

ثانيا: نحسب الترابط الذاتي من العلاقة

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}\left(z_t - \bar{z}\right)\left(z_{t+k} - \bar{z}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(z_t - \bar{z}\right)^2}, \quad k = 0,1,2,...$$

$$r_1 = \frac{\left(158\times 222 + 222\times 248 + \cdots + 178\times 169\right)}{\left(158\times 158 + 222\times 222 + \cdots + 169\times 169\right)} = 0.265116$$

$$r_2 = \frac{\left(158\times 248 + 222\times 216 + \cdots + 206\times 169\right)}{\left(158\times 158 + 222\times 222 + \cdots + 169\times 169\right)} = -0.212$$

$$r_3 = \frac{\left(158\times 216 + 222\times 226 + \cdots + 239\times 169\right)}{\left(158\times 158 + 222\times 222 + \cdots + 169\times 169\right)} = -0.076$$

وهكذا $r_8 = 0.230, r_7 = 0.104, r_6 = -0.242, r_5 = -0.387, r_4 = -0.183$

ثالثا: نحسب التباينات من

$$\hat{V}\left(r_k\right) \cong \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{q} r_k^2\right), \quad k > q$$

$$\hat{V}\left(r_1\right) \cong \frac{1}{9}$$

$$\hat{V}\left(r_2\right) \cong \frac{1}{n}\left(1 + 2r_1^2\right) = \frac{1}{9}\left(1 + 2\left(0.265\right)^2\right) = 0.1267$$

$$\hat{V}(r_3) \cong \frac{1}{n}\left(1+2\left(r_1^2+r_2^2\right)\right)=\frac{1}{9}\left(1+2\left((0.265)^2+(-0.212)^2\right)\right)=0.1367$$

$$\hat{V}(r_4) \cong 0.138 \quad \hat{V}(r_5) \cong 0.1454 \quad \hat{V}(r_6) \cong 0.1787$$

الخ...

رابعا: نحسب الترابط الذاتي الجزئي للعينة:

$$r_{00}=1, \quad \text{by definition}$$

$$r_{11}=r_1=0.265$$

ثم نحسب باقي الترابطات من العلاقات التكرارية

$$r_{kk}=\frac{r_k-\sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}r_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}r_j}, \quad k=2,3,...$$

حيث

$$r_{kj}=r_{k-1,j}-r_{kk}r_{k-1,k-1}, \quad j=1,2,...,k-1$$

$$r_{22}=\frac{r_2-\sum_{j=1}^{1} r_{1,j}r_{2-j}}{1-\sum_{j=1}^{1} r_{1,j}r_j}=\frac{r_2-r_{11}r_1}{1-r_{11}r_1}=\frac{(-0.212)-(0.265)(0.265)}{1-(0.265)(0.265)}=\frac{-0.282225}{0.929775}$$

$$=-0.30354$$

لحساب $r_{33}$ نحتاج الى $r_{21}$ وتحسب من

$$r_{21}=r_{11}-r_{22}r_{11}=0.265-(-0.303)(0.265)=0.345295$$

$$r_{33}=\frac{r_3-\sum_{j=1}^{2}r_{2,j}r_{3-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}r_{2,j}r_j}=\frac{r_3-\left(r_{21}r_2+r_{22}r_1\right)}{1-\left(r_{21}r_1+r_{22}r_2\right)}$$

$$=\frac{\left(-0.076\right)-\left(\left(0.345\right)\left(-0.212\right)+\left(-0.303\right)\left(0.265\right)\right)}{1-\left(\left(0.345\right)\left(0.265\right)+\left(-0.303\right)\left(-0.212\right)\right)}$$

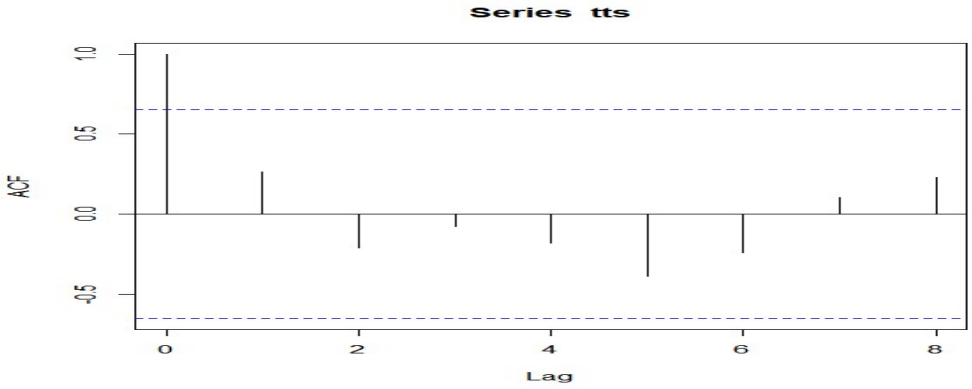
$$=0.092$$

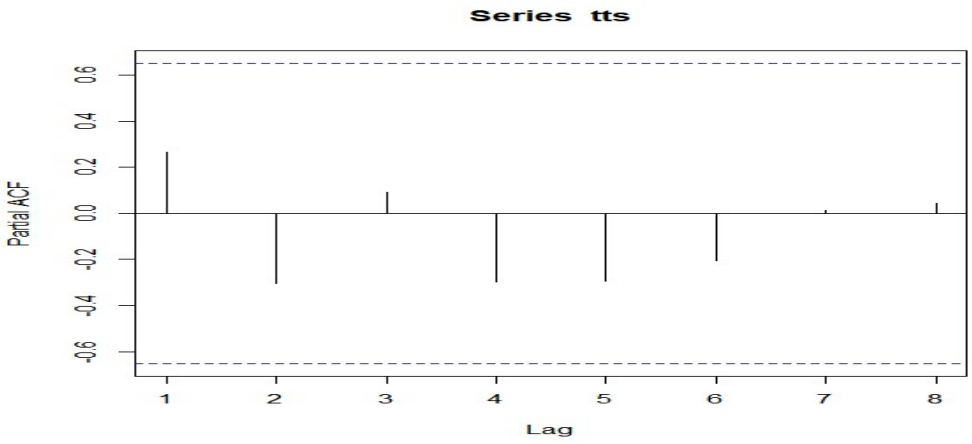
وهكذا نحسب باقي الترابطات الجزئية للعينة

$$r_{88}=0.042,\ r_{77}=0.013,\ r_{66}=-0.207,\ r_{55}=-0.294,\ r_{44}=-0.298$$

ولها جميعا التباينات تساوي تقريبا $1/9=0.1111$

خامسا: رسم دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للعينة



## الفصل الثاني

### نماذج الإنحدار الذاتي المتوسط المتحرك Autoregressive-Moving Average Models وإستخداماتها في التنبؤ:

هناك عائلة كبيرة من النماذج التي يطلق عليها نماذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك Autoregressive-Moving Average Models والتي اثبتت الأبحاث الكثيرة في مختلف الميادين التطبيقية علي تفوقها الهائل علي الطرق التقليدية في التنبؤ.

**تعريف 14:**

**نموذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك من الدرجة** $(p,q)$ **ويرمز له** $ARMA(p,q)$ **لمتسلسلة زمنية مشاهدة** $\{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ **يكتب علي الشكل:**

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

**حيث** $a_t \sim WN(0,\sigma^2)$ **متسلسلة ضجة بيضاء و** $-\infty < \delta < \infty$ **معلم ثابت يمثل المستوي و** $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ **هي معالم الإنحدار الذاتي Autoregressive Parameters و** $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ **هي معالم المتوسط المتحرك Moving Average Operators**

سوف نستعين بجبر العمال Operators Algebra لتبسيط هذه النماذج لكي يسهل التعامل معها

**تعريف 15: عامل الإزاحة الخلفي Backshift Operator ويرمز له** $B$ **وله الخواص التالية:**

$$1 - Bz_t = z_{t-1}$$

$$2 - B^m z_t = B^{m-1}(Bz_t) = B^{m-2}(B(Bz_t)) = \cdots = z_{t-m}$$

$$3 - Bc = c, \quad c \text{ is a constant}$$

بالإضافة الي عامل الإزاحة الخلفي توجد عمال اخري نحتاج اليها لاحقا هي:

**تعريف 15 ب:**

**1- عامل الإزاحة الأمامي Forewardshift Operator ويرمز له $F$ ويعرف كالتالي:**

$$F = B^{-1}$$

**2- عامل التفريق Difference Operator ويرمز له $\nabla$ ويعرف كالتالي:**

$$\nabla = (1 - B)$$

**4- عامل التجميع Sum Operator ويرمز له $S$ ويعرف كالتالي:**

$$S = \nabla^{-1} = (1 - B)^{-1}$$

الآن نعود الي نموذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك من الدرجة $(p,q)$ ونكتبه علي الشكل:

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} - \cdots - \phi_p z_{t-p} = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$z_t - \phi_1 B z_t - \phi_2 B^2 z_t - \cdots - \phi_p B^p z_t = \delta + a_t - \theta_1 B a_t - \theta_2 B^2 a_t - \cdots - \theta_q B^q a_t$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) z_t = \delta + \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) a_t$$

أو

$$\phi_p(B) z_t = \delta + \theta_q(B) a_t$$

حيث $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ هو عامل الإنحدار الذاتي Autoregressive Operator و $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$ هو عامل المتوسط المتحرك Moving Average Operator

**<u>أمثلة:</u>**

1- نموذج المتوسط الثابت Constant Mean Model ويرمز له $ARMA(0,0)$ ويكتب علي الشكل:

$$\phi_0(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$

او

$$(1) z_t = \delta + (1) a_t$$

$$z_t = \delta + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

2- نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الاولي $ARMA(1,0) \equiv AR(1)$ وهو علي الشكل:

$$\phi_1(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$

$$(1-\phi_1 B) z_t = \delta + a_t$$

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

3- نموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الاولي $ARMA(0,1) \equiv MA(1)$ وهو علي الشكل:

$$\phi_0(B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t$$

$$z_t = \delta + (1-\theta_1 B) a_t$$

$$z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

4- نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية $ARMA(2,0) \equiv AR(2)$ وهو علي الشكل:

$$\phi_2(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2) z_t = \delta + a_t$$

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

5- نموذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك من الدرجة (1و1) $ARMA(1,1)$ ونكتبه علي الشكل:

$$\phi_1(B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t$$

$$(1-\phi_1 B) z_t = \delta + (1-\theta_1 B) a_t$$

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

## خصائص نماذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك:

سوف ندرس الخصائص الإحصائية التي تميز نماذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك ومعرفة كيفية التعرف علي احد هذه النماذج من عينة مشاهدة وذلك لتعيين او تحديد نموذج مناسب يصف المشاهدات.

### أولا: نموذج المتوسط الثابت(ARMA(0,0:

ويكتب علي الشكل

$$\phi_0(B)z_t = \delta + \theta_0(B)a_t$$

او

$$z_t = \delta + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

سوف نشتق الخواص الإحصائية لهذا النموذج وذلك بإيجاد التوقع (المتوسط) ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي كالتالي:

$$\begin{aligned} E(z_t) &= \delta + E(a_t) \\ &= \delta \end{aligned}$$

وذلك لأن $a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$

سوف نرمز لمتوسط المتسلسلة $E(z_t)$ بالرمز $\mu$ أي $\mu = E(z_t)$ وبالتالي يكون $\delta = \mu$ ويكتب النموذج:

$$z_t - \mu = a_t$$

لإشتقاق دالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي نضرب طرفي المعادلة السابقة في $z_{t-k} - \mu$ ونأخذ التوقع أي

$$E\left[(z_{t-k} - \mu)(z_t - \mu)\right] = E\left[(z_{t-k} - \mu)a_t\right]$$

ولكن $E\left[(z_{t-k} - \mu)(z_t - \mu)\right] = \gamma_k$ من تعريف 8 إذا

$$\gamma_k = E\left[(z_{t-k} - \mu)a_t\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

ونحل هذه العلاقة تكراريا:

$$k = 0: \quad \gamma_0 = E\left[(z_t - \mu)a_t\right]$$

لإيجاد الطرف الأيمن نضرب طرفي $z_t - \mu = a_t$ في $a_t$ ونأخذ التوقع أي

$$E\left[\left(z_t - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_t a_t\right) = \sigma^2$$

وذلك لأن إذا $a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$

$$k = 0: \quad \gamma_0 = E\left[\left(z_t - \mu\right)a_t\right] = \sigma^2$$

$$k = 1: \quad \gamma_1 = E\left[\left(z_{t-1} - \mu\right)a_t\right] = 0$$

وذلك لأن

$$z_{t-1} - \mu = a_{t-1}$$

$$E\left[\left(z_{t-1} - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_{t-1}a_t\right) = 0$$

في الحقيقة فإن

$$z_{t-k} - \mu = a_{t-k}, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_{t-k}a_t\right) = 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

أي

**قاعدة 1:**

$$E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_{t-k}a_t\right) = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k = 1,2,.. \end{cases}$$

أي

$$\gamma_0 = \sigma^2$$

$$\gamma_k = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

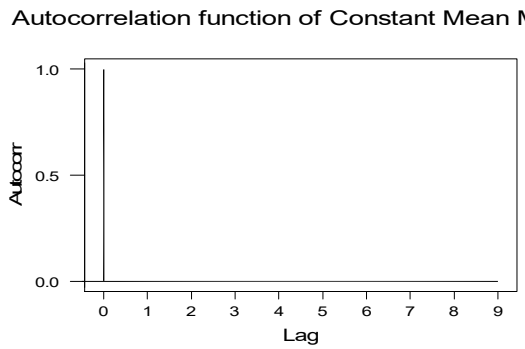
وتوضع علي شكل دالي:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

وبالقسمة علي $\gamma_0 = \sigma^2$ نجد

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:




نشتق الآن دالة الترابط الذاتي الجزئي من التعريف 11 نجد

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = 0$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

$$\phi_{33}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \rho_2\\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2\\ \rho_1 & 1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}=0$$

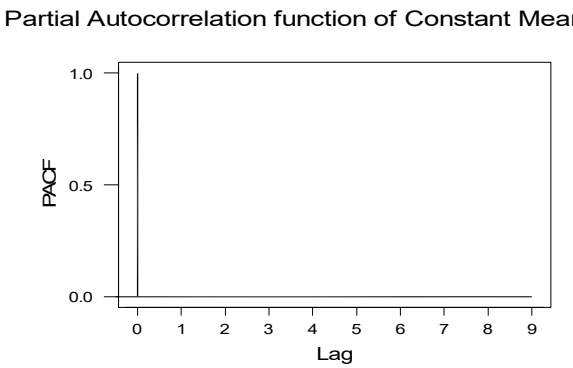
$$\vdots$$

$$\phi_{kk}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1}\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{1}=0,\quad k=2,3,\cdots$$

وتوضع علي شكل دالي:

$$\phi_{kk}=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

ولها الشكل التالي:




**<u>ملاحظة:</u>** نموذج المتوسط الثابت لايفترق عن نموذج الضجة البيضاء الا في ان له متوسط غير صفري

**ثانيا: نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الاولى ARMA(1,0) = AR(1)**

وهو علي الشكل:

$$\phi_1(B)z_t = \delta + \theta_0(B)a_t$$

$$(1-\phi_1 B)z_t = \delta + a_t$$

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

كالنموذج السابق سوف نوجد التوقع (المتوسط) ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$(1-\phi_1 B)z_t = \delta + a_t$$

$$z_t = \frac{\delta}{(1-\phi_1)} + (1-\phi_1 B)^{-1} a_t$$

$$E(z_t) = \frac{\delta}{(1-\phi_1)} + E\left[(1-\phi_1 B)^{-1} a_t\right]$$

الحد الثاني في الطرف الأيمن هو

$$E\left[(1-\phi_1 B)^{-1} a_t\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^{\,j} B^j\right)a_t\right]$$

لإدخال التوقع علي المجموع اللآنهائي يجب ان تكون المتسلسلة اللآنهائية $\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^{\,j} B^j < \infty$ متقاربة وذلك يتحقق إذا كانت $|\phi_1| < 1$ وذلك إذا اعتبرنا العامل $B$ الآن يلعب دور متغير مركب Complex Variable له الشكل $B = a + ib$ وله القياس $|B| = 1$ في الحقيقة لابد ان نتطلب ان تكون جزور او اصفار $(1-\phi_1 B) = 0$ خارج دائرة الوحدة أي $|B| > 1$ أي

$$1-\phi_1 B = 0$$

$$B = \frac{1}{\phi_1}$$

$$|B| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\phi_1}\right| > 1 \Rightarrow |\phi_1| < 1$$

وهذا هو شرط الإستقرار. نعود الي العلاقة

$$E\left[\left(1-\phi_1 B\right)^{-1} a_t\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1{}^j B^j\right) a_t\right]$$
$$=\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1{}^j B^j\right) E\left(a_t\right)\right]$$
$$=0, \quad \forall t$$

ويكون

$$E\left(z_t\right) = \frac{\delta}{\left(1-\phi_1\right)}$$

او

$$\mu = \frac{\delta}{\left(1-\phi_1\right)}$$
$$\therefore \delta = \mu\left(1-\phi_1\right)$$

وبالتعويض عن $\delta$ في صيغة النموذج نجد

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t$$
$$= \mu\left(1-\phi_1\right) + \phi_1 z_{t-1} + a_t$$
$$= \mu + \phi_1\left(z_{t-1} - \mu\right) + a_t$$
$$\left(z_t - \mu\right) - \phi_1\left(z_{t-1} - \mu\right) = a_t$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة في $z_{t-k} - \mu$ ونأخذ التوقع أي

$$E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right)\left(z_t - \mu\right)\right] - \phi_1 E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right)\left(z_{t-1} - \mu\right)\right] = E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right) a_t\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

أي

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} = E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right) a_t\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

وذلك من تعريف 8 و تحل هذه العلاقة تكراريا كما يلي:

$$k = 0: \quad \gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 = E\left[\left(z_t - \mu\right) a_t\right]$$

لإيجاد الطرف الأيمن نقوم بالتالي:

$$E\left[a_t\left(z_t-\mu\right)\right]-\phi_1 E\left[a_t\left(z_{t-1}-\mu\right)\right]=E\left(a_t a_t\right)$$
$$E\left[a_t\left(z_t-\mu\right)\right]-\phi_1\times(0)=\sigma^2$$
$$\therefore E\left[a_t\left(z_t-\mu\right)\right]=\sigma^2$$

إذا

$$\gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2$$
$$k=1:\quad \gamma_1-\phi_1\gamma_0=E\left[\left(z_{t-1}-\mu\right)a_t\right]=0$$

في الحقيقة

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots$$

بقسمة المعادلة الأخيرة علي $\gamma_0$ نجد

$$\rho_k-\phi_1\rho_{k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots$$

أو

$$\rho_k=\phi_1\rho_{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

وبما ان $\rho_0=1$ فإن:

$$\rho_1=\phi_1\rho_0=\phi_1$$
$$\rho_2=\phi_1\rho_1=\phi_1^{\,2}$$
$$\vdots$$
$$\rho_k=\phi_1^k$$

أو بشكل دالة

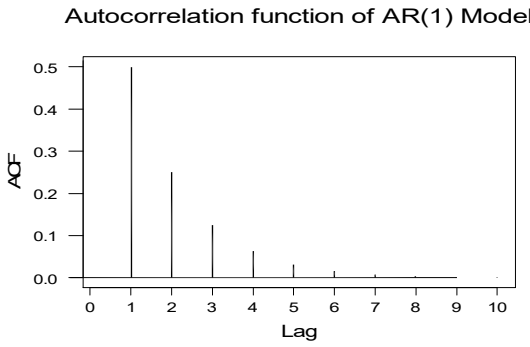
$$\rho_k=\phi_1^{|k|},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

وذلك لأن $\forall k\quad ,\ \rho_{-k}=\rho_k$ سوف ننظر من الآن وصاعدا للشق الموجب من $\rho_k$ أي

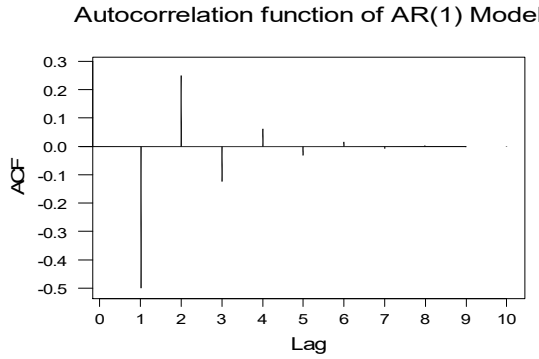
$$\rho_k=\phi_1^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

هذه الدالة لها الشكل التالي:

1- عندما تكون $\phi_1>0$




2- عندما تكون $\phi_1 < 0$




نشتق الآن دالة الترابط الذاتي الجزئي

من تعريف 11 نجد

$$\phi_{00}=1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11}=\rho_1=\phi_1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{22}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & \rho_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \phi_1\\ \phi_1 & \phi_1^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \phi_1\\ \phi_1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{1-\phi_1^2}=0$$

$$\vdots$$

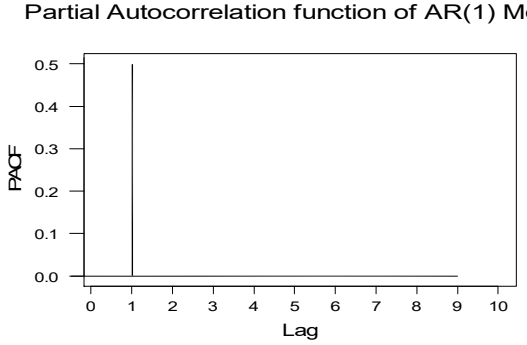
$$\phi_{kk}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1}\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1\\ \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \phi_1^{k-1} & \phi_1^{k-2} & \cdots & \phi_1^k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1^k\\ \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \phi_1^{k-1} & \phi_1^{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{|\ |>0}$$

محددة البسط تساوي صفرا لأن العامود الأخير يساوي العامود الأول مضروبا في $\phi_1$ ونكتب دالة الترابط الذاتي الجزئي علي الشكل الدالي:

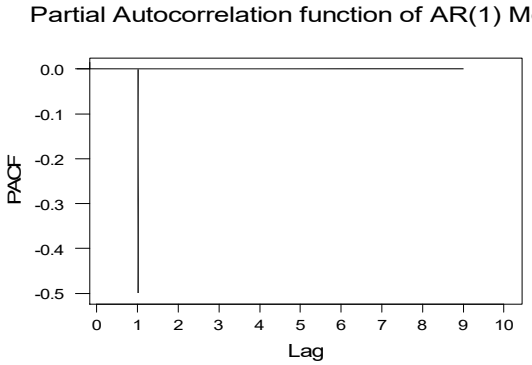
$$\phi_{kk}=\begin{cases}1, & k=0\\ \phi_1, & k=1\\ 0, & k\geq 2\end{cases}$$

ولها الشكل التالي:

1- عندما تكون $\phi_1>0$



2- عندما تكون $\phi_1 < 0$




ملاحظة: دائما لاترسم أي من $\rho_0 = 1$ او $\phi_{00} = 1$ في الأشكال البيانية.

**<u>مناقشة النموذج:</u>**

1- عندما تكون $|\phi_1| < 1$ (شرط الإستقرار) فإن $E(z_t) = \delta/(1-\phi_1)$ وهوثابت لجميع قيم $t$

2- دالة الترابط الذاتي دالة للتخلف $k$ فقط ولاتعتمد علي الزمن $t$

3- دالة الترابط الذاتي تتخامد اسيا في إتجاه واحد إبتداءا من $\rho_1$ عندما تكون $\phi_1 > 0$ وتتخامد اسيا مترددة بين القيم الموجبة والسالبة عندما تكون $\phi_1 < 0$

4- دالة الترابط الذاتي الجزئي لها قيمة واحدة غير صفرية ( مع عدم النظر الي $\phi_{00}$ ) ويكون إتجاهها حسب إشارة $\phi_1$ ومقدارها يساوي $|\phi_1|$

**<u>ثالثا: نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية ARMA(2,0) = AR(2) :</u>**

ويكتب علي الشكل:

$$\phi_2(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$
$$(1 - \phi_1 B + \phi_2 B^2) z_t = \delta + a_t$$
$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

كالسابق نوجد المتوسط ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right) z_t = \delta + a_t$$

$$z_t = \frac{\delta}{\left(1-\phi_1-\phi_2\right)} + \left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} a_t$$

$$E\left(z_t\right) = \frac{\delta}{\left(1-\phi_1-\phi_2\right)} + E\left[\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} a_t\right]$$

الحد الثاني في الطرف الأيمن مجموع لانهائي على الشكل $E\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j a_{t-j}\right)$ ولكي ندخل التوقع

داخل التجميع اللانهائي لابد ان تكون $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j a_{t-j}$ متقاربة في المتوسط المربع وهذا يتحقق إذا

وفقط إذا كان $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty$ وهذا يتحقق إذا حققت معالم الإنحدار الذاتي الشروط التالية:

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$
$$\phi_2 + \phi_1 < 1$$
$$-1 < \phi_2 < 1$$

والتي تسمي **<u>بشروط الإستقرار</u>** ( هذه الشروط تنتج ايضا من كون جزور او أصفار $\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)=0$ خارج دائرة الوحدة ) . إذا تحققت شروط الإستقرار فإن

$$E\left[\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} a_t\right] = \left[\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} E\left(a_t\right)\right] = 0, \forall t$$

ويكون

$$\mu = E\left(z_t\right) = \frac{\delta}{\left(1-\phi_1-\phi_2\right)}$$
$$\delta = \left(1-\phi_1-\phi_2\right)\mu$$

و بالتعويض عن $\delta$ في صيغة النموذج نجد

$$z_t = \left(1-\phi_1-\phi_2\right)\mu + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t$$
$$= \mu + \phi_1\left(z_{t-1}-\mu\right) + \phi_2\left(z_{t-2}-\mu\right) + a_t$$
$$\left(z_t-\mu\right) - \phi_1\left(z_{t-1}-\mu\right) - \phi_2\left(z_{t-2}-\mu\right) = a_t$$

نضرب المعادلة السابقة في $z_{t-k}-\mu$ ونأخذ التوقع نجد:

$$E\left[(z_t-\mu)(z_{t-k}-\mu)-\phi_1(z_{t-1}-\mu)(z_{t-k}-\mu)-\phi_2(z_{t-2}-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]$$
$$=E\left[a_t(z_{t-k}-\mu)\right], k=0,\pm1,\pm2,...$$

أي

$$E\left[(z_t-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]-\phi_1E\left[(z_{t-1}-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]-\phi_2E\left[(z_{t-2}-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]$$
$$=E\left[a_t(z_{t-k}-\mu)\right], k=0,\pm1,\pm2,...$$

أو

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}-\phi_2\gamma_{k-2}=E\left[a_t(z_{t-k}-\mu)\right], k=0,\pm1,\pm2,...$$

وذلك من تعريف 8 الآن نحل هذه العلاقة تكراريا كما يلي:

$$k=0:\gamma_0-\phi_1\gamma_{-1}-\phi_2\gamma_{-2}=E\left[a_t(z_t-\mu)\right]=\sigma^2\Rightarrow\gamma_0=\phi_1\gamma_1-\phi_2\gamma_2+\sigma^2$$

وذلك من قاعدة 1

$$k=1:\gamma_1-\phi_1\gamma_0-\phi_2\gamma_1=0\Rightarrow\gamma_1=\phi_1\gamma_0-\phi_2\gamma_1$$

$$k=2:\gamma_2-\phi_1\gamma_1-\phi_2\gamma_0=0\Rightarrow\gamma_2=\phi_1\gamma_1-\phi_2\gamma_0$$

وبشكل عام

$$k\geq1:\gamma_k=\phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}$$

بقسمة الطرفين علي $\gamma_0$ نجد

$$\rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2},\quad k=1,2,...$$

$\rho_k-\phi_1\rho_{k-1}-\phi_2\rho_{k-2}=0,\quad k=1,2,...$ ( ملاحظة: بوضع المعادلة السابقة علي الشكل

نجد انها معادلة فروقية من الدرجة الثانية والتي يمكن حلها بشكل مغلق بإستخدام طرق حل المعادلات الفروقية ولكن هذا خارج نطاق المقرر الحالي)

سوف نحل العلاقة السابقة بالطريقة التكرارية والتي تحتاج الي قيمتين اوليتين:

$$1-\rho_0=1$$

$$2-\rho_1=\phi_1\rho_0+\phi_2\rho_{-1}\Rightarrow\rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

ومنها نجد

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_0 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2$$

وهكذا الخ...

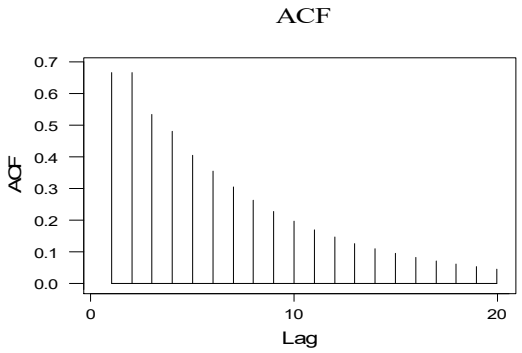
الأشكال التالية هي لدوال الترابط الذاتي لعملية $AR(2)$

1- الشكل (1) $\phi_1 = 0.4, \phi_2 = 0.4$

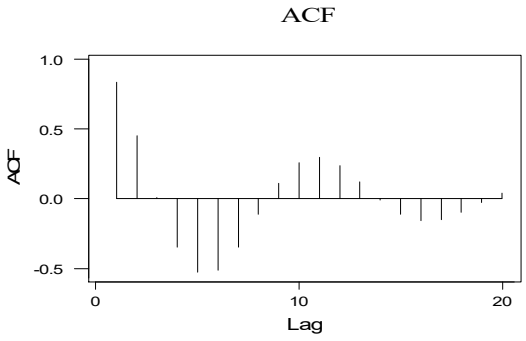
2- الشكل (2) $\phi_1 = 1.5, \phi_2 = -0.8$

3- الشكل (3) $\phi_1 = 0.5, \phi_2 = -0.6$

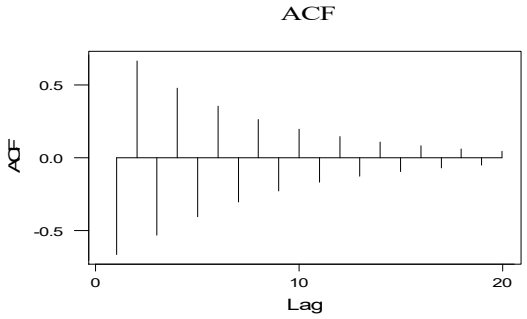
شكل (1)




شكل (2)



شكل (3)




الآن نشتق دالة الترابط الذاتي الجزئي لعملية $AR(2)$ كالتالي:

$\phi_{00} = 1,$ by definition

$\phi_{11} = \rho_1,$ by definition

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \neq 0$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 \end{vmatrix}}{|\ | > 0} = 0$$

وذلك لأن العمود الأخير في محددة البسط هو تركيب خطي من العمودين الأول والثاني، كذلك

$$\phi_{kk}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1=\phi_1\rho_0+\phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2=\phi_1\rho_1+\phi_2\rho_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2} \end{vmatrix}}{|\ |>0}=0,\ k=3,4,...$$

وذلك ايضا لنفس السبب السابق. إذا

$$\phi_{kk}=\begin{cases} 1, & k=0 \\ \rho_1, & k=1 \\ \dfrac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}, & k=2 \\ 0, & k\geq 3 \end{cases}$$

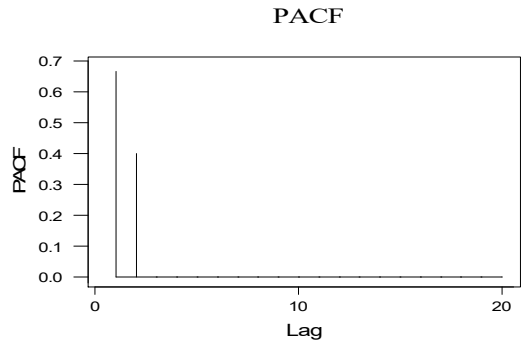
الأشكال التالية هي لدوال الترابط الذاتي الجزئي لعملية $AR(2)$

4- الشكل (4) $\phi_1=0.4,\ \phi_2=0.4$

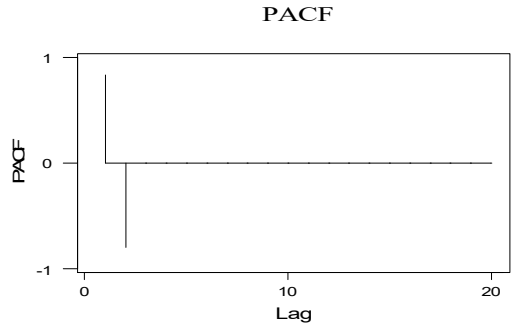
5- الشكل (5) $\phi_1=1.5,\ \phi_2=-0.8$

6- الشكل (6) $\phi_1=0.5,\ \phi_2=-0.6$

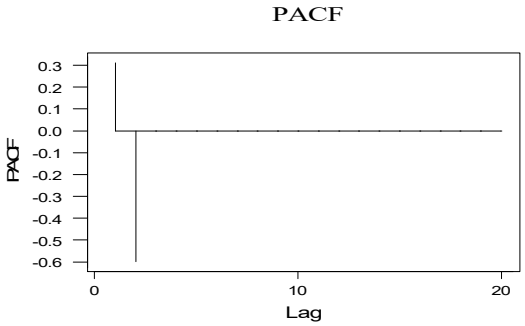
شكل (4)



شكل (5)




شكل (6)




**<u>رابعا: نموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الأولى ARMA(0,1) = MA(1) :</u>**

وتكتب علي الشكل:

$$\phi_0(B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t$$
$$z_t = \delta + (1 - \theta_1 B) a_t$$
$$z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

الآن نوجد المتوسط ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$E(z_t) = E(\delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}) = \delta$$
$$\therefore \mu = \delta$$

ونكتب النموذج

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

بضرب هذه المعادلة في $z_{t-k} - \mu$ وأخذ التوقع نجد

$$E\left[(z_t - \mu)(z_{t-k} - \mu)\right] = E\left[(z_{t-k} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-k} - \mu)a_{t-1}\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

او

$$\gamma_k = E\left[(z_{t-k} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-k} - \mu)a_{t-1}\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبحلها تكراريا

$$k = 0: \quad \gamma_0 = E\left[(z_t - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_t - \mu)a_{t-1}\right]$$

نوجد كل من $E\left[(z_t - \mu)a_t\right]$ و $E\left[(z_t - \mu)a_{t-1}\right]$ كالآتي:

$$E\left[(z_t - \mu)a_t\right] = E(a_t a_t) - \theta_1 E(a_{t-1} a_t) = \sigma^2$$

$$E\left[(z_t - \mu)a_{t-1}\right] = E(a_t a_{t-1}) - \theta_1 E(a_{t-1} a_{t-1}) = -\theta_1 \sigma^2$$

$$\therefore \gamma_0 = \sigma^2 - \theta_1\left(-\theta_1 \sigma^2\right) = \sigma^2\left(1 + \theta_1^2\right)$$

$$k = 1: \quad \gamma_1 = E\left[(z_{t-1} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-1} - \mu)a_{t-1}\right]$$

$$\therefore \quad \gamma_1 = -\theta_1 \sigma^2 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

وذلك بإستخدام القاعدة 1

$$k = 2: \quad \gamma_2 = E\left[(z_{t-2} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-2} - \mu)a_{t-1}\right]$$

$$\therefore \quad \gamma_2 = 0 \Rightarrow \rho_2 = 0$$

أيضا من قاعدة 1 وبشكل عام فإن

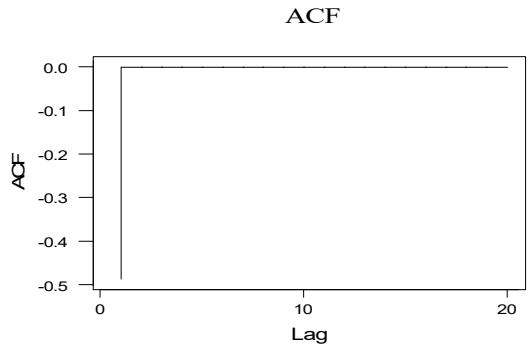
$$k \geq 2: \quad \gamma_k = 0 \Rightarrow \rho_k = 0$$

وهكذا فإن دالة الترابط الذاتي لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الأولي $MA(1)$ هي علي الشكل:

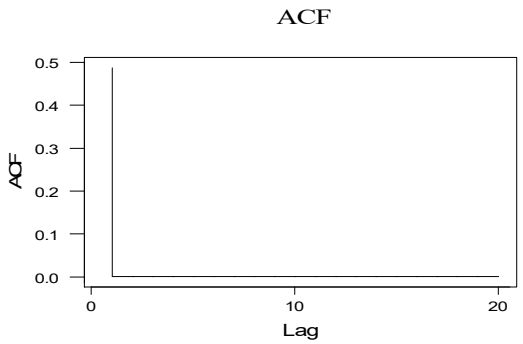
$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:

1- عندما $\theta_1 = 0.8$




2- عندما $\theta_1 = -0.8$



الآن نشتق دالة الترابط الجزئي لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الأولي $MA(1)$

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{1-\rho_1^2} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4} = \frac{-\theta_1^2\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^6}$$

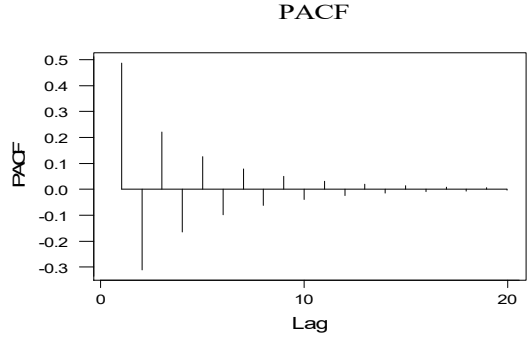
$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^8}$$

وبشكل عام

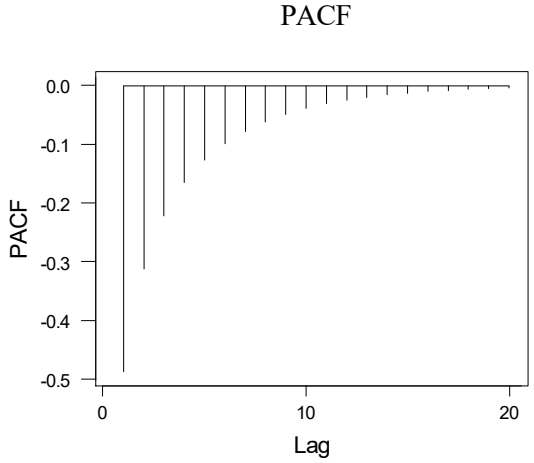
$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}, \quad k > 0$$

ولها الشكل التالي:

1- عندما عندما $\theta_1 = -0.8$



2- عندما $\theta_1 = 0.8$




**خامسا: نموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الثانية ARMA(0,2) = MA(2) :**

وتكتب علي الشكل:

$$\phi_0(B) z_t = \delta + \theta_2(B) a_t$$
$$z_t = \delta + \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2\right) a_t$$
$$z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

الآن نوجد المتوسط ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$E(z_t) = E\left(\delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}\right) = \delta$$
$$\therefore \mu = \delta$$

ونكتب النموذج

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

بضرب هذه المعادلة في $z_{t-k} - \mu$ وأخذ التوقع نجد

$$E\left[\left(z_t - \mu\right)\left(z_{t-k} - \mu\right)\right] = E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right) a_t\right] - \theta_1 E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right) a_{t-1}\right]$$
$$- \theta_2 E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right) a_{t-2}\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

او

$$\gamma_k = E\left[\left(z_{t-k}-\mu\right)a_t\right]-\theta_1 E\left[\left(z_{t-k}-\mu\right)a_{t-1}\right]-\theta_2 E\left[\left(z_{t-k}-\mu\right)a_{t-2}\right],\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

وبحلها تكراريا نجد

$$\gamma_0 = \left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\sigma^2$$
$$\gamma_1 = \left(-\theta_1+\theta_1\theta_2\right)\sigma^2$$
$$\gamma_2 = -\theta_2\sigma^2$$
$$\gamma_k = 0,\quad k>2$$

وبالقسمة علي $\gamma_0$ نجد

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$
$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$
$$\rho_k = 0,\quad k>2$$

وتكتب علي شكل دالة

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=2 \\ 0, & k>2 \end{cases}$$

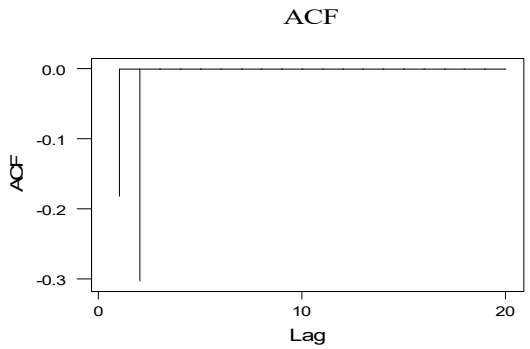
الأشكال التالية هي لدوال الترابط الذاتي لعملية $MA(2)$

7- الشكل (7) $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.4$

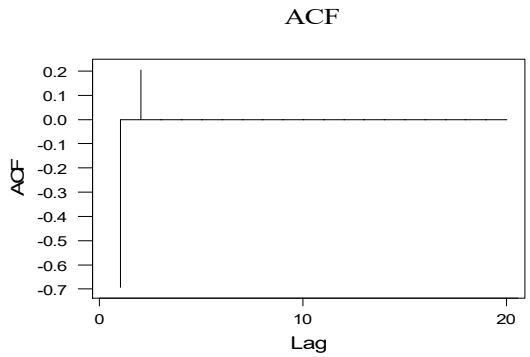
8- الشكل (8) $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = -0.8$

9- الشكل (9) $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.6$

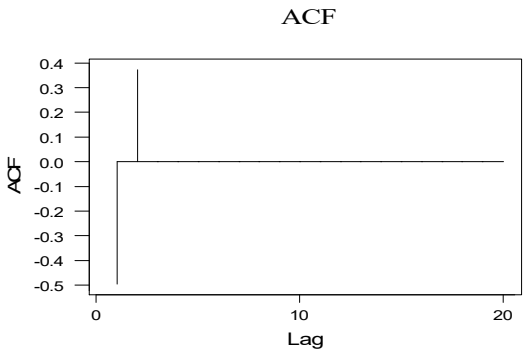
شكل (7)




شكل (8)




شكل (9)



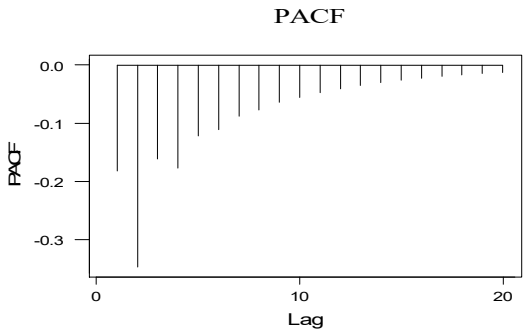
من الصعب جدا إيجاد شكل مغلق لدالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الثانية $MA(2)$ ولهذا سوف نستخدم تعريف 11 ب لحسابها ورسمها تكراريا لقيم المعالم التالية:

10- الشكل (10) $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.4$

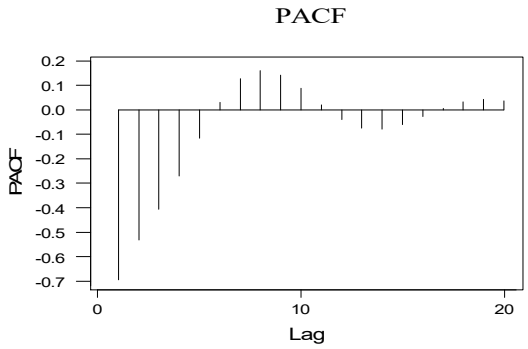
11- الشكل (11) $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = -0.8$

12- الشكل (12) $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.6$

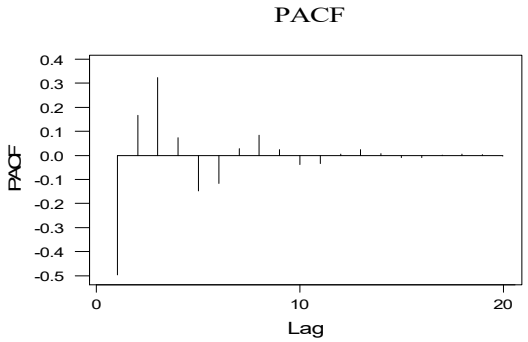
شكل (10)




شكل (11)



شكل (12)




**سادسا: نموذج المتوسط المتحرك-الإنحدار الذاتي من الدرجة ARMA(1,1) :**

ويكتب على الشكل:

$$\phi_1(B)z_t = \delta + \theta_1(B)a_t$$
$$(1-\phi_1 B)z_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$$
$$z_t - \phi_1 z_{t-1} = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$
$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}, a_t \sim WN(0,\sigma^2), \phi_1 \neq \theta_1$$

شرط الإستقرار $|\phi_1|<1$ وشرط الإنقلاب $|\theta_1|<1$ وهناك شرط آخر يسمى شرط الإمتساخ Degeneracy Condition وهو $\phi_1 \neq \theta_1$ وهذا الشرط يضمن عدم إمتساخ النموذج إلى نموذج أقل درجة ففي حالة كون $\phi_1 = \theta_1$ فمن العلاقة $(1-\phi_1 B)z_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$ وبالقسمة على $(1-\phi_1 B)$ نجد أن النموذج يصبح $z_t = \delta' + a_t$ حيث $\delta' = \frac{\delta}{1-\phi_1}$ وهو $ARMA(0,0)$

نوجد المتوسط كالتالي:

$$(1-\phi_1 B)z_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$$
$$z_t = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)}a_t$$
$$E(z_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)}E(a_t)$$

وذلك لأن $|\phi_1|<1$ وهكذا

$$E(z_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$$

أي $E(z_t)=\mu=\dfrac{\delta}{1-\phi_1}$ أو $\delta=\mu(1-\phi_1)$ وبالتعويض عن $\delta$ نجد

$$z_t=\mu(1-\phi_1)+\phi_1 z_{t-1}+a_t-\theta_1 a_{t-1}$$
$$(z_t-\mu)-\phi_1(z_{t-1}-\mu)=a_t-\theta_1 a_{t-1}$$

وبضرب طرفي المعادلة بالحد $(z_{t-k}-\mu), k=0,\pm1,\pm2,...$ وأخذ التوقع للطرفين نجد

$$E\left[(z_{t-k}-\mu)(z_t-\mu)\right]-\phi_1 E\left[(z_{t-k}-\mu)(z_{t-1}-\mu)\right]=E\left[(z_{t-k}-\mu)a_t\right]-\theta_1 E\left[(z_{t-k}-\mu)a_{t-1}\right],$$
$$k=0,\pm1,\pm2,...$$

ومنها

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=E\left[(z_{t-k}-\mu)a_t\right]-\theta_1 E\left[(z_{t-k}-\mu)a_{t-1}\right], k=0,\pm1,\pm2,...$$

وبحلها تكراريا نجد

$$k=0\quad \gamma_0-\phi_1\gamma_1=E\left[(z_t-\mu)a_t\right]-\theta_1 E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]$$

نوجد الآن كل من $E\left[(z_t-\mu)a_t\right]$ و $E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]$ بضرب العلاقة

$$(z_t-\mu)-\phi_1(z_{t-1}-\mu)=a_t-\theta_1 a_{t-1}$$

في كل من $a_t$ و $a_{t-1}$ وأخذ التوقع

$$E\left[(z_t-\mu)a_t\right]-\phi_1 E\left[(z_{t-1}-\mu)a_t\right]=E\left[a_t a_t\right]-\theta_1 E\left[a_{t-1}a_t\right]$$

ومن القاعدة 1 نجد

$$E\left[(z_t-\mu)a_t\right]-\phi_1(0)=\sigma^2-\theta_1(0)$$
$$E\left[(z_t-\mu)a_t\right]=\sigma^2$$

و

$$E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]-\phi_1 E\left[(z_{t-1}-\mu)a_{t-1}\right]=E\left[a_t a_{t-1}\right]-\theta_1 E\left[a_{t-1}a_{t-1}\right]$$
$$E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]-\phi_1\sigma^2=0-\theta_1\sigma^2$$
$$\therefore E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]=\sigma^2(\phi_1-\theta_1)$$

وبالتعويض في الصيغة السابقة نجد

$$k=0\quad \gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2-\theta_1\sigma^2(\phi_1-\theta_1)$$
$$\therefore \gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2\left[1-\theta_1(\phi_1-\theta_1)\right]$$

و

$$k=1 \quad \gamma_1-\phi_1\gamma_0=E\left[\left(z_{t-1}-\mu\right)a_t\right]-\theta_1E\left[\left(z_{t-1}-\mu\right)a_{t-1}\right]$$
$$\therefore \gamma_1-\phi_1\gamma_0=-\theta_1\sigma^2$$

و

$$k=2 \quad \gamma_2-\phi_1\gamma_1=E\left[\left(z_{t-2}-\mu\right)a_t\right]-\theta_1E\left[\left(z_{t-2}-\mu\right)a_{t-1}\right]=0$$
$$\therefore k\geq 2 \quad \gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=0$$

ومن المعادلات

$$\gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2\left[1-\theta_1\left(\phi_1-\theta_1\right)\right]$$

و

$$\gamma_1-\phi_1\gamma_0=-\theta_1\sigma^2$$

نجد

$$\gamma_0=\frac{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$
$$\gamma_1=\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$

ومن العلاقتين السابقتين نجد

$$\rho_1=\frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

ومن العلاقة

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=0, \quad k\geq 2$$

وبالقسمة على $\gamma_0$ نجد

$$\rho_k-\phi_1\rho_{k-1}=0, \quad k\geq 2$$

ويمكن حل هذه المعادلة تكراريا لجميع قيم $k\geq 2$ بإستخدام القيم الأولية $\rho_0=1$ و $\rho_1=\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$ فمثلا

$$\rho_2=\phi_1\rho_1$$
$$\rho_2=\phi_1\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$
$$\rho_3=\phi_1\rho_2$$

$$\rho_3 = \phi_1^2 \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

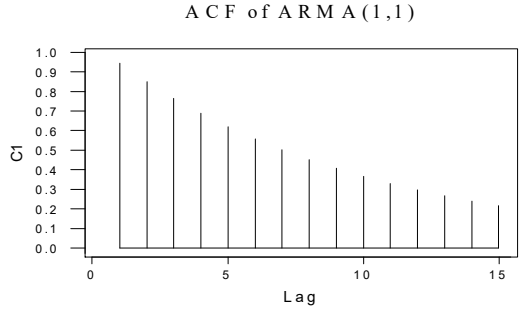
و هكذا.

نكتب دالة الترابط الذاتي لنموذج $ARMA(1,1)$ على الشكل

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}, & k=1 \\ \phi_1\rho_{k-1} & k\geq 2 \end{cases}$$

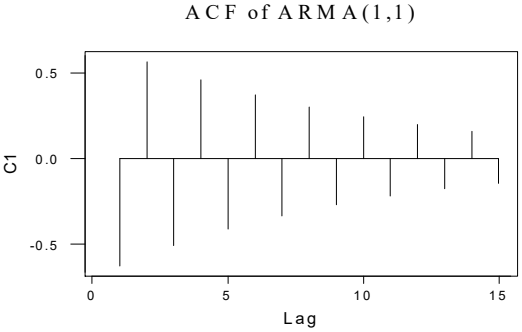
شكل 13 يعطي دالة الترابط الذاتي لقيم $\phi_1 = 0.9, \theta_1 = -0.5$

شكل(13)




شكل 14 يعطي دالة الترابط الذاتي لقيم $\phi_1 = -0.9, \theta_1 = -0.5$

شكل(14)



نلاحظ ان دالة الترابط الذاتي لنموذج $ARMA(1,1)$ تتخامد اسيا في إتجاه واحد أو متردد بين القيم الموجبة والسالبة وهي في هذا تشبه تماما دالة الترابط الذاتي لنموذج $AR(1)$ ماعدى ان التخامد يبدأ من $\rho_1$ ( برهن أن $\rho_k = \phi_1^{k-1}\rho_1, k \geq 2$ )

دالة الترابط الذاتي الجزئي $\phi_{kk}$ تحسب من تعريف 11 أو 11ب كالتالي:

من تعريف 11ب نوجد $\phi_{kk}$ تكراريا

$$\phi_{00} = 1, \textit{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \phi_{11}\rho_1}{1-\phi_{11}\rho_1}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \phi_{21}\rho_2 - \phi_{22}\rho_1}{1-\phi_{21}\rho_1-\phi_{22}\rho_2}, \quad \phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22}\phi_{11}$$

وهكذا تحسب بقية القيم تكراريا.

فمثلا للقيم $\phi_1 = 0.9, \theta_1 = -0.5$ نجد

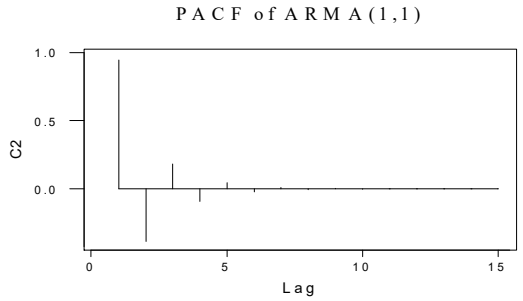
$\phi_{11} = 0.944186$ $\phi_{22} = -0.384471$ $\phi_{33} = 0.183710$

$\phi_{44} = -0.908462$ $\phi_{55} = 0.452979$ $\phi_{66} = -0.226337$

$\phi_{77} = 0.113154$ $\phi_{88} = -0.565702$ $\phi_{99} = 0.282834$

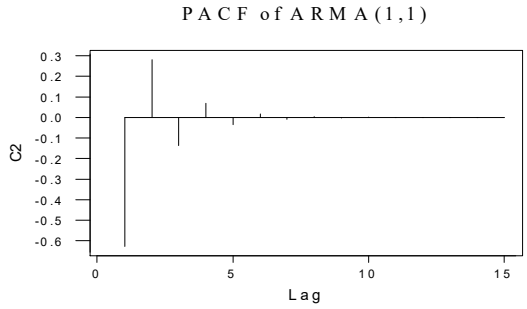
ونرسم هذه القيم في شكل 15

شكل 15




شكل 16 يبين دالة الترابط الذاتي الجزئي لقيم $\phi_1 = -0.9, \theta_1 = -0.5$

شكل 16




نلاحظ ان دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $ARMA(1,1)$ تتخامد اسيا في إتجاه واحد أو متردد بين القيم الموجبة والسالبة وهي في هذا تشبه تماما دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $MA(1)$ ماعدى ان التخامد يبدأ بعد القيمة الأولية $\phi_{11} = \rho_1$ .

## ملخص خواص نماذج ARMA(p,q) :

### أولا: نموذج AR(p)

ويتميز بالتالي:

1- دالة ترابط ذاتي تمتد لانهائيا وتتكون من خليط من التخامدات الاسية والتخامدات الجيبية.

2- دالة ترابط ذاتي جزئي تتكون من أصفار لقيم التخلفات $k > p$ أي

$$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = \cdots = \phi_{pp} \neq 0$$
$$\phi_{p+1,p+1} = \phi_{p+2,p+2} = \cdots = 0$$

ويسمى هذا قطعا في دالة الترابط الذاتي الجزئي بعد التخلف $k > p$.

### ثانيا: نموذج MA(q) :

ويتميز بالتالي:

1- دالة ترابط ذاتي تتكون من أصفار لقيم التخلفات $k > q$ أي

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_q \neq 0$$
$$\rho_{q+1,q+1} = \rho_{q+2,q+2} = \cdots = 0$$

ويسمى هذا قطعا في دالة الترابط الذاتي بعد التخلف $k > q$.

2- دالة ترابط ذاتي جزئي تمتد لانهائيا وتتكون من خليط من التخامدات الاسية والتخامدات الجيبية.

لاحظ الإزدواجية Duality بين نموذجي AR و MA.

**ثالثا: النموذج المختلط ARMA(p,q):**

ويتميز بالتالي:

دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للنموذج المختلط تمتد لانهائيا وتتكون من خليط من التخامدات الاسية والتخامدات الجيبية التي تنتهي إلى الصفر كلما زاد التخلف $k$. عندما تكون $k > q - p$ فإن دالة الترابط الذاتي تتحدد من جزء الإنحدار الذاتي للنموذج و عندما تكون $k > p - q$ فإن دالة الترابط الذاتي الجزئي تتحدد من جزء المتوسط المتحرك للنموذج.

## نماذج المتسلسلات الزمنية غير المستقرة Nonstationar Time Series Models:

### اولا: عدم الإستقرار في المتوسط:

من تعريف 6 لإستقرار متسلسلة زمنية نرى ان الشرط الأول للإستقرار $E(z_t)=\mu=\text{constant}\ \ \forall t$ يتطلب أن يكون متوسط المتسلسلة ثابت على طول الزمن، فمثلا لنموذج الإنجراف الخطي

$$z_t = b_0 + b_1 t + a_t, a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right), b_0, b_1 \in (-\infty,\infty)$$

نجد ان المتوسط هو

$$E(z)_t = b_0 + b_1 t$$

وهو غير ثابت بالنسبة للزمن، اي ان شرط الإستقرار الأول غير متحقق في هذه الحالة.

لنحاول التحويل $\nabla z_t$ وذلك بتطبيق عامل التفريق على النموذج نجد

$$\begin{aligned} w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1} &= b_0 + b_1 t + a_t - b_0 - b_1(t-1) - a_{t-1} \\ &= b_1 + a_t - a_{t-1} = b_1 + c_t \end{aligned}$$

$$\therefore w_t = b_1 + c_t, c_t \sim WN\left(0,\nu^2\right)$$

( تمرين: أوجد العلاقة بين $\nu^2$ و $\sigma^2$ )

الآن نجد متوسط المتسلسلة الجديدة $w_t$

$$E(w_t) = b_1 = \text{constant}\ \ \forall t$$

أي ان تطبيق التحويل $\nabla = (1-B)$ على المتسلسلة غير المستقرة ( أي أخذ التفريق الأول للمتسلسلة) حولها إلى متسلسلة مستقرة.

كمثال آخر نموذج الإنجراف التربيعي

$$z_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + a_t, a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right), b_0, b_1, b_2 \in (-\infty,\infty)$$

بإيجاد المتوسط

$$E(z_t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

وهو يعتمد على الزمن، أي ان النموذج غير مستقر. بأخذ التحويل $\nabla^2 z_t$ ( أخذ التفريق الثاني) نجد

$$\nabla^2 z_t = \nabla^2\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + a_t\right)$$
$$\left(1-2B+B^2\right) z_t = \left(1-2B+B^2\right)\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + a_t\right)$$
$$\begin{aligned} w_t &= \left\{b_0 - 2b_0 + b_0\right\} + \left\{b_1 t - 2b_1(t-1) + b_1(t-2)\right\} + \\ &\quad \left\{b_2 t^2 - 2b_2(t-1)^2 + b_2(t-2)^2\right\} + \\ &\quad \left\{a_t - 2a_{t-1} + a_{t-2}\right\} \\ &= 2b_2 + \left\{a_t - 2a_{t-1} + a_{t-2}\right\} \\ &= b' + h_t,\ h_t \sim WN\left(0, \tau^2\right) \end{aligned}$$

وهكذا

$$w_t = \nabla^2 z_t = b' + h_t, \quad h_t \sim WN\left(0, \tau^2\right)$$
$$E\left(w_t\right) = b' = \text{constant} \quad \forall t$$

أي ان تطبيق التحويل $\nabla^2$ (أي اخذ التفريق الثاني) على المتسلسلة غير المستقرة حولها الى مستقرة.

( تمرين: أوجد العلاقة بين $\tau^2$ و $\sigma^2$ ).

بشكل عام إذا كان النموذج غير المستقر على الشكل

$$z_t = b_0 + b_1 t + \cdots + b_d t^d + a_t,\ a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), b_0, b_1, \cdots, b_d \in (-\infty, \infty)$$

فإن التحويل $\nabla^d z_t$ يحوله إلى نموذج مستقر، أي ان $w_t = \nabla^d z_t$ هو نموذج مستقر.

**تعريف 16:**

**للمتسلسلة غير المستقرة في المتوسط**

$$z_t = b_0 + b_1 t + \cdots + b_d t^d + a_t,\ a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), b_0, b_1, \cdots, b_d \in (-\infty, \infty)$$

**التحويل $\nabla^d z_t$ وهو التفريق للدرجة $d$ للمتسلسلة يحولها إلى متسلسلة مستقرة.**

**ثانياً: عدم الإستقرار في التباين:**

من تعريف 6 لإستقرار متسلسلة زمنية، الشرط الثاني

$$V\left(z_t\right) = \gamma_0 = \text{constant} \quad \forall t$$

يتطلب أن يكون التباين ثابت لجميع قيم $t$.

فمثلا لنموذج المشي العشوائي

$$z_t = z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

نجد من التعويض المتكرر

$$z_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$$

وبإخذ التوقع والتباين

$$E\left(z_t\right) = 0 = \text{constant} \quad \forall t$$
$$V\left(z_t\right) = t\sigma^2$$

ونلاحظ أن التباين يعتمد على الزمن $t$.

بأخذ التفريق الأول

$$w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1} = a_t$$

وبإخذ التوقع والتباين

$$E\left(w_t\right) = 0 = \text{constant} \quad \forall t$$
$$V\left(w_t\right) = \sigma^2 = \text{constant} \quad \forall t$$

إذاً التفريق الأول حول المتسلسلة غير المستقرة في التباين إلى متسلسلة مستقرة.

بشكل عام لو كان التباين دالة لمستوى (متوسط) متغير على الشكل

$$V\left(z_t\right) = cf\left(\mu_t\right)$$

حيث $c > 0$ ثابت و $f(\cdot)$ دالة معروفة تعطى قيمة غير سالبة و $\mu_t$ مستوى أو متوسط يتغير مع الزمن و بالتالي فإن التباين يعتمد على الزمن وهنا نحاول إيجاد تحويل $T\left(z_t\right)$ أي إيجاد دالة $T(\cdot)$ لإستقرار التباين.

التحويل

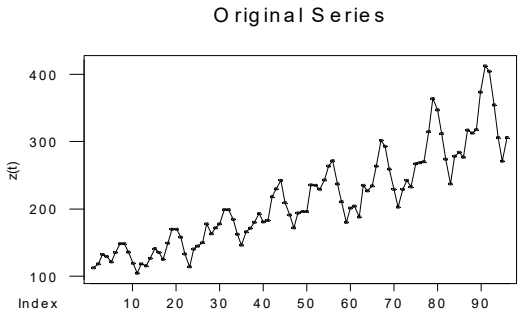
$$y_t = T\left(z_t\right) = \frac{z_t^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

يعطي متسلسلة مستقرة في التباين حيث $\lambda \in (-\infty, \infty)$ هو معلم التحويل. الجدول التالي يعطي القيم الأكثر إستخداما للمعلم $\lambda$ مع التحويلات المقابلة لها:

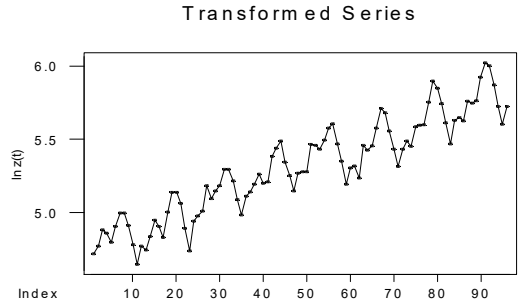
| $\lambda$ | -0.1 | -0.5 | 0.0 | 0.5 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_t$ | $\frac{1}{z_t}$ | $\frac{1}{\sqrt{z_t}}$ | $\ln z_t$ | $\sqrt{z_t}$ | $z_t$ |

**مثال:**

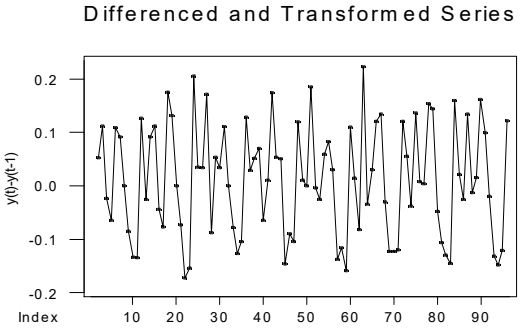
الشكل(ا) لمتسلسلة غير مستقرة في المتوسط والتباين $z_t$




الشكل(ب) المتسلسلة بعد تثبيت التباين بإجراء التحويل $y_t = \ln z_t$




الشكل(ج) المتسلسلة المحولة $y_t$ بعد إجراء التفريق الأول $\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$




لاحظ كيف اصبحت المتسلسلة مستقرة في كل من المتوسط والتباين.

**نماذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة (p,d,q) Autoregressive- Integrated-Moving Average Models ARIMA(p,d,q)**

يمكن نمذجة المتسلسلة المستقرة $w_t = \nabla^d z_t$ على شكل نموذج أنحدار ذاتي-متوسط متحرك من الدرجة $(p,q)$ كالتالي:

$$\phi_p(B) w_t = \phi_p(B) \nabla^d z_t = \delta + \theta_q(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

أو

$$\phi_p(B)(1-B)^d z_t = \delta + \theta_q(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

وهذا النموذج يسمى نموذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة $(p,d,q)$ حيث $\delta \in (-\infty, \infty)$ معلم الإنجراف.

أمثلة على نماذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة $(p,d,q)$:

**اولا: نموذج الإنحدارالذاتي-التكاملي من الدرجة (1,1) أو ARI(1,1)= ARIMA(1,1,0) :**

ويكتب على الشكل

$$\phi_1(B)(1-B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$
$$(1-\phi_1 B)(1-B) z_t = \delta + a_t$$
$$\left\{1 - (\phi_1 + 1) B + \phi_1 B^2\right\} z_t = \delta + a_t$$

أي

$$z_t = \delta + (\phi_1 + 1) z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \quad |\phi_1| < 1$$

**ثانيا: نموذج التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة (1,1)**

**أو ARIMA(0,1,1) = IMA(1,1) :**

ويكتب على الشكل

$$\phi_0(B)(1-B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$
$$(1-B) z_t = \delta + (1 - \theta_1 B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \quad |\theta_1| < 1$$
$$z_t - z_{t-1} = \delta + a_t - \theta_1 a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \quad |\theta_1| < 1$$

أي

$$z_t = \delta + z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \quad |\theta_1| < 1$$

**ثالثا: نموذج المشي العشوائي بإنجراف Random Walk with Trend Model أو ARIMA(0,1,0) :**

ويكتب على الشكل

$$\phi_0(B)(1-B)z_t = \delta + \theta_0(B)a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$
$$(1-B)z_t = \delta + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

أي

$$z_t = \delta + z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

**دالة الأوزان $\psi(B)$ وتمثيل نماذج ARMA(p,q):**

سبق أن كتبنا نماذج $ARMA(p,q)$ على الشكل

$$\phi_p(B)z_t = \delta + \theta_q(B)a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

أو بشكل الإنحراف عن المتوسط

$$\phi_p(B)(z_t - \mu) = \theta_q(B)a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

في كلتا الحالتين بالقسمة على عامل الإنحدار الذاتي $\phi_p(B)$ نجد

$$z_t = \frac{\delta}{\phi_p(1)} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$
$$z_t - \mu = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

لاحظ ان للنماذج المستقرة النسبة $\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}$ تشكل مسلسلة متقاربة وذلك لأن جذور $\phi_p(B) = 0$ تقع خارج دائرة الوحدة ايضا $\frac{\delta}{\phi_p(1)} = \mu$ ولهذا سوف نكتفي بشكل الإنحراف عن المتوسط في مناقشتنا التالية

$$z_t - \mu = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

المسلسلة المتقاربة

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}$$

والتي تكتب على الشكل

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}=\psi_0B^0+\psi_1B^1+\psi_2B^2+\psi_3B^3+\cdots,\quad \psi_0=1$$

تسمى دالة الأوزان.

**تعريف 17:**

**دالة الأوزان لنموذج** $ARMA(p,q)$ **المستقر تعطى بالعلاقة**

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}=\psi_0B^0+\psi_1B^1+\psi_2B^2+\psi_3B^3+\cdots,\quad \psi_0=1$$

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_jB^j,\quad \psi_0=1$$

**حيث الأوزان هي** $\psi_0=1,\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$

**<u>ملاحظة:</u>** النموذج الذي على الشكل $z_t-\mu=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t,\quad a_t\sim WN(0,\sigma^2)$ يسمى تمثيل المتوسط المتحرك اللانهائي لنماذج $ARMA(p,q)$ .

**<u>أمثلة لدالة الأوزان لبعض النماذج:</u>**

**<u>دالة الأوزان لنموذج AR(1) :</u>**

نموذج AR(1) يكتب على الشكل

$$\phi_1(B)(z_t-\mu)=\theta_0(B)a_t,\quad a_t\sim WN(0,\sigma^2)$$
$$(1-\phi_1B)(z_t-\mu)=a_t$$
$$z_t-\mu=\frac{1}{(1-\phi_1B)}a_t$$
$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=\frac{1}{(1-\phi_1B)}$$

سوف نوجد الأوزان $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$ بالطريقة التالية

$$\psi(B)=\frac{1}{(1-\phi_1 B)}$$
$$\psi(B)(1-\phi_1 B)\equiv 1$$
$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)(1-\phi_1 B)\equiv 1$$

لاحظ أن العلاقة الأخيرة هي علاقة تكافؤ أي ان معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة متساوية.

وبمساواة معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة نجد

$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)(1-\phi_1 B)\equiv 1,\quad |\phi_1|<1$$
$$B^0:(1)(1)\equiv 1$$
$$B^1:\psi_1-\phi_1\equiv 0\Rightarrow\quad \psi_1=\phi_1$$
$$B^2:\psi_2-\psi_1\phi_1\equiv 0\Rightarrow\quad \psi_2=\psi_1\phi_1=\phi_1^2$$
$$B^3:\psi_3-\psi_2\phi_1\equiv 0\Rightarrow\quad \psi_3=\psi_2\phi_1=\phi_1^3$$
$$\vdots$$
$$B^j:\psi_j-\psi_{j-1}\phi_1\equiv 0\Rightarrow\quad \psi_j=\psi_{j-1}\phi_1=\phi_1^j$$

أي ان الأوزان لنموذج AR(1) هي

$$\psi_j=\phi_1^j,\quad |\phi_1|<1$$

**<u>دالة الأوزان لنموذج MA(1) :</u>**

نموذج MA(1) يكتب على الشكل

$$\phi_0(B)(z_t-\mu)=\theta_1(B)a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$
$$(z_t-\mu)=(1-\theta_1 B)a_t$$
$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=(1-\theta_1 B)$$

بمساواة معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة نجد

$$\psi_1=-\theta_1,\quad \psi_2=\psi_3=\cdots=0$$

أي

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ -\theta_1, & j=1\\ 0, & j\geq 2\end{cases}$$

**دالة الأوزان لنموذج AR(2) :**

نموذج AR(2) يكتب على الشكل

$$\phi_2(B)(z_t-\mu)=\theta_0(B)a_t,\quad a_t\sim WN(0,\sigma^2)$$
$$(1-\phi_1B-\phi_2B^2)(z_t-\mu)=a_t$$
$$z_t-\mu=\frac{1}{(1-\phi_1B-\phi_2B^2)}a_t$$
$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=\frac{1}{(1-\phi_1B-\phi_2B^2)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$ بالطريقة السابقة

$$\psi(B)(1-\phi_1B-\phi_2B^2)\equiv 1$$
$$(1+\psi_1B+\psi_2B^2+\psi_3B^3+\cdots)(1-\phi_1B-\phi_2B^2)\equiv 1$$
$$B^1:\psi_1-\phi_1=0\Rightarrow\quad \psi_1=\phi_1$$
$$B^2:\psi_2-\phi_1\psi_1-\phi_2=0\Rightarrow\quad \psi_2=\phi_1\psi_1+\phi_2=\phi_1^2+\phi_2$$
$$B^3:\psi_3-\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1=0\Rightarrow\quad \psi_3=\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1$$
$$\vdots$$
$$B^j:\psi_j-\phi_1\psi_{j-1}-\phi_2\psi_{j-2}=0\Rightarrow\quad \psi_j=\phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}$$

أي ان الأوزان لنموذج AR(2) هي

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ \phi_1, & j=1\\ \phi_1^2+\phi_2, & j=2\\ \phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}, & j\geq 3\end{cases}$$

**دالة الأوزان لنموذج MA(2) :**

نموذج MA(2) يكتب على الشكل

$$\phi_0(B)(z_t-\mu)=\theta_2(B)a_t,\quad a_t\sim WN(0,\sigma^2)$$
$$(z_t-\mu)=(1-\theta_1B-\theta_2B^2)a_t$$
$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=(1-\theta_1B-\theta_2B^2)$$

بمساواة معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة نجد

$$\psi_1 = -\theta_1, \quad \psi_2 = -\theta_2, \quad \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 \cdots = 0$$

أي

$$\psi_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ -\theta_1, & j = 1 \\ -\theta_2, & j = 2 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}$$

**دالة الأوزان لنموذج ARMA(1,1) :**

نموذج ARMA(1,1) يكتب على الشكل

$$\phi_1(B)(z_t - \mu) = \theta_1(B)a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$
$$(1 - \phi_1 B)(z_t - \mu) = (1 - \theta_1 B)a_t$$
$$z_t - \mu = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)} a_t$$
$$z_t - \mu = \psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B) = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots$ بالطريقة السابقة

$$\psi(B)(1 - \phi_1 B) \equiv (1 - \theta_1 B)$$
$$\left(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots\right)(1 - \phi_1 B) \equiv (1 - \theta_1 B)$$
$$B^1 : \psi_1 - \phi_1 = -\theta_1 \Rightarrow \quad \psi_1 = \phi_1 - \theta_1$$
$$B^2 : \psi_2 - \phi_1\psi_1 = 0 \Rightarrow \quad \psi_2 = \phi_1\psi_1 = \phi_1(\phi_1 - \theta_1)$$
$$B^3 : \psi_3 - \phi_1\psi_2 = 0 \Rightarrow \quad \psi_3 = \phi_1\psi_2 = \phi_1^2(\phi_1 - \theta_1)$$
$$\vdots$$
$$B^j : \psi_j - \phi_1\psi_{j-1} = 0 \Rightarrow \quad \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1)$$

أي ان الأوزان لنموذج ARMA(1,1) هي

$$\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), \quad j \geq 1, \quad |\phi_1| < 1, \quad \phi_1 \neq \theta_1$$

**دالة الأوزان لنموذج ARI(1) :**

نموذج ARI(1) يكتب على الشكل

$$\phi_1(B)(1-B)(z_t-\mu)=a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

$$z_t-\mu=\frac{1}{(1-\phi_1 B)(1-B)}a_t$$

$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=\frac{1}{(1-\phi_1 B)(1-B)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$ بالطريقة السابقة

$$\psi(B)(1-\phi_1 B)(1-B)\equiv 1$$

$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)(1-\phi_1 B)(1-B)\equiv 1$$

$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)\left(1-(\phi_1+1)B+\phi_1 B^2\right)\equiv 1$$

$$B^1:\psi_1-(\phi_1+1)=0\Rightarrow\quad \psi_1=\phi_1+1$$

$$B^2:\psi_2-(\phi_1+1)\psi_1+\phi_1=0\Rightarrow\quad \psi_2=(\phi_1+1)\psi_1+\phi_1=(\phi_1+1)^2+\phi_1$$

$$B^3:\psi_3-(\phi_1+1)\psi_2+\phi_1\psi_1=0\Rightarrow\quad \psi_3=(\phi_1+1)\psi_2-\phi_1\psi_1$$

$$\vdots$$

$$B^j:\psi_j-(\phi_1+1)\psi_{j-1}+\phi_1\psi_{j-2}=0\Rightarrow\quad \psi_j=(\phi_1+1)\psi_{j-1}-\phi_1\psi_{j-2}$$

أي ان الأوزان لنموذج ARI(1) هي

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ \phi_1+1, & j=1\\ (\phi_1+1)^2+\phi_1, & j=2\\ (\phi_1+1)\psi_{j-1}-\phi_1\psi_{j-2}, & j\geq 3\end{cases}$$

وأخيرا نوجد

**دالة الأوزان لنموذج المشي العشوائي Random Walk Mdel أو ARIMA(1,0,1)**

ويكتب على الشكل

$$z_t=z_{t-1}+a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

أي

$$z_t - z_{t-1} = a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$
$$\left(1-B\right)z_t = a_t$$
$$z_t = \frac{1}{\left(1-B\right)}a_t$$

حيث

$$\psi\left(B\right) = \frac{1}{\left(1-B\right)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$ بالطريقة السابقة

$$\psi\left(B\right)\left(1-B\right) \equiv 1$$
$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)\left(1-B\right) \equiv 1$$
$$B^1 : \psi_1 - 1 = 0 \Rightarrow \quad \psi_1 = 1$$
$$B^2 : \psi_2 - \psi_1 = 0 \Rightarrow \quad \psi_2 = \psi_1 = 1$$
$$B^3 : \psi_3 - \psi_2 = 0 \Rightarrow \quad \psi_3 = \psi_2 = 1$$
$$\vdots$$
$$B^j : \psi_j - \psi_{j-1} = 0 \Rightarrow \quad \psi_j = \psi_{j-1} = 1$$

أي ان الأوزان لنموذج المشي العشوائي $ARIMA(0,1,0)$ هي

$$\psi_j = 1, \quad j \geq 1$$

**<u>بعض خواص دالة الأوزان</u>** $\psi\left(B\right)$ :

سبق أن كتبنا نموذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(p,q) على الشكل

$$z_t - \mu = \psi\left(B\right)a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

وبكتابة هذه العلاقه على الشكل

$$z_t - \mu = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \cdots$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1$$

وإذا افترضنا ان الأوزان تتقارب اي $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty$ فإنه يمكن إثبات النظرية التالية:

**نظرية 1:**

**لنموذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(p,q) المستقر والذي يكتب على الشكل**

$$z_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

**1- المتوسط هو**

$$E\left(z_t\right) = \mu, \quad \forall t$$

**2- دالة الترابط الذاتي تعطى بالعلاقة**

$$\rho_k = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

**مثال:** لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة AR(1) وجدنا سابقا دالة الأوزان

$$\psi_j = \phi_1^j, \quad |\phi_1| < 1$$

دالة الترابط الذاتي

$$\rho_k = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \phi_1^{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j}} = \frac{\frac{\phi_1^k}{1-\phi_1^2}}{\frac{1}{1-\phi_1^2}} = \phi_1^k, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

وهي نفس النتيجة السابقة

**تمرين:** بأستخدام نظرية 2 (2) أوجد دوال الترابط الذاتي للنماذج التالية

AR(2), MA(1), MA(2), ARMA(1,1), ARMA(2,1), ARMA(1,2)

# الفصل الرابع

## التنبؤات ذات متوسط مربع الخطأ الأدنى لنماذج *ARMA(p,q)*

## Minimum Mean Square Error Forecasts for *ARMA(p,q)* Models

في الفقرة السابقة كتبنا نموذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(p,q) المستقر على الشكل

$$z_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

أو

$$\begin{aligned} z_t - \mu &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1 \end{aligned}$$

**ملاحظة:** هذا ينطبق أيضا على نماذج ARIMA(p,d,q) بشكل عام.

لمتسلسلة زمنية مشاهدة $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$ التنبؤات $z_n(\ell), \ell \geq 1$ للقيم المستقبلية $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$ يمكن ان تكتب على الشكل

$$z_n(\ell) = \xi_0 a_n + \xi_1 a_{n-1} + \xi_2 a_{n-2} + \cdots, \ell \geq 1$$

القيم المستقبلية $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$ تكتب بدلالة النموذج كالتالي

$$z_{n+\ell} - \mu = a_{n+\ell} + \psi_1 a_{n+\ell-1} + \cdots + \psi_{\ell-1} a_{n+1} + \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \cdots, \ell \geq 1$$

متوسط مربع الخطأ يعطى بالعلاقة (أنظر تعريف 5 )

$$\begin{aligned} E\left[z_{n+\ell} - z_n(\ell)\right]^2 &= E\left[a_{n+\ell} + \psi_1 a_{n+\ell-1} + \cdots + \psi_{\ell-1} a_{n+1} + \left(\psi_\ell - \xi_0\right) a_n + \left(\psi_{\ell+1} - \xi_1\right) a_{n-1} + \cdots\right]^2 \\ &= \left(1 + \psi_1^2 + \cdots + \psi_{\ell-1}^2\right)\sigma^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\psi_{\ell+j} - \xi_j\right)^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

متوسط مربع الخطأ الأدنى ينتج من تصغير العلاقة السابقة بالنسبة للأوزان $\xi_j$ لجميع قيم $j$ وهذا يمكن إذا وفقط إذا حققت الأوزان $\xi_j$ العلاقة التالية

$$\xi_j = \psi_{\ell+j}, \quad j = 0,1,2,\cdots, \ell \geq 1$$

وعليه فإن التنبؤات ذات متوسط مربع الخطأ الأدنى MMSE Forecasts تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell) = \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \psi_{\ell+2} a_{n-2} + \cdots, \ell \geq 1$$

**نظرية 2:**

**أخطاء التنبؤ تعطى بالعلاقة:**

$$e_n(\ell) = z_{n+\ell} - z_n(\ell) = a_{n+\ell} + \psi_1 a_{n+\ell-1} + \psi_2 a_{n+\ell-2} + \cdots + \psi_{\ell-1} a_{n+1},\ \ell \geq 1$$

**وتباين أخطاء التنبؤ تعطى بالعلاقة:**

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2\left(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots + \psi_{\ell-1}^2\right),\ \ell \geq 1$$

الصيغة $z_n(\ell) = \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \psi_{\ell+2} a_{n-2} + \cdots,\ \ell \geq 1$ غير عملية لإيجاد التنبؤات للقيم المستقبلية $z_{n+\ell},\ \ell \geq 1$ وذلك لأننا نحتاج إلى معرفة القيم $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$.

**تعريف 18 :**

**مجموعة المعلومات** $I\left(\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}\right)$ **تكافئ مجموعة المعلومات** $I\left(\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}\right)$ **وذلك بالمعنى أن المجموعة** $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$ **تحتوى على نفس المعلومات عن المتسلسلة الزمنية** $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$.

**<u>ملاحظة:</u>** المتسلسة الزمنية $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$ يمكن مشاهدتها وقياسها ولكن المتلسلة $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$ لايمكن مشاهدتها أو قياسها.

**نظرية 3 :**

**المتنبئ ذا متوسط مربع الخطأ الأدنى MMSE Forecasts يعطى بالعلاقة**

$$z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right),\quad \ell \geq 1$$

**أي هو التوقع الشرطي للقيمة المستقبلية** $z_{n+\ell},\ \ell \geq 1$ **معطى** $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$.

تستخدم نظرية 2 عمليا لإيجاد قيم التنبؤات بدلا من الصيغة

$$z_n(\ell) = \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \psi_{\ell+2} a_{n-2} + \cdots,\ \ell \geq 1$$

وذلك تبعا للملاحظة السابقة.

**قاعدة 2:**

$$1-E\left(a_{n+j}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)=\begin{cases}a_{n+j}, & j\le 0\\ 0, & j>0\end{cases}$$

$$2-E\left(z_{n+j}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)=\begin{cases}z_{n+j}, & j\le 0\\ z_n(j), & j>0\end{cases}$$

نظرية 3 مع القاعدة 2 تعطي طريقة عملية وسهلة لإيجاد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{n+\ell},\quad \ell\ge 1$

**تعريف 19:**

**الدالة $z_n(\ell),\ell\ge 1$ كدالة لزمن التقدم $\ell\ge 1$ عند نقطة الاصل للزمن $n$ تسمى دالة التنبؤ.**

## دوال التنبؤ لنماذج *ARIMA(p,d,q)* :

### *اولا: دالة التنبؤ لنموذج AR(1) :*

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج AR(1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t-\mu=\phi_1(z_{t-1}-\mu)+a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right),|\phi_1|<1,\mu\in(-\infty,\infty)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1},z_{n+2},z_{n+3},\cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell},\quad \ell\ge 1$ .

من نظرية 3 نجد

$$\begin{aligned}z_n(\ell)&=E\left(z_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\ge 1\\ &=\mu+E\left[\left[\phi_1(z_{n+\ell-1}-\mu)+a_{n+\ell}\right]\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1\\ &=\mu+E\left[\phi_1(z_{n+\ell-1}-\mu)\middle|z_n,z_{n-1},\cdots+a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1\\ &=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1\end{aligned}$$

أي

$$z_n(\ell) = \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right], \quad \ell \geq 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$\begin{aligned}
\ell = 1 : z_n(1) &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_n \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right] \\
&= \mu + \phi_1 (z_n - \mu) \\
\ell = 2 : z_n(2) &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+2} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right] \\
&= \mu + \phi_1 \left[z_n(1) - \mu\right] \\
\ell = 3 : z_n(3) &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_{n+2} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+3} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right] \\
&= \mu + \phi_1 \left[z_n(2) - \mu\right]
\end{aligned}$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell) = \mu + \phi_1 \left[z_n(\ell - 1) - \mu\right], \ell \geq 1$$

وهي دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج AR(1)

**تعريف 20:**

**شرط الإستمرار Continuity Condition يتطلب أنه عندما تكون $\ell = 1$ فإن**

$$z_n(\ell - 1) = z_n(0) = z_n$$

من نظرية 2 تباين أخطاء التنبؤ تعطى من العلاقة

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2 \left(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots + \psi_{\ell-1}^2\right), \ell \geq 1$$

سبق أن اشتققنا دالة الأوزان لنموذج AR(1) وهي

$$\psi_j = \phi_1^j, \quad |\phi_1| < 1$$

وبالتعويض في صيغة التباين نجد

$$\begin{aligned}
V\left[e_n(\ell)\right] &= \sigma^2 \left(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \cdots + \phi_1^{2(\ell-1)}\right), \ell \geq 1 \\
&= \sigma^2 \frac{1 - \phi_1^{2\ell}}{1 - \phi_1^2}, \ell \geq 1
\end{aligned}$$

**مثال:** متسلسلة زمنية مشاهده وجد انها تتبع النموذج

$$z_t - 0.97 = 0.85\left(z_{t-1} - 0.97\right) + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, 0.024\right)$$

إذا كانت المشاهدة الأخيرة هي $z_{156}=0.49$ ، أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{157},z_{158},z_{159}$ وأوجد أخطاء التنبؤ لها.

**الحل:** من الصيغة $z_n(\ell)=\mu+\phi_1\left[z_n(\ell-1)-\mu\right],\ \ell\geq 1$ نجد

$$\begin{aligned}
z_{156}(1) &= 0.97+0.85\left(z_{156}-0.97\right)\\
&= 0.97+0.85\left(0.49-0.97\right)=0.56\\
z_{156}(2) &= 0.97+0.85\left(z_{156}(1)-0.97\right)\\
&= 0.97+0.85\left(0.56-0.97\right)=0.62\\
z_{156}(3) &= 0.97+0.85\left(z_{156}(2)-0.97\right)\\
&= 0.97+0.85\left(0.62-0.97\right)=0.68
\end{aligned}$$

والتباينات

$$V\left[e_n(\ell)\right]=\sigma^2\frac{1-\phi_1^{2\ell}}{1-\phi_1^2},\ \ell\geq 1$$

$$V\left[e_{156}(1)\right]=0.024$$

$$V\left[e_{156}(2)\right]=0.024\frac{1-(0.85)^4}{1-(0.85)^2}=0.041$$

$$V\left[e_{156}(2)\right]=0.024\frac{1-(0.85)^6}{1-(0.85)^2}=0.054$$

## ***ثانيا: دالة التنبؤ لنموذج AR(2) :***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج AR(2) والذي يكتب على الشكل

$$z_t=\mu+\phi_1\left(z_{t-1}-\mu\right)+\phi_2\left(z_{t-2}-\mu\right)+a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right),\ \mu\in(-\infty,\infty),$$
$$\phi_2-\phi_1<1,\quad \phi_2+\phi_1<1,\quad |\phi_2|<1$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1},z_{n+2},z_{n+3},\cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell},\quad \ell\geq 1$.

من نظرية 3 نجد

$$\begin{aligned}
z_n(\ell) &= E\left(z_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\geq 1\\
&= \mu+E\left[\left[\phi_1\left(z_{n+\ell-1}-\mu\right)+\phi_2\left(z_{n+\ell-2}-\mu\right)+a_{n+\ell}\right]\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\geq 1
\end{aligned}$$

$$=\mu+E\left[\phi_1\left(z_{n+\ell-1}-\mu\right)\middle|z_n,z_{n-1},\cdots+\phi_2\left(z_{n+\ell-2}-\mu\right)\middle|z_n,z_{n-1},\cdots+a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\geq 1$$
$$=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\geq 1$$

أي

$$z_n(\ell)=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\geq 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$\ell=1: z_n(1)=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_n\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]$$
$$=\mu+\phi_1\left(z_n-\mu\right)+\phi_2\left(z_{n-1}-\mu\right)$$
$$\ell=2: z_n(2)=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_n\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]$$
$$=\mu+\phi_1\left[z_n(1)-\mu\right]+\phi_2\left(z_n-\mu\right)$$
$$\ell=3: z_n(3)=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+3}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]$$
$$=\mu+\phi_1\left[z_n(2)-\mu\right]+\phi_2\left[z_n(1)-\mu\right]$$
$$\ell=4: z_n(4)=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+3}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+4}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]$$
$$=\mu+\phi_1\left[z_n(3)-\mu\right]+\phi_2\left[z_n(2)-\mu\right]$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell)=\mu+\phi_1\left[z_n(\ell-1)-\mu\right]+\phi_2\left[z_n(\ell-2)-\mu\right],\ \ell\geq 1$$

وهي دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج AR(2)

ويمكن حساب تباينات أخطاء التنبؤ من نظرية 2 ودالة الأوزان

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ \phi_1, & j=1\\ \phi_1^2+\phi_2, & j=2\\ \phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}, & j\geq 3\end{cases}$$

***<u>ثالثا: دالة التنبؤ لنموذج ARIMA(0,1,1) :</u>***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج ARIMA(0,1,1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t=z_{t-1}+a_t-\theta_1 a_{t-1},\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, \ldots$ أو بشكل عام $\ell \geq 1$ , $z_{n+\ell}$.

من نظرية 3 نجد

$$z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1$$
$$= E\left(z_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1$$
$$\ell = 1: \quad z_n(1) = E\left(z_n \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_n \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right)$$
$$= z_n - \theta_1 a_n$$
$$\ell = 2: \quad z_n(2) = E\left(z_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+2} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right)$$
$$= z_n(1)$$
$$\ell = 3: \quad z_n(3) = E\left(z_{n+2} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+3} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right)$$
$$= z_n(2)$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell) = z_n(\ell - 1), \quad \ell \geq 2$$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج ARIMA(0,1,1) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell) = \begin{cases} z_n - \theta_1 a_n, & \ell = 1 \\ z_n(\ell - 1), & \ell > 1 \end{cases}$$

## ***رابعا : دالة التنبؤ لنموذج MA(1) :***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج MA(1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, \ldots$ أو بشكل عام $\ell \geq 1$ , $z_{n+\ell}$.

من نظرية 3 نجد

$$z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1$$
$$= \mu + E\left(a_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$z_n(\ell)=\mu+E\left(a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\geq 1$$

$$\ell=1:\quad z_n(1)=\mu+E\left(a_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_n\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)$$
$$=\mu-\theta_1a_n$$

$$\ell=2:\quad z_n(2)=\mu+E\left(a_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)$$
$$=\mu$$

$$\ell=3:\quad z_n(3)=\mu+E\left(a_{n+3}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)$$
$$=\mu$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell)=\mu,\quad \ell\geq 2$$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج MA(1) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell)=\begin{cases}\mu-\theta_1a_n, & \ell=1\\ \mu, & \ell\geq 2\end{cases}$$

## ***خامسا : دالة التنبؤ لنموذج MA(2) :***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج MA(2) والذي يكتب على الشكل

$$z_t=\mu+a_t-\theta_1a_{t-1}-\theta_2a_{t-2},\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1},z_{n+2},z_{n+3},\cdots$ أو بشكل عام $\ell\geq 1$ ، $z_{n+\ell}$.

من نظرية 3 نجد

$$z_n(\ell)=E\left(z_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\geq 1$$
$$=\mu+E\left(a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2E\left(a_{n+\ell-2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\geq 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$z_n(\ell)=\mu+E\left(a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2E\left(a_{n+\ell-2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\geq 1$$

$$\ell=1:\quad z_n(1)=\mu+E\left(a_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_n\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2E\left(a_{n-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)$$
$$=\mu-\theta_1a_n-\theta_2a_{n-1}$$

$$\ell=2:\quad z_n(2)=\mu+E\left(a_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2E\left(a_n\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)$$
$$=\mu-\theta_2a_n$$

$$\ell=3:\quad z_n(3)=\mu+E\left(a_{n+3}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1E\left(a_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2E\left(a_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)$$
$$=\mu$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell)=\mu,\quad \ell\geq 3$$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج MA(2) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell)=\begin{cases}\mu-\theta_1 a_n-\theta_2 a_{n-1}, & \ell=1\\ \mu-\theta_2 a_n, & \ell=2\\ \mu, & \ell\geq 3\end{cases}$$

## ***سادسا : دالة التنبؤ لنموذج ARMA(1,1) :***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج ARMA(1,1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t=\mu+\phi_1(z_{t-1}-\mu)+a_t-\theta_1 a_{t-1},\quad a_t\sim WN(0,\sigma^2),\phi_1\neq\theta_1,|\phi_1|<1$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1},z_{n+2},z_{n+3},\cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell},\quad \ell\geq 1$.

من نظرية 3 نجد

$$z_n(\ell)=E(z_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots),\quad \ell\geq 1$$
$$=\mu+\phi_1 E\left[(z_{n+\ell-1}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots\right]+E(a_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+\ell-1}|z_n,z_{n-1},\cdots),\quad \ell\geq 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$z_n(\ell)=\mu+\phi_1 E\left[(z_{n+\ell-1}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots\right]+E(a_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+\ell-1}|z_n,z_{n-1},\cdots),\quad \ell\geq 1$$

$$\ell=1:\quad z_n(1)=\mu+\phi_1 E\left[(z_n-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots\right]+E(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_n|z_n,z_{n-1},\cdots)$$
$$=\mu+\phi_1(z_n-\mu)-\theta_1 a_n$$

$$\ell=2:\quad z_n(2)=\mu+\phi_1 E\left[(z_{n+1}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots\right]+E(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots)$$
$$=\mu+\phi_1\left[z_n(1)-\mu\right]$$

$$\ell=3:\quad z_n(3)=\mu+\phi_1 E\left[(z_{n+2}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots\right]+E(a_{n+3}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots)$$
$$=\mu+\phi_1\left[z_n(2)-\mu\right]$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell)=\mu+\phi_1\left[z_n(\ell-1)-\mu\right],\quad \ell\geq 2$$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج ARMA(1,1) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell)=\begin{cases}\mu+\phi_1(z_n-\mu)-\theta_1 a_n, & \ell=1\\ \mu+\phi_1\left[z_n(\ell-1)-\mu\right], & \ell\geq 2\end{cases}$$

**تمرين:**

لنموذج ARMA(1,1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t = \mu + \phi_1 (z_{t-1} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2), \phi_1 \neq \theta_1, |\phi_1| < 1$$

برهن ان عندما تؤول $\phi_1 \to 1$ فإن $\text{ARMA}(1,1) \to \text{IMA}(1,1)$ ومن ثم أوجد دالة التنبؤ لنموذج IMA(1,1) .

**تمرين:**

أوجد دوال التنبؤ وتباين أخطاء التنبؤ لكل من النماذج التالية:

ARIMA(1,1,1), ARIMA(2,1,0), ARIMA(0,1,2), ARIMA(1,2,0), ARIMA(0,2,1), ARIMA(0,2,0).

**حدود التنبؤ Forecasting Limits :**

دالة التنبؤ $z_n(\ell), \ell \geq 1$ عند قيمة معينة تعطي مايسمى بتنبؤ النقطة Point Forecast والذي لايكفي او يفيد في إتخاذ قرارات إحصائية عن الظاهرة العشوائية المدروسة لأن

$$P(Z_{n+m} = z_n(m)) = 0, \text{ for some } m > 0$$

أي أن مقدار تأكدنا ( أو إحتمال) من أن القيمة المستقبلية المراد التنبؤ عنها تساوي القيمة المعطاة من دالة التنبؤ تساوي الصفر أي اننا غير متأكدين إطلاقا وبالتالي لافائدة من التنبؤ.

للتغلب على ذلك وألإستفادة من التنبؤات نستخدم مايسمى بتنبؤ الفترة Interval Forecast وهي عبارة عن فترة مثل $[a,b]$ على خط الأعداد الحقيقية بحيث يكون

$$P(a \leq Z_{n+m} \leq b) = (1-\alpha)$$

وبهذا نستطيع أن نحدد درجة تأكدنا من أن القيمة المستقبلية المراد التنبؤ عنها تقع بين القيم $a$ و $b$ بدرجة تأكد أو إحتمال $1-\alpha$ ( أو $100 \times (1-\alpha)\%$ ) فمثلا لو كانت $\alpha = 0.05$ فإننا نكون متأكدين وبإحتمال 95% ان القيمة المستقبلية تقع بين القيم $a$ و $b$ .

**تعريف 21:**

**على إفتراض أن** $a_t \sim N(0, \sigma^2)$ **فإن حدود** $100 \times (1-\alpha)\%$ **فترة تنبؤ للقيمة المستقبلية** $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$ **تعطى بالعلاقة**

$$z_n(\ell) \pm u_{\alpha/2} \left\{ V\left[e_n(\ell)\right] \right\}^{1/2}$$

**حيث** $u_{\alpha/2}$ **المئين** $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ **للتوزيع** $N(0,1)$ .

فمثلا عندما $\alpha = 0.05$ فإن $u_{0.025} = 1.96$ .

**ملاحظة:** في التعريف إفترضنا أن متسلسلة الضجة البيضاء $a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ وهذا ممكن إعتمادا على نظرية نهاية مركزية.

**مثال:** متسلسلة زمنية مشاهده وجد انها تتبع النموذج

$$z_t - 0.97 = 0.85\left(z_{t-1} - 0.97\right) + a_t, \quad a_t \sim N\left(0, 0.024\right)$$

إذا كانت المشاهدة الأخيرة هي $z_{156} = 0.49$ ، أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{157}, z_{158}, z_{159}$ وأوجد أخطاء التنبؤ لها ومن ثم أوجد فترات تنبؤ 95% للقيم المستقبلية.

**الحل:** سبق أن حسبنا في مثال سابق التنبؤات و أخطاء التنبؤ كالتالي:

التنبؤات

$$z_{156}\left(1\right) = 0.56,\ z_{156}\left(2\right) = 0.62,\ z_{156}\left(3\right) = 0.68$$

والتباينات

$$V\left[e_{156}\left(1\right)\right] = 0.024, V\left[e_{156}\left(2\right)\right] = 0.041, V\left[e_{156}\left(2\right)\right] = 0.054$$

فترات تنبؤ 95% للقيم المستقبلية $z_{157}, z_{158}, z_{159}$ نوجدها من صيغة تعريف 21

$$z_n\left(\ell\right) \pm u_{\alpha/2}\left\{V\left[e_n\left(\ell\right)\right]\right\}^{1/2}$$

$$1 - z_{156}\left(1\right) \pm u_{0.025}\left\{V\left[e_{156}\left(1\right)\right]\right\}^{1/2} = 0.56 \pm 1.96\sqrt{0.024} = 0.56 \pm 0.304$$

$$2 - z_{156}\left(2\right) \pm u_{0.025}\left\{V\left[e_{156}\left(2\right)\right]\right\}^{1/2} = 0.62 \pm 1.96\sqrt{0.041} = 0.62 \pm 0.397$$

$$3 - z_{156}\left(3\right) \pm u_{0.025}\left\{V\left[e_{156}\left(3\right)\right]\right\}^{1/2} = 0.68 \pm 1.96\sqrt{0.054} = 0.68 \pm 0.455$$

أي أن $z_{157} \in \left(0.256, 0.864\right)$ بإحتمال 0.95 و وكذلك $z_{158} \in \left(0.223, 1.017\right)$ و كذلك أيضا $z_{159} \in \left(0.225, 1.135\right)$ .

**تصميم وبناء نظام تنبؤ إحصائي Designing and Building Statistical Forecasting System :**

سبق أن ذكرنا ان الخطوة الأولى لتصميم نظام تنبؤ هي بناء نموذج .إن عملية بناء نموذج إحصائي هي عملية تكرارية Iterative تتكون من تحديد النموذج ، تقدير النموذج (ونقصد بها تقدير معالم النموذج) و إختبار النموذج.

**تعيين أو تحديد النموذج Model Identification (Specification) :**

في مرحلة تحديد النموذج نستخدم البيانات أو المشاهدات السابقة ( التاريخ) واي معلومات اخرى عن الكيفية التي تولدت بها المتسلسلة وذلك لإقتراح مجموعة من النماذج المناسبة. ويتم تعيين أو تحديد النموذج حسب الخطوات العريضة التالية:

**الخطوة الاولى: تحويل تثبيت التباين Variance-stabilizing Transformation :**

بعد رسم المتسلسلة في مخطط زمني Time Plot وإجراء بعض الإختبارات الإحصائية لمعرفة فيما إذا كان التباين ثابت، وفي حالة عدم ثبات التباين او إذا كان التباين يتغير مع مستوى المتسلسلة فإننا نطبق التحويل اللوغارتمي على المتسلسلة ونفحصها من جديد فإذا تم تثبيت التباين وإلا نلجأ إلي تطبيق أحد التحويلات التي ذكرناها في جدول صفحة 41.

**الخطوة الثانية: إختيار درجة التفريق $d$ :**

إذا كانت المتلسلسة أو تحويلها غير مستقرة في المتوسط فيجب علينا تحديد درجة التفريق $d$ التي تجعل الممتلسلسة أو تحويلها مستقرة في المتوسط ونقوم بأخذ التفريق الأول ثم نفحص التالي:

1- المخططات الزمنية للممتلسلسة أو تحويلها.

2- مخططات دالتي الترابط الذاتي العيني والترابط الذاتي الجزئي العيني SACF و SPACF .

3- إجراء تفريق آخر إذا احتاج الأمر وإعادة الخطوات 1 و 2 السابقتين.

المخططات الزمنية للمتسلسلات غير المستقرة تبين تغير في المستوى ودالة ترابط ذاتي عيني متخامدة ببطء كما ان دالة الترابط الذاتي الجزئي العيني تعطي قيمة واحدة قريبة من الواحد الصحيح (بغض النظر عن الإشارة) وبقية القيم قريبة جدا من الصفر.

ملاحظة: درجة التفريق $d$ غالبا ما تكون 0 او 1 او 2 .

**الخطوة الثالثة: تحديد $p$ و $q$ :**

بعد ان نحصل على متسلسلة مستقرة في كل من التباين والمتوسط نقوم بتحديد درجة الإنحدار الذاتي $p$ ودرجة المتوسط المتحرك $q$ وذلك بمقارنة أنماط دالتي الترابط الذاتي العيني والترابط الذاتي الجزئي العيني مع الأنماط النظرية لدالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي مسترشدين بخواص نماذج *ARMA(p,q)* المذكورة في صفحة 38 والجدول التالي يعطي هذه الخواص لبعض النماذج الشائعة:

| النموذج | ACF | PACF |
|---|---|---|
| $(1,d,0)$ و $AR(1)$ | تخامد اسي أواسي متردد | $\phi_{kk}=0, k>1$ |
| $(2,d,0)$ و $AR(2)$ | تخامد اسي او تخامد جيبي | $\phi_{kk}=0, k>2$ |
| $(p,d,0)$ و $AR(p)$ | تخامد اسي و/ او تخامد جيبي | $\phi_{kk}=0, k>p$ |
| $(0,d,1)$ و $MA(1)$ | $\rho_k=0, k>1$ | يسيطر عليها تخامد اسي |
| $(0,d,2)$ و $MA(2)$ | $\rho_k=0, k>2$ | يسيطر عليها تخامد اسي او جيبي |
| $(0,d,q)$ و $MA(q)$ | $\rho_k=0, k>q$ | يسيطر عليها تخامد اسي و/ او جيبي |
| $(1,d,1)$ و $ARMA(1,1)$ | تتناقص وتتخامد اسيا من التخلف 1 | تتناقص ويسيطر عليها تخامد اسي من التخلف 1 |
| $(p,d,q)$ و $ARMA(p,q)$ | تتناقص بعد التخلف $p-q$ وتتخامد اسيا و / او جيبيا بعد التخلف $q-p$ | تتناقص بعد التخلف $p-q$ ويسيطر عليها تخامد اسي و/او جيبي بعد التخلف $p-q$ |

**الخطوة الرابعة: إضافة معلم إنجراف:**

إذا كانت المتسلسة تحتاج إلى تفريق فيجب علينا التأكد فيما إذا كان علينا إضافة إنجراف معلوم $\delta$ إلى النموذج وهذا يتم بمقارنة متوسط العينة $\bar{w}$ للمتسلسلة المفرقة المستقرة مع الخطأ المعياري لهذا المتوسط

$$s.e(\bar{w}) \cong \left[\frac{c_0}{n}\left(1+2r_1+2r_2+\cdots+2r_K\right)\right]^{1/2}$$

حيث $c_0 = \hat{\gamma}_0$ و $r_1,\cdots,r_K$ هي الترابطات الذاتية العينية المعنوية للدرجة $K$ . ويكون الإختبار

$H_0 : \delta = 0$
$H_1 : \delta \pm 0$

ونرفض $H_0$ عند $\alpha = 0.05$ إذاكانت $\left|\frac{\overline{w}}{s.e(\overline{w})}\right| > 1.96$ .

## تقدير النموذج Model Estimation :

بعد تحديد شكل النموذج لابد من تقدير معالم النموذج $\delta$ و $\phi_1,\ldots,\phi_p$ و $\theta_1,\ldots,\theta_q$ و $\sigma^2$ وذلك بإستخدام البيانات التاريخية المتوفرة لدينا.

لنفترض ان لدينا المتسلسلة الزمنية المشاهدة $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n$ والنموذج المقترح

$$\phi_p(B) w_t = \delta + \theta_q(B) a_t, a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

أو

$$\phi_p(B) z_t = \delta + \theta_q(B) a_t, a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

حيث $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ لايوجد بينها جذور مشتركة وجذور المعادلة $\phi_p(B) = 0$ تقع جميعها خارج دائرة الوحدة ( شرط الإستقرار).

هناك طرق كثيرة لتقدير المعالم سنذكر منها هنا فقط طريقتين تدخل ضمن نطاق هذا المقرر وهما طريقة العزوم وطريقة المربعات الدنيا الشرطية.

### أولا: طريقة العزوم The Method of Moments :

وتعتمد على مساوات عزوم العينة مثل متوسط العينة $\bar{z}$ والترابطات الذاتية للعينة $r_k$ بالعزوم النظرية مثل المتوسط $\mu$ ودالة الترابط الذاتي $\rho_k$ وحل المعادلات الناتجة بالنسبة للمعالم المراد تقديرها.

سوف نستعرض الطريقة للنموذج AR($p$) كالتالي:

1- يقدر المتوسط $\mu$ بالمقدر $\bar{z}$ اي $\hat{\mu} = \bar{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i / n$

2- لتقدير $\phi_1,\ldots,\phi_p$ نستخدم العلاقة:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}, k > 1$$

والتي تنتج من ضرب المعادلة المعرفة لنموذج AR($p$) بالحد $z_{t-k} - \mu$ وأخذ التوقع. في المعادلة السابقة بوضع $k = 1,2,\ldots,p$ نحصل على نظام المعادلات المسمى معادلات يول و ووكر Yule-Walker التالي:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \cdots + \phi_p \rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p \rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \cdots + \phi_p
\end{aligned}$$

و بالتعويض عن $\rho_k$ بالمقدر $r_k$ نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\hat{\phi}_1,\ldots,\hat{\phi}_p$ كالتالي:

بوضع معادلات يول و ووكر على الشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-2} & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-3} & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix}$$

وبحل هذه المعادلة للمعالم

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-2} & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-3} & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & r_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix}$$

تقدر $\sigma^2$ كالتالي

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 \left(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \cdots \hat{\phi}_p r_p\right)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(z_t - \bar{z}\right)^2$$

هو تباين العينة.

**<u>تقدير العزوم لبعض النماذج:</u>**

**<u>1- نموذج AR(1)</u>**

$$z_t - \mu = \phi_1 \left(z_{t-1} - \mu\right) + a_t, a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

مقدر العزوم للمعلم $\phi_1$ هو

$$\hat{\phi}_1 = r_1$$

مقدر العزوم للمعلم $\mu$ هو

$$\hat{\mu} = \bar{z}$$

مقدر العزوم للمعلم $\sigma^2$ هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 \left(1 - \hat{\phi}_1 r_1\right)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(z_t - \bar{z}\right)^2$$

## 2- نموذج MA(1)

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1}, a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

لإيجاد مقدر العزوم للمعلم $\theta_1$ نستخدم العلاقة

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

وبتعويض المعالم بمقدراتها

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+\hat{\theta}_1^2}$$

وبحل المعادلة للمقدر $\hat{\theta}_1$ نجد

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1}}{2r_1}$$

هذا الحل يعطي قيمتين للمقدر $\hat{\theta}_1$ نأخذ القيمة التي تحقق $\left|\hat{\theta}_1\right| < 1$ . فمثلا لو كانت $r_1 = -0.4$ فإن $\left(\hat{\theta}_1\right)_1 = -0.77$ و $\left(\hat{\theta}_1\right)_2 = 3.27$ وبالتالي يكون مقدر العزوم للمعلم $\theta_1$ هو $\hat{\theta}_1 = -0.77$.

## 3- نموذج AR(2)

$$z_t - \mu = \phi_1\left(z_{t-1} - \mu\right) + \phi_2\left(z_{t-2} - \mu\right) + a_t, a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

بإستخدام معادلات يول ووكر مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1$ و $\phi_2$ هي

$$\begin{pmatrix}\hat{\phi}_1\\ \hat{\phi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & r_1\\ r_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$$

ومنها نجد

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1 - r_1 r_2}{1-r_1^2}, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1-r_1^2}$$

مقدر العزوم للمعلم $\mu$ هو

$$\hat{\mu} = \bar{z}$$

مقدر العزوم للمعلم $\sigma^2$ هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0\left(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2\right)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(z_t - \bar{z}\right)^2$$

## 4- نموذج MA(2)

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, \; a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\theta_2$ نستخدم العلاقات

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1\left(1-\theta_2\right)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

وبتعويض المقدرات $r_1$ و $r_2$ نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\theta_2$

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1\left(1-\hat{\theta}_2\right)}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}, \quad r_2 = \frac{-\hat{\theta}_2}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$$

ونحل لكل من $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ ونأخذ الحلول التي تحقق $\left|\theta_2\right| < 1, \quad \theta_2 + \theta_1 < 1, \quad \theta_2 - \theta_1 < 1$.

## 5- نموذج ARMA(1,1)

$$z_t - \mu = \phi_1\left(z_{t-1} - \mu\right) + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \; a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\phi_1$ نستخدم العلاقات

$$\rho_1 = \frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}, \quad \rho_2 = \frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}\phi_1$$

وبتعويض المقدرات $r_1$ و $r_2$ نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\phi_1$

$$r_1 = \frac{\left(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1\right)\left(\hat{\phi}_1-\hat{\theta}_1\right)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1}, \quad r_2 = \frac{\left(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1\right)\left(\hat{\phi}_1-\hat{\theta}_1\right)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1}\hat{\phi}_1$$

وبقسمة المعادلة المعرفة للمقدر $r_2$ على المعادلة المعرفة للمقدر $r_1$ نجد

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}$$

وهو مقدر العزوم للمعلم $\phi_1$. لإيجاد مقدر العزوم للمعلم $\theta_1$ نعوض عن $\hat{\phi}_1$ في المعادلة المعرفة للمقدر $r_1$ نجد

$$r_1 = \frac{\left(1-\frac{r_2}{r_1}\hat{\theta}_1\right)\left(\frac{r_2}{r_1}-\hat{\theta}_1\right)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\frac{r_2}{r_1}\hat{\theta}_1}$$

ونحل المعادلة التربيعية الناتجة للمقدر $\hat{\theta}_1$ و نأخذ القيمة التي تحقق $\left|\hat{\theta}_1\right| < 1$ .

**تمارين:** أوجد مقدرات العزوم لمعالم النماذج التالية

ARIMA(1,1,1), ARIMA(2,1,0), ARIMA(0,1,2), ARIMA(1,2,0), ARIMA(0,2,1), ARIMA(0,2,0).

**ملاحظة:** مقدرات العزوم تستخدم كقيم أولية لإيجاد مقدرات أكثر دقة.

## ثانيا: طريقة المربعات الدنيا الشرطية Conditional Least Square Method :

لنماذج ARMA($p,q$) والتي تكتب على الشكل

$$\phi_p(B)(z_t-\mu)=\theta_q(B)a_t,\quad a_t\sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

حيث $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ لايوجد بينها جذور مشتركة وجذور المعادلة $\theta_q(B)=0$ تقع جميعها خارج دائرة الوحدة ( شرط الإنقلاب). بإعادة كتابة النموذج السابق للأخطاء $a_t$ كالتالي:

$$a_t=\frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)}(z_t-\mu)$$

الطرف الأيمن يمكن إعتبارة كدالة في المعالم $\boldsymbol{\varphi}=\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p\}$ و $\boldsymbol{\theta}=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q\}$ و $\mu$ و يكتب

$$a_t(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)=\frac{\left(1-\phi_1B-\phi_2B^2-\cdots-\phi_pB^p\right)}{\left(1-\theta_1B-\theta_2B^2-\cdots-\theta_pB^p\right)}(z_t-\mu)$$

تعتمد طريقة المربعات الدنيا الشرطية و لمشاهدات معطاة $\mathbf{z}=\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ على تصغير الدالة

$$\min_{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu}S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)=\sum_{t=p+1}^{n}a_t^2\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu|\mathbf{z}\right)$$

وحل المعادلات الطبيعية Normal Equations الناتجة التالية بالنسبة للمقدرات.

$$\left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \sum_{t=p+1}^{n} a_t^2(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu|\mathbf{z})\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \sum_{t=p+1}^{n} a_t^2(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu|\mathbf{z})\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mu} S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = \left.\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{t=p+1}^{n} a_t^2(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu|\mathbf{z})\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = 0$$

هذه المقدرات تسمى شرطية لأننا هنا نشترط ان القيم $a_p = a_{p-1} = \cdots = a_{p+1-q} = 0$ أي مساوية لتوقعها. ( لاحظ أن التجميع في المعادلات السابقة يبدأ من القيمة $t = p+1$ ).

يقدر التباين $\sigma^2$ من

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_c(\hat{\boldsymbol{\varphi}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\mu)}{n-(p+q+1)}$$

**تقديرات المربعات الدنيا الشرطية لبعض النماذج:**

**1- نموذج AR(1)**

$$z_t - \mu = \phi_1(z_{t-1} - \mu) + a_t,\ a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

لتبسيط الإشتقاقات سوف نستبدل $\mu$ بمقدرها $\bar{z}$

$$z_t - \bar{z} = \phi_1(z_{t-1} - \bar{z}) + a_t,\ a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

لمشاهدات معطاة $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ نكتب الأخطاء

$$a_t(\phi_1) = (z_t - \bar{z}) - \phi_1(z_{t-1} - \bar{z}),\ t = 2,3,\cdots,n$$

وتربيع الطرفين والجمع على كل المشاهدات

$$a_t^2(\phi_1) = \left[(z_t - \bar{z}) - \phi_1(z_{t-1} - \bar{z})\right]^2,\ t = 2,3,\cdots,n$$

$$S_c(\phi_1) = \sum_{t=2}^{n} a_t^2(\phi_1) = \sum_{t=2}^{n}\left[(z_t - \bar{z}) - \phi_1(z_{t-1} - \bar{z})\right]^2$$

وهذه دالة للمعلم $\phi_1$ فقط ، نشتق المعادلة السابقة بالنسبة للمعلم $\phi_1$ وتكون النتيجة مساوية للصفر عندما $\phi_1 = \hat{\phi}_1$ أي

$$S_c(\phi_1)=\sum_{t=2}^{n}a_t^2(\phi_1)=\sum_{t=2}^{n}\left[(z_t-\overline{z})-\phi_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_1}S_c(\phi_1)=\frac{\partial}{\partial\phi_1}\sum_{t=2}^{n}\left[(z_t-\overline{z})-\phi_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]^2$$

$$=\sum_{t=2}^{n}-2(z_{t-1}-\overline{z})\left[(z_t-\overline{z})-\phi_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_1}S_c(\phi_1)\Big|_{\phi_1=\hat{\phi}_1}=\sum_{t=2}^{n}-2(z_{t-1}-\overline{z})\left[(z_t-\overline{z})-\hat{\phi}_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]=0$$

$$\therefore\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})\left[(z_t-\overline{z})-\hat{\phi}_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]=0$$

$$\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})(z_t-\overline{z})-\hat{\phi}_1\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})^2=0$$

أي

$$\hat{\phi}_1=\frac{\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})(z_t-\overline{z})}{\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})^2}$$

وهو مقدر المربعات الدنيا الشرطية للمعلم $\phi_1$.

تمرين: قارن بين هذا المقدر ومقدر العزوم للمعلم $\phi_1$.

## 2- نموذج MA(1)

$$z_t-\mu=a_t-\theta_1a_{t-1},\ a_t\sim N(0,\sigma^2)$$

لتبسيط الإشتقاقات سوف نستبدل $\mu$ بمقدرها $\overline{z}$ ونعمل على المتسلسلة المعدلة للمتوسط $x_t=z_t-\overline{z}$ فيصبح النموذج

$$x_t=a_t-\theta_1a_{t-1},\ a_t\sim N(0,\sigma^2)$$

وبكتابة المعادلة الأخيرة على الشكل

$$a_t=x_t-\theta_1a_{t-1}$$

ولمشاهدات معطاة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ و بوضع $a_0=0$ شرطيا نكتب الأخطاء

$$a_1=x_1$$
$$a_2=x_2-\theta_1a_1$$
$$a_3=x_3-\theta_1a_2$$
$$\vdots$$
$$a_n=x_n-\theta_1a_{n-1}$$

وبالتالي

$$S_c(\theta_1) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$$

الدالة السابقة غير خطية في المعلم $\theta_1$ و يمكن إيجاد قيمة $\theta_1$ والتي تصغر $S_c(\theta_1)$ بطرق البحث العددية مثل البحث الشبكي في المجال (1,1-) أو إستخدام طريقة جاوس-نيوتن والتي تتلخص في تقريب $a_t = a_t(\theta_1)$ بدالة خطية للمعلم $\theta_1$ حول قيمة أولية $\theta^*$ مثلا أي

$$a_t(\theta_1) \approx a_t(\theta^*) + (\theta_1 - \theta^*)\frac{da_t(\theta^*)}{d\theta_1}$$

المشتقة $\frac{da_t(\theta^*)}{d\theta_1}$ يمكن حسابها تكراريا وذلك بإشتقاق طرفي المعادلة $a_t = x_t - \theta_1 a_{t-1}$ بالنسبة للمعلم $\theta_1$ لنحصل على

$$\frac{da_t(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{\theta_1 da_{t-1}(\theta_1)}{d\theta_1} + a_{t-1}(\theta_1)$$

و بقيمة أولية $\frac{da_0(\theta_1)}{d\theta_1} = 0$ . المعادلة

$$a_t(\theta_1) \approx a_t(\theta^*) + (\theta_1 - \theta^*)\frac{da_t(\theta^*)}{d\theta_1}$$

خطية في المعلم $\theta_1$ وبالتالي بالامكان تصغير مجموع المربعات

$$S_c(\theta_1) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$$

تحليليا لنحصل علي مقدر جديد وأفضل للمعلم $\theta_1$ ونكرر هذه العملية بإستبدال $\theta^*$ بالمقدر الجديد ونستمر حتى يصبح الفرق بين مقدرين تاليين صغير جدا أو النقص في مجموع المربعات صغير جدا. ممكن إستخدام طريقة العزوم لإيجاد القيمة ألأولية $\theta^*$ لكي نحصل على تقارب سريع. طبعا الطريقة السابقة لاتتم يدويا بل تحتاج إلى حاسب لذلك.

يلاحظ أن تقدير المعالم للنموذج في حالة نماذج المتوسط المتحرك او النماذج المختلطة التي تحوي على متوسط متحرك تشكل تعقيدا لأنها تحوى معالم المتوسط المتحرك بشكل غير خطي ولهذا تحتاج إلى طرق عددية لحلها كما شاهدنا في حالة النموذج MA(1) وهو أبسطها جميعا.

سوف نكتفي في مقررنا هذا على الطريقتين السابقة ولكن نذكر بعض الطرق الاخرى المستخدمة في تقدير معالم النموذج مثل:

1- طريقة الأرجحية العظمى Maximum Likelihood Method

2- طريقة المربعات الدنيا غير الشرطية Unconditional Least Squares Method

3- طرق التقديرغير الخطية Nonlinear Estimation Methods

## تشخيص وإختبار النموذج Model Checking and Diagnostics :

بعد التعرف على نموذج مبدئي وتقدير معالم هذا النموذج نجري بعض التشخيصات على البواقي أو أخطاء التطبيق (انظر تعريف 4) لنرى مدى مطابقة النموذج للمتسلسلة المشاهدة ، ويفترض أن البواقي هي مقدرات لمتسلسة الضجة البيضاء $a_t$ والتي نفترض انها موزعة طبيعيا بمتوسط صفري وتباين $\sigma^2$. البواقي تعطى بالعلاقة

$$e_t = z_t - \hat{z}_t = \hat{a}_t, \quad t = 1,2,...,n$$

أي ان البواقي هي القيم المشاهدة ناقص القيم المطبقة.

يقوم التشخيص والإختبارات على فحص البواقي والنظر في مدى تحقيقها لفرضيات النموذج والتي هي:

1- متوسط صفري

2- العشوائية

3- عدم الترابط

4- موزعة توزيع طبيعي (مستقل ومتطابق بمتوسط صفري وتباين $\sigma^2$ أي ( $a_t \sim IIDN\left(0,\sigma^2\right)$

لهذا فإننا نجري تشخيص وهو مجموعة من الإختبارات علي البواقي لنري فيما إذا كانت تحقق هذه الشروط وفي هذه الحالة نعتبر النموذج المطبق مقبولا أما إذا فشل احد هذه الإختبارات فيجب علينا إعادة النظر وإقتراح نموذج آخر

**أولا: إختبار المتوسط:**

$$H_0 : E\left(a_t\right) = 0$$
$$H_1 : E\left(a_t\right) \neq 0$$

وهو إختبار بذيلين ونستخدم فية الإحصائة $u = \dfrac{\overline{e}}{se\left(\overline{e}\right)}$ والتي لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $E\left(a_t\right) = 0$ إذا كانت $|u| < 1.96$ ( هذا علي إعتبار ان حجم العينة اكبر من 30 وحدة وهذا دائما متحقق للمتسلسلات الزمنية التي ندرسها )

**ثانيا: إختبار العشوائية:**

نختبر عشوائية البواقي بواسطة إختبار الجري Runs test حول المتوسط وحول الصفر وهو احد الإختبارات اللامعلمية ( يوجد كثير من الإختبارات للعشوائية يدرسها الطالب في المقرر 241 بحث ولكن نكتفي هنا بهذا الإختبار).

**ثالثا: إختبار الترابط أو الإستقلال:**

يختبر ترابط أو إستقلال البواقي بواسطة إختبار الترابط الذاتي Autocorrelation test وذلك بحساب ورسم الترابطات الذاتية العينية SACF للبواقي ومقارنتها مع دالة الترابط الذاتي لمتسلسة الضجة البيضاء.

الإختبار

$$H_0 : \rho_1 = 0$$
$$H_1 : \rho_1 \neq 0$$

حيث الإحصائة $u = \frac{r_1}{se(r_1)}$ لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $\rho_1 = 0$ إذا كانت $|u| < 1.96$.

**رابعا: إختبار طبيعية البواقي:**

نختبر في ما إذا كانت البواقي موزعة طبيعيا وذلك بعدة طرق مثل:

1- إختبار حسن التطابق Goodness of Fit Test ونستخدم الإختبار اللامعلمي كولموجوروف- سميرنوف Kolmogorov-Smirnov Test .

2- مخطط الإحتمال الطبيعي Normal Probability Plot .

3- مخطط الربيعات-الربيعات Q-Q Plot .

**بعض المعايير الاخرى لإختيار نموذج المناسب:**

1) إحصائية كيو لـ لجنق-بوكس Ljung-Box Q statistc وتختصر LBQ وتستخدم لإختبار الفرضية:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_K = 0$$

وتعطى بالعلاقة:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{r_k^2}{n-k} \sim \chi^2 (K-m)$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج.

2) معيار المعلومات الذاتي Automatic Information Criteria وتختصر $AIC$ وتعطى بالعلاقة:

$$AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج ونختار النموذج الذي يعطي $\min_m AIC(m)$

**أمثلة وحالات دراسة Examples and Case Studies :**

1- البيانات التالية لمتسلسلة زمنية مشاهدة

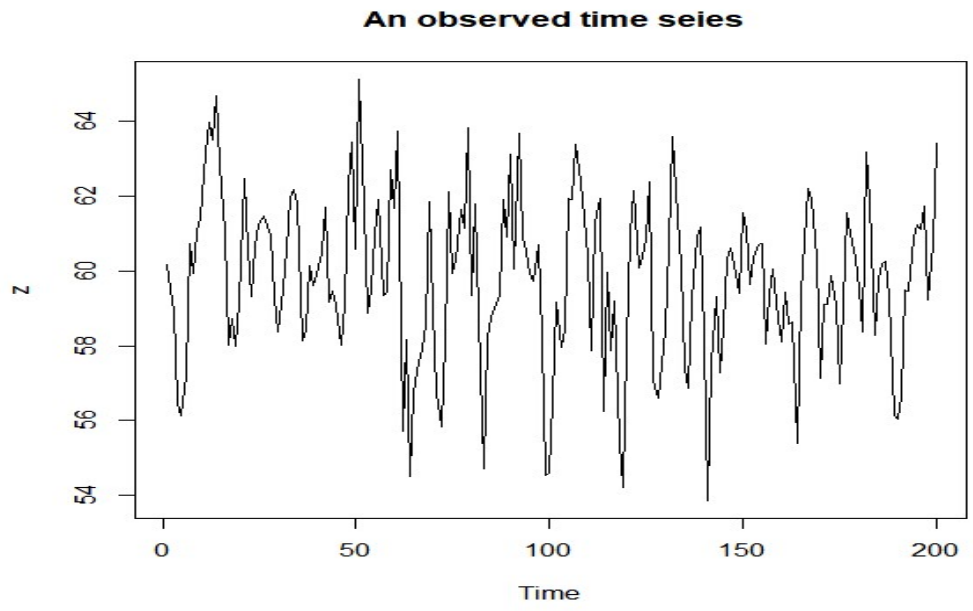
z(t)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60.1815 | 59.5257 | 58.9275 | 56.4828 | 56.1346 | 57.2318 | 60.7196 | 59.9315 |
| 61.0640 | 61.4230 | 63.1547 | 63.9622 | 63.5049 | 64.6886 | 62.8556 | 61.0344 |
| 58.0059 | 58.7108 | 57.9813 | 59.1721 | 62.4654 | 60.5820 | 59.3191 | 60.6643 |
| 61.2223 | 61.4761 | 61.1856 | 60.9225 | 59.3054 | 58.3755 | 59.5353 | 60.5777 |
| 61.9753 | 62.1789 | 61.8108 | 58.1483 | 58.4174 | 60.1325 | 59.6004 | 59.9086 |
| 60.4833 | 61.7008 | 59.1609 | 59.4554 | 59.0903 | 58.0151 | 59.1455 | 62.2658 |
| 63.4411 | 60.5918 | 65.1325 | 61.7122 | 58.8802 | 59.5333 | 60.9492 | 61.9013 |
| 59.3478 | 59.4444 | 62.6899 | 61.6708 | 63.7261 | 55.7339 | 58.1690 | 54.5045 |
| 56.7241 | 57.3334 | 57.9363 | 58.5870 | 61.8370 | 58.9585 | 56.7437 | 55.8451 |
| 58.1281 | 62.1017 | 59.9443 | 60.2990 | 61.6337 | 61.1520 | 63.8189 | 59.3572 |
| 61.7840 | 57.3292 | 54.7163 | 58.2273 | 58.7564 | 59.0087 | 59.3402 | 61.8956 |
| 60.9021 | 63.1070 | 60.0538 | 63.6776 | 60.8942 | 60.5289 | 59.9246 | 59.7252 |
| 60.7001 | 58.1895 | 54.5550 | 54.6083 | 56.5413 | 59.1567 | 57.9624 | 58.4651 |
| 61.9462 | 61.9205 | 63.3933 | 62.3827 | 61.4310 | 60.3373 | 57.8803 | 61.2797 |
| 61.9448 | 56.2599 | 59.9569 | 57.8763 | 59.2086 | 55.4219 | 54.2185 | 58.0143 |
| 60.9805 | 62.1362 | 60.0855 | 60.3843 | 60.8605 | 62.3728 | 57.0642 | 56.6085 |
| 57.5151 | 58.4221 | 60.6919 | 63.5907 | 61.4451 | 60.1458 | 57.3940 | 56.8697 |
| 59.2145 | 60.8962 | 61.1852 | 58.1711 | 53.8560 | 57.5307 | 59.3236 | 57.2961 |
| 58.5278 | 60.3030 | 60.6201 | 59.9346 | 59.4119 | 61.5614 | 61.1107 | 59.6266 |
| 60.3550 | 60.7021 | 60.7227 | 58.0423 | 59.3488 | 60.0377 | 58.7336 | 58.1105 |
| 59.4242 | 58.5790 | 58.6501 | 55.4010 | 59.3839 | 60.8256 | 62.1957 | 61.9152 |
| 60.3319 | 57.1459 | 59.0970 | 59.0997 | 59.8597 | 59.0780 | 56.9972 | 59.0778 |

61.5555 60.9815 60.3563 59.5097 58.3583 63.1777 61.8685 58.2759
59.7755 60.2052 60.2513 59.2927 56.1494 56.0309 56.6666 59.5015
59.4755 60.9013 61.2179 61.1168 61.7218 59.2298 60.7356 63.4124

اولا نرسم المتسلسلة في مخطط زمني Time Plot بإستخدام الحزمة الإحصائية MINITAB كالتالي:

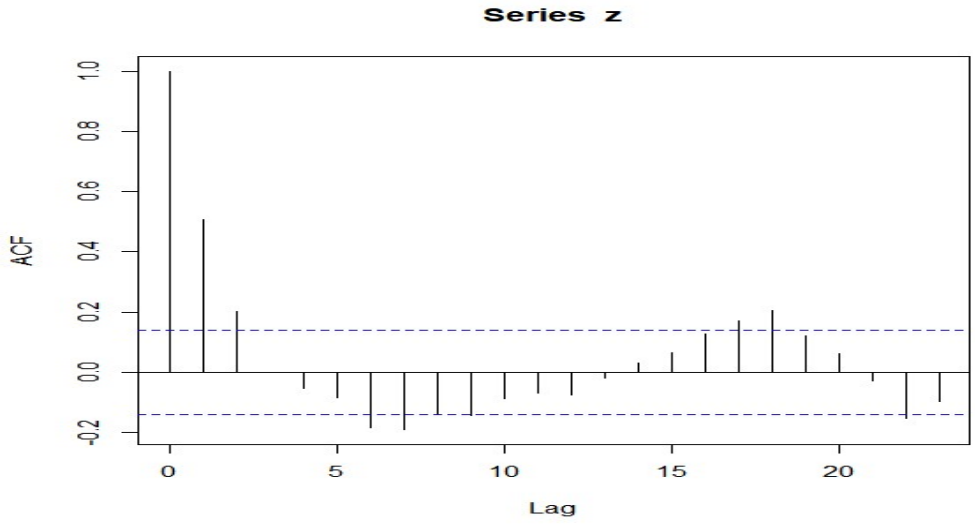
```
> plot.ts(z)
> title(main = " An observed time seies")
```




ثانيا نحسب ونرسم الترابط الذاتي العيني بإستخدام الأمر

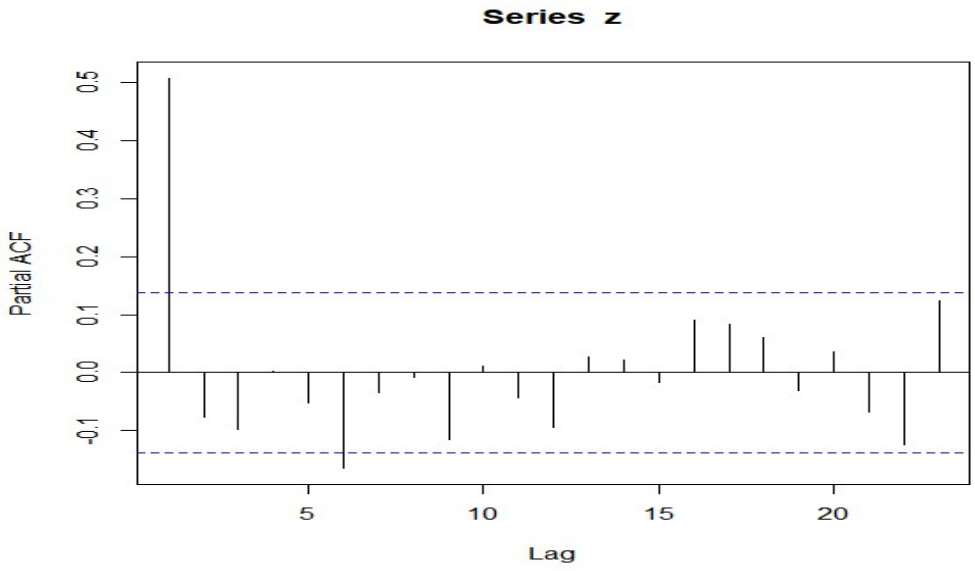
```
> zacf = acf(z)
> zacf = acf(z, plot=F)
> zacf
Autocorrelations of series 'z', by lag

0      1      2      3      4      5      6      7      8
9     10     11     12     13     14     15     16     17
18
```

```
 1.000  0.508  0.201 -0.001 -0.052 -0.084 -0.184 -0.191 -
0.141 -0.144 -0.086 -0.069 -0.076 -0.020  0.031  0.066
0.128  0.171  0.204
    19     20     21     22     23
 0.123  0.062 -0.030 -0.151 -0.097
> plot(zacf)
```




ثالثا نحسب ونرسم الترابط الذاتي الجزئي العيني بإستخدام الأمر

```
> zpacf = pacf(z)
> zpacf

Partial autocorrelations of series 'z', by lag

1      2      3      4      5      6      7      8      9
10      11      12      13      14      15      16      17
18     19     20
 0.508 -0.076 -0.097  0.003 -0.052 -0.165 -0.035 -0.008 -
0.115  0.011 -0.043 -0.095  0.028  0.022 -0.016  0.090
0.084  0.061 -0.032  0.036
    21     22     23
-0.068 -0.124  0.124
```




من أنماط الترابط الذاتي و الترابط الذاتي الجزئي العيني نلاحظ ان المتسلسلة تتبع نموذج AR(1) ولهذا نطبق النموذج المقترح علي المشاهدات بإستخدام الأمر

```
> z.fit = arima(z, order = c(1,0,0))
> z.fit

Call:
arima(x = z, order = c(1, 0, 0))

Coefficients:
         ar1  intercept
      0.5126    59.7772
s.e.  0.0609     0.2664

sigma^2 estimated as 3.406:  log likelihood = -406.49,
aic = 818.98
> predict(z.fit, 20)
$pred
Time Series:
Start = 201
End = 220
Frequency = 1
```

```
 [1]   61.64051   60.73227   60.26673   60.02811   59.90579
59.84310  59.81096  59.79449  59.78604  59.78172  59.77950
59.77836 59.77778 59.77748 59.77732
[16] 59.77725 59.77721 59.77719 59.77717 59.77717

$se
Time Series:
Start = 201
End = 220
Frequency = 1
 [1]   1.845507   2.073825   2.129756   2.144209   2.147990
2.148983  2.149243  2.149312  2.149330  2.149335  2.149336
2.149336 2.149336 2.149336 2.149336
[16] 2.149336 2.149336 2.149336 2.149336 2.149336
```

ونستنتج التالي:

1- النموذج المقترح هو

$$z_t = 59.7772 + 0.5126(z_{t-1} - 59.7772) + a_t, \quad a_t \sim WN(0, 3.406)$$

2- المعالم المقدرة وإنحرافها المعياري و قيمة t لها هي:

$$\hat{\phi}_1 = 0.5126, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.0609, \quad t = 8.417$$

$$\hat{\mu} = 59.7772, \quad s.e.\left(\hat{\mu}\right) = 0.2664$$

$$\hat{\sigma}^2 = 3.406, \quad with\ d.f. = 199$$

رابعا نفحص البواقي:

1- إختبار متوسط البواقي

لانرفض الفرضية الصفرية بأن المتوسط يساوي الصفر

```
> t.test(z.fit$residuals)

        One Sample t-test

data:  z.fit$residuals
t = -0.0102, df = 199, p-value = 0.99
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
 -0.25931  0.25665
sample estimates:
 mean of x
-0.0013303
```

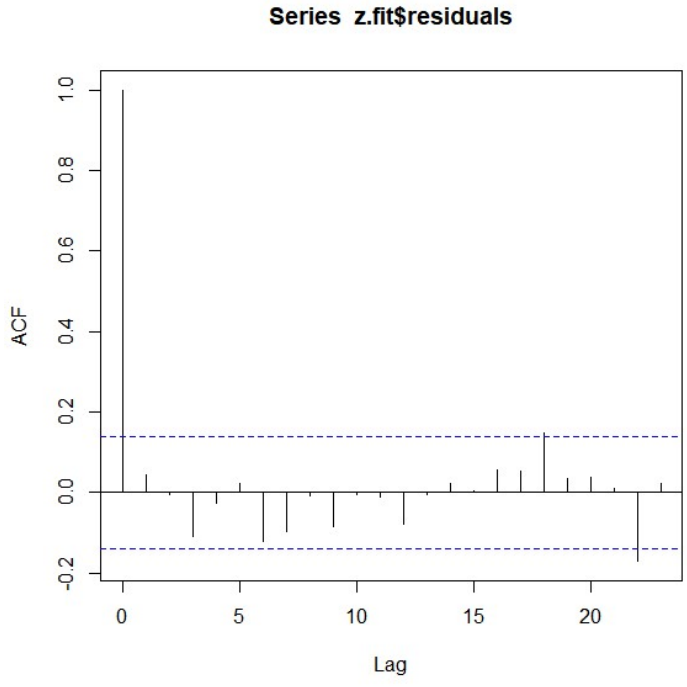
2- إختبار عشوائية البواقي

```
> library(tseries)
> runs.test(z.fit$residuals)

        Runs Test

data:  z.fit$residuals
statistic = -1.42, runs = 91, n1 = 100, n2 = 100, n =
200, p-value = 0.16
alternative hypothesis: nonrandomness
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن البواقي عشوائية

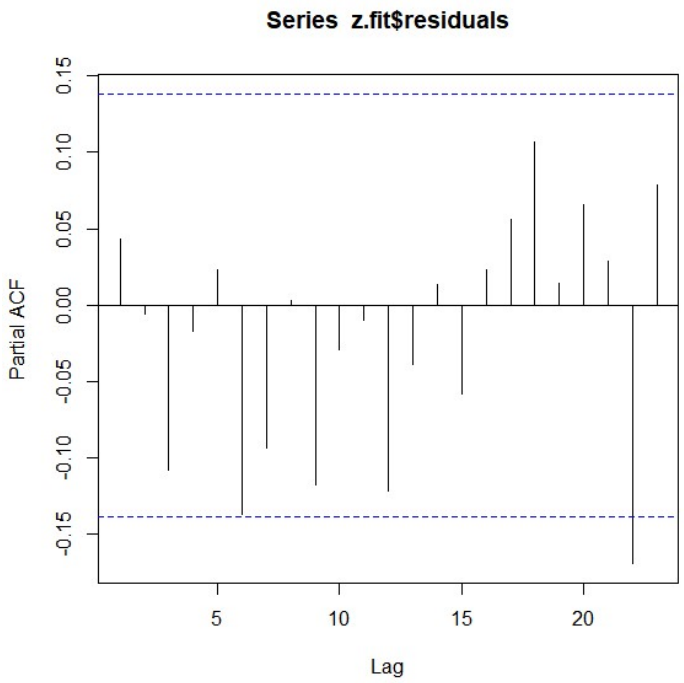
3- الترابط الذاتي للبواقي

```
> acf(z.fit$residuals)
```




4- الترابط الذاتي الجزئي للبواقي

```
> pacf(z.fit$residuals)
```

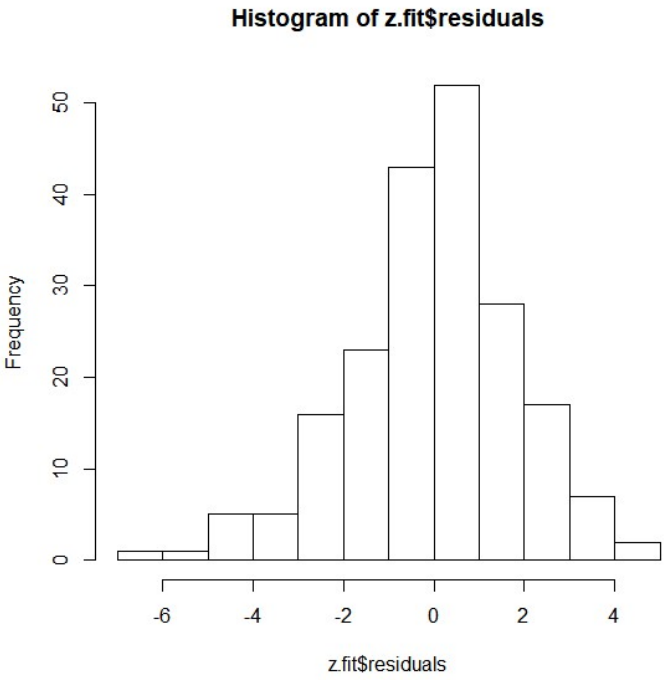



نلاحظ ان أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي تتبع أنماط متسلسلة الضجة البيضاء

5- إختبار طبيعية البواقي :

ا- نرسم المضلع التكراري للبواقي

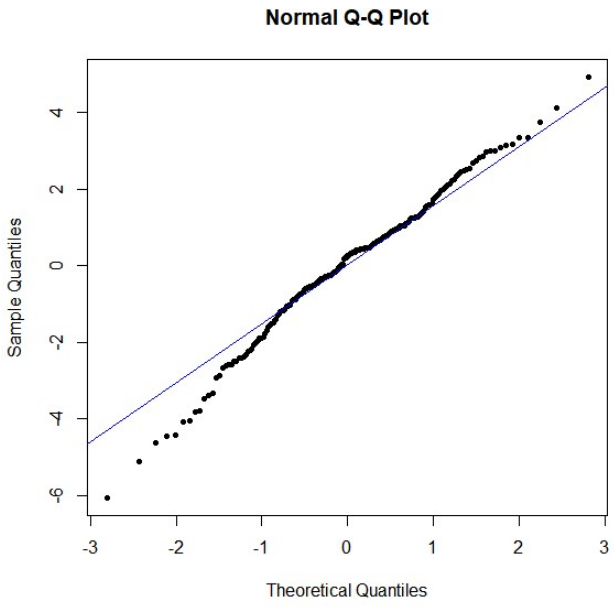
```
> hist(z.fit$residuals)
```



نلاحظ أنه متناظر ولة شكل التوزيع الطبيعي تقريبا. وهذا لايكفي بل يجب ان ننظر الى:

ب- رسم الاحتمال الطبيعي Normal Probability Plot

```
> qqnorm(z.fit$residuals, pch=20)
> qqline(z.fit$residuals, col="blue")
```




واضح من الرسم أن البواقي طبيعية وللتأكد نقوم:

ج- بإختبار K-S Test لطبيعية البواقي

```
> ks.test(z.fit$residuals, "pnorm")

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  z.fit$residuals
D = 0.135, p-value = 0.0014
alternative hypothesis: two-sided
```

ونلاحظ التالي:

الإختبار هو

$H_0$ : Residuals is $\mathrm{N}(0,3.406)$

$H_1$ : Residuals is not $\mathrm{N}(0,3.406)$

إختبار كولموجوروف-سميرنوف اعطى

$D = 0.06$

الـ P-Value للإختبار هي 0.0014 وهي أقل من $\alpha = 0.05$ أي اننا نرفض الفرضية الصفرية.

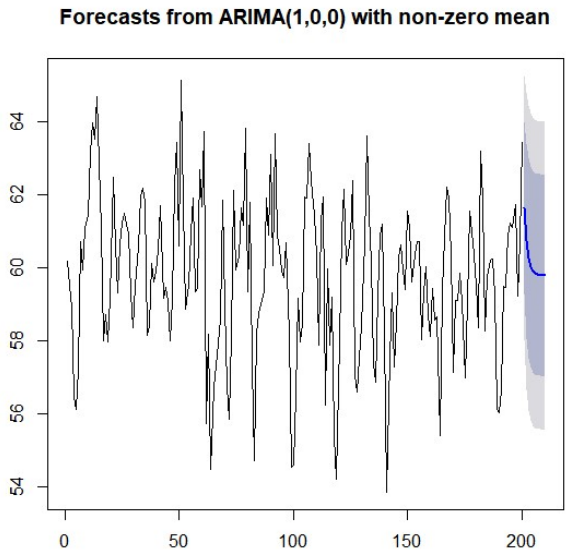
**<u>توليد تنبؤات:</u>**

استخدمنا النموذج للتنبؤ عن 10 قيم مستقبلية

```
> library("forecast")
> z.f = forecast(z , model = z.fit)
> z.f
    Point Forecast  Lo 80  Hi 80  Lo 95  Hi 95
201         61.641 59.275 64.006 58.023 65.258
202         60.732 58.075 63.390 56.668 64.797
203         60.267 57.537 62.996 56.092 64.441
204         60.028 57.280 62.776 55.826 64.231
205         59.906 57.153 62.659 55.696 64.116
206         59.843 57.089 62.597 55.631 64.055
207         59.811 57.057 62.565 55.599 64.023
208         59.794 57.040 62.549 55.582 64.007
209         59.786 57.032 62.541 55.573 63.999
210         59.782 57.027 62.536 55.569 63.994
```

ونرسمها بالأمر التالي

```
> plot(z.f)
```



2- البيانات التالية لمتسلسلة زمنية مشاهدة

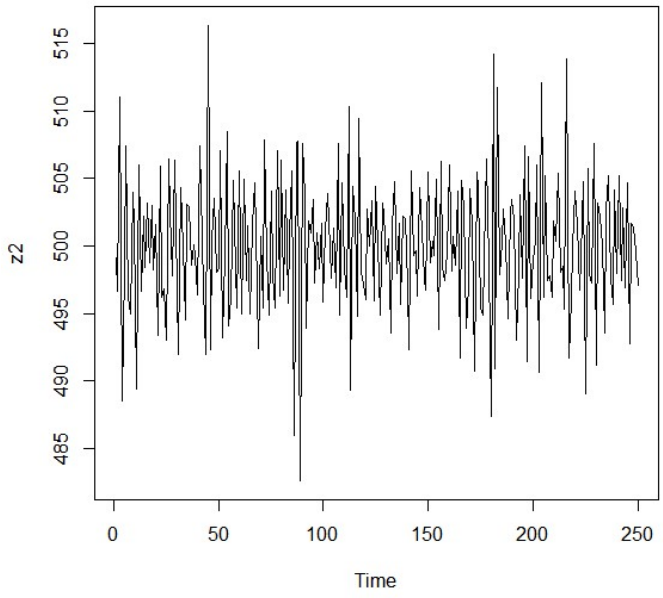
z(t)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 499.148 | 496.650 | 511.026 | 488.539 | 498.440 | 507.382 | 496.208 | 494.948 |
| 503.975 | 501.649 | 489.348 | 506.040 | 496.678 | 502.233 | 498.429 | 503.170 |
| 498.758 | 502.969 | 498.229 | 501.605 | 493.371 | 505.884 | 496.227 | 496.806 |
| 493.057 | 506.459 | 502.545 | 497.785 | 506.329 | 496.665 | 491.923 | 504.340 |
| 499.890 | 494.559 | 503.107 | 502.891 | 498.598 | 500.074 | 499.260 | 496.372 |
| 507.416 | 500.508 | 496.830 | 491.981 | 516.373 | 492.286 | 500.356 | 503.506 |
| 498.090 | 498.319 | 507.020 | 493.161 | 499.217 | 508.489 | 494.033 | 496.062 |
| 504.877 | 498.304 | 495.355 | 505.581 | 495.000 | 504.965 | 497.393 | 501.521 |
| 494.918 | 501.527 | 504.712 | 501.064 | 492.352 | 500.664 | 495.431 | 507.886 |
| 499.173 | 494.833 | 504.072 | 497.883 | 495.423 | 507.072 | 496.285 | 506.345 |
| 496.765 | 504.129 | 495.737 | 500.744 | 505.577 | 485.991 | 507.673 | 507.735 |
| 482.567 | 507.594 | 503.580 | 493.866 | 501.819 | 500.921 | 503.415 | 497.295 |
| 500.989 | 498.294 | 501.700 | 495.868 | 501.175 | 503.852 | 499.783 | 497.642 |
| 501.331 | 496.932 | 507.582 | 494.885 | 504.666 | 498.380 | 496.181 | 510.287 |
| 489.314 | 504.394 | 501.928 | 494.814 | 509.407 | 498.060 | 497.133 | 496.029 |
| 502.720 | 499.982 | 503.325 | 495.954 | 504.408 | 500.199 | 494.878 | 503.134 |
| 502.489 | 498.640 | 500.484 | 493.552 | 501.417 | 504.785 | 497.943 | 501.634 |
| 495.691 | 502.173 | 502.066 | 497.130 | 492.318 | 505.517 | 499.299 | 499.611 |
| 496.252 | 504.346 | 501.082 | 497.626 | 496.757 | 505.475 | 498.787 | 500.388 |
| 499.279 | 504.913 | 493.843 | 506.259 | 498.403 | 497.462 | 499.467 | 505.987 |
| 498.169 | 500.712 | 498.571 | 504.085 | 491.707 | 504.817 | 502.933 | 493.858 |
| 497.015 | 504.204 | 501.703 | 490.683 | 505.429 | 504.336 | 495.430 | 494.857 |
| 503.195 | 506.403 | 498.599 | 487.344 | 514.220 | 490.887 | 511.741 | 497.861 |
| 500.252 | 502.721 | 500.256 | 494.614 | 502.414 | 503.465 | 501.999 | 493.017 |
| 498.158 | 503.746 | 497.643 | 507.438 | 491.418 | 506.649 | 496.078 | 498.931 |
| 500.409 | 506.001 | 490.619 | 512.122 | 496.150 | 505.218 | 497.413 | 497.794 |
| 496.225 | 501.827 | 500.324 | 505.367 | 498.016 | 498.477 | 495.353 | 513.900 |
| 491.726 | 496.063 | 499.779 | 504.012 | 501.542 | 496.680 | 499.134 | 504.717 |
| 489.032 | 505.709 | 497.956 | 497.231 | 507.590 | 491.202 | 503.130 | 502.209 |
| 500.024 | 493.502 | 502.681 | 505.234 | 497.647 | 495.699 | 504.174 | 497.992 |
| 505.194 | 497.421 | 502.823 | 496.877 | 504.640 | 492.716 | 501.701 | 501.387 |

499.574 497.048

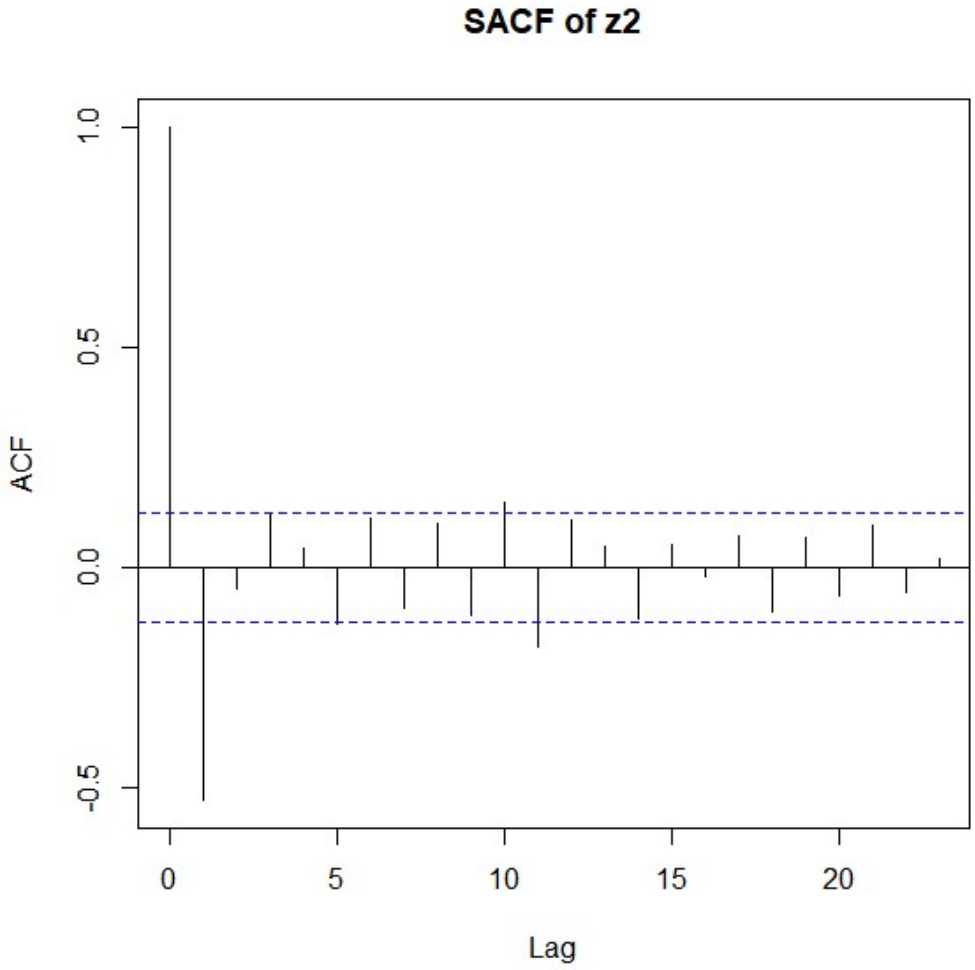
```
> z2 = read.csv(file.choose(), header=F)
> head(z2)
[1] 499.148 496.650 511.026 488.539 498.440 507.382
> z2 <- as.ts(z2)
> plot.ts(z2)
```

اولا : سوف نرسم المتسلسلة



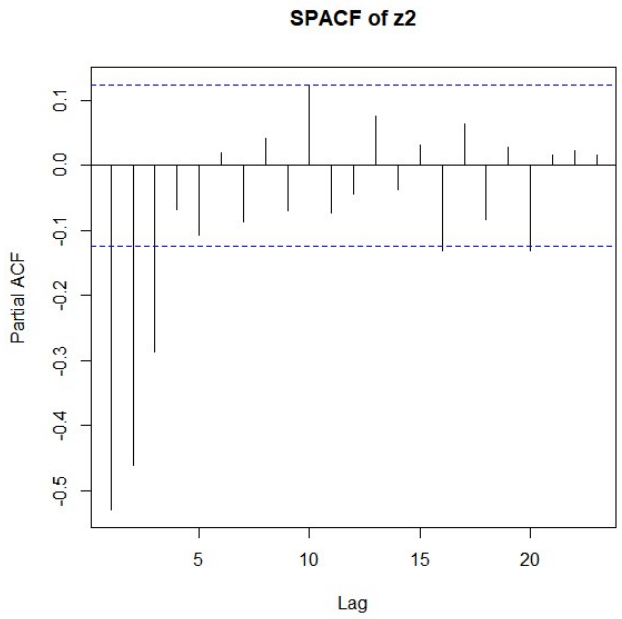

ثانيا: نحسب ونرسم الترابط الذاتي العيني:

```
> z2acf = acf(z2, main = "SACF of z2")
> z2acf = acf(z2, plot=F)
> z2acf

Autocorrelations of series ‘z2’, by lag

0      1      2      3      4      5      6      7      8
9     10     11     12     13     14
1.000 -0.530 -0.050  0.121  0.041 -0.129  0.112 -0.092
0.097 -0.108  0.146 -0.181  0.107  0.048 -0.117
 15     16     17     18     19     20     21     22
23
 0.052 -0.023  0.072 -0.101  0.065 -0.064  0.094 -0.058
0.018
```




ثالثا: نحسب ونرسم الترابط الذاتي الجزئي العيني:

```
> z2pacf = pacf(z2, main = "SPACF of z2")
> z2pacf = pacf(z2, plot=F)
> z2pacf

Partial autocorrelations of series ‘z2’, by lag

1      2      3      4      5      6      7      8      9
10     11     12     13     14     15
-0.530 -0.460 -0.286 -0.068 -0.108  0.019 -0.086  0.041 -
0.069  0.123 -0.073 -0.045  0.075 -0.038  0.031
16     17     18     19     20     21     22     23
-0.132  0.064 -0.084  0.028 -0.131  0.016  0.022  0.016
```




من الأنماط المشاهدة نلاحظ ان المتسلسة قد تتبع نموذج MA(1) وبتطبيق هذا النموذج نجد

```
> z2.fit = arima(z2, order = c(0,0,1))
> z2.fit

Call:
arima(x = z2, order = c(0, 0, 1))

Coefficients:
          ma1  intercept
      -0.7880   499.9614
s.e.   0.0344     0.0523

sigma^2 estimated as 14.75:  log likelihood = -691.61,
aic = 1389.23


> Box.test(z2.fit$residuals, lag=20, type="Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  z2.fit$residuals
X-squared = 34.349, df = 20, p-value = 0.02386
```

ونستنتج التالي:

1- النموذج المقترح هو

$$z_t = 499.9614 + a_t - 0.788a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0,14.75)$$

2- المعالم المقدرة وإنحرافها المعياري و قيمة t لها هي:

$$\hat{\theta}_1 = -0.788, \quad s.e.\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.0344, \quad t = 22.91$$

$$\hat{\mu} = \hat{\delta} = 499.9614, \quad s.e.\left(\hat{\delta}\right) = 0.0523, \quad t = 9559.49$$

$$\hat{\sigma}^2 = 14.75, \quad with\ d.f. = 248$$

رابعا نفحص البواقي:

1- إختبار متوسط البواقي

```
> t.test(z2.fit$residuals)

        One Sample t-test

data:  z2.fit$residuals
t = -0.085807, df = 249, p-value = 0.9317
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.5002108  0.4584451
sample estimates:
  mean of x
-0.02088285
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن المتوسط يساوي الصفر

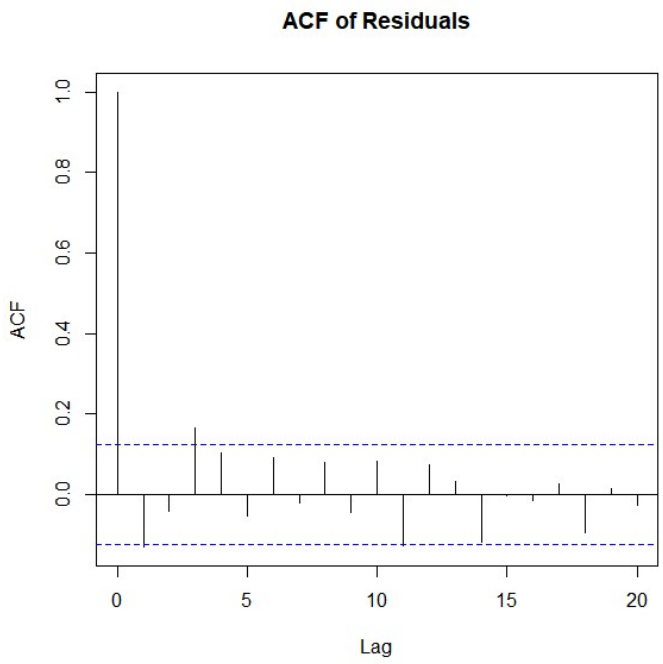
2- إختبار عشوائية البواقي

```
> library(tseries)
> library(randtests)
> runs.test(z2.fit$residuals)

        Runs Test

data:  z2.fit$residuals
statistic = 0.88722, runs = 133, n1 = 125, n2 = 125, n =
250, p-value = 0.375
alternative hypothesis: nonrandomness
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن البواقي عشوائية

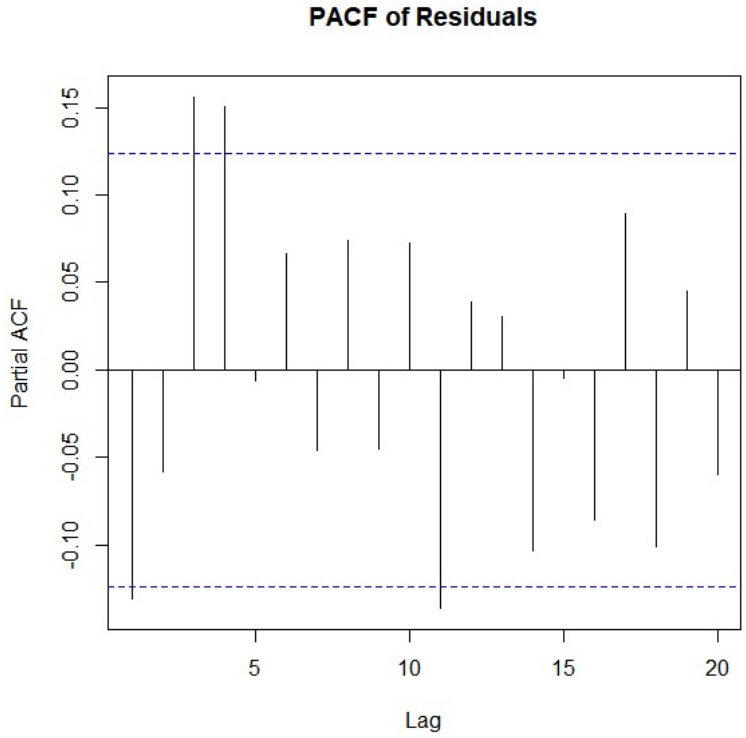
3- الترابط الذاتي للبواقي

```
> acf(z2.fit$residuals, lag.max=20, main="ACF of
Residuals")
```




4- الترابط الذاتي الجزئي للبواقي

```
> pacf(z2.fit$residuals, lag.max=20, main="PACF of
Residuals")
```




```
> Box.test(z2.fit$residuals, lag=20, type="Ljung-Box")

        Box-Ljung test
```

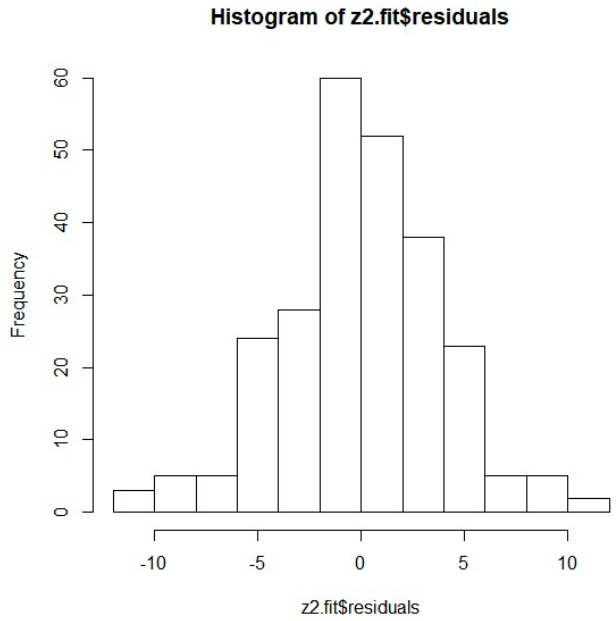
```
data:  z2.fit$residuals
X-squared = 34.349, df = 20, p-value = 0.02386
```

نلاحظ ان أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي تتبع أنماط متسلسلة الضجة البيضاء

5- إختبار طبيعية البواقي :

ا- نرسم المضلع التكراري للبواقي

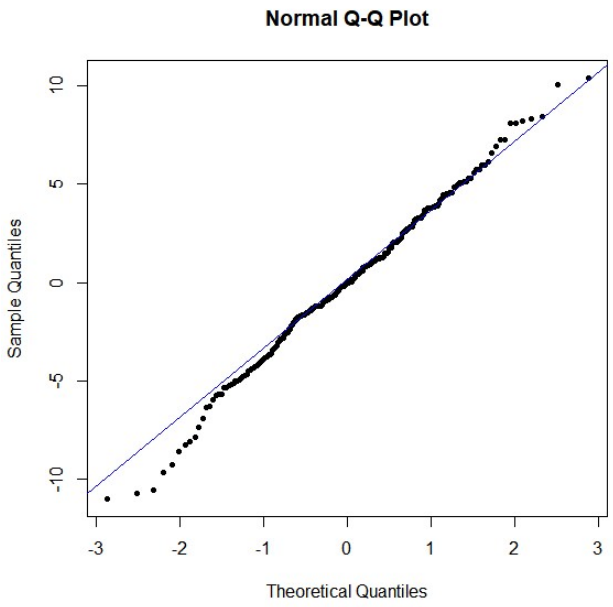
```
> hist(z2.fit$residuals)
```




نلاحظ أنه متناظر ولة شكل التوزيع الطبيعي تقريبا. وهذا لايكفي بل يجب ان ننظر الى:

ب- رسم الاحتمال الطبيعي Normal Probability Plot

```
> qqnorm(z2.fit$residuals, pch=20)
> qqline(z2.fit$residuals, col="blue")
```




واضح من الرسم أن البواقي طبيعية وللتأكد نقوم:

ج- بإختبار K-S Test لطبيعية البواقي

```
> ks.test(z2.fit$residuals, "pnorm")

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  z2.fit$residuals
D = 0.27256, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

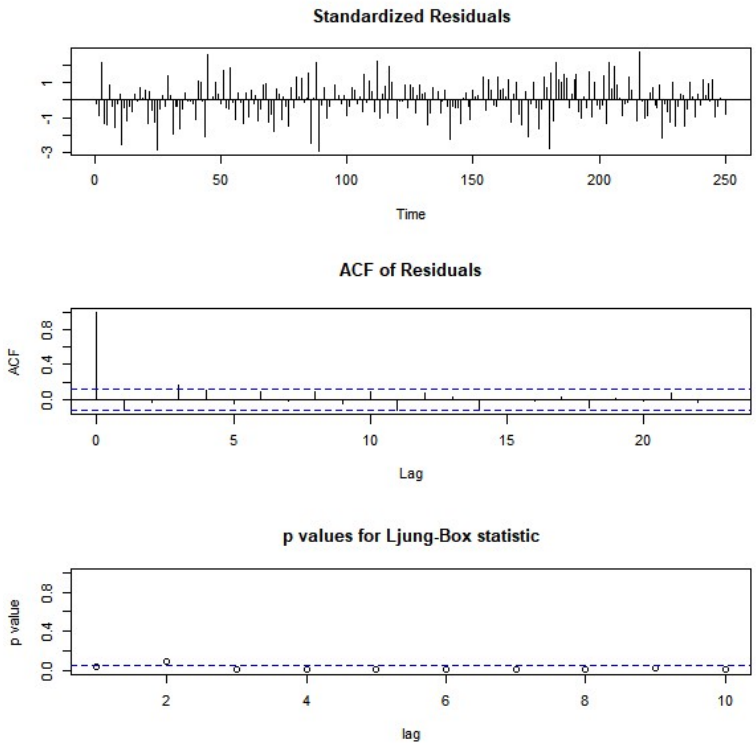
إختبار كولموجوروف-سميرنوف اعطى

$D = 0.27256$

الـ P-Value للإختبار هي أقل من 2.2e-16 وهي أقل من $\alpha = 0.05$ أي اننا نرفض الفرضية ان البواقي موزعة طبيعيا.

امر التالي يقوم بإعطاء إختصار رسمي (مخطط) لتشخيص النموذج

```
> tsdiag(z2.fit)
```



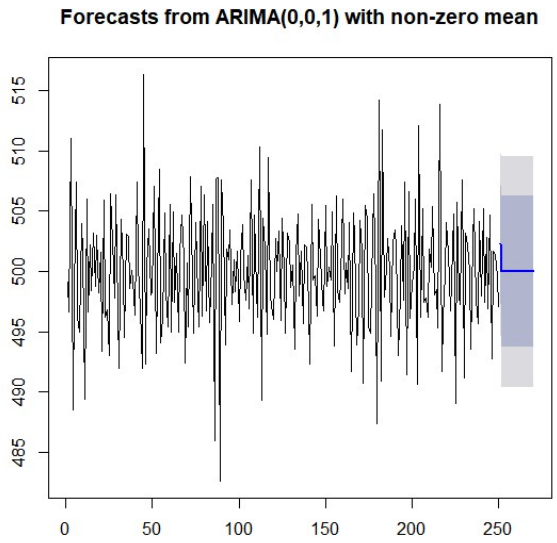

**<u>توليد تنبؤات:</u>**

استخدمنا النموذج للتنبؤ عن20 قيمة مستقبلية

```
> library("forecast")
> z2.f = forecast(z2 , model = z2.fit, h=20)
> z2.f
    Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
251       502.2491 497.3275 507.1708 494.7221 509.7762
252       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
253       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
254       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
255       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
256       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
257       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
258       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
259       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
260       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
261       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
262       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
263       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
264       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
265       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
266       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
267       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
268       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
269       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
270       499.9614 493.6954 506.2274 490.3784 509.5444
```

والرسم التالي يعطي التنبؤات مع فترات 95% تنبؤ

```
> plot(z2.f)
```




3- البيانات التالية لمتسلسلة زمنية مشاهدة

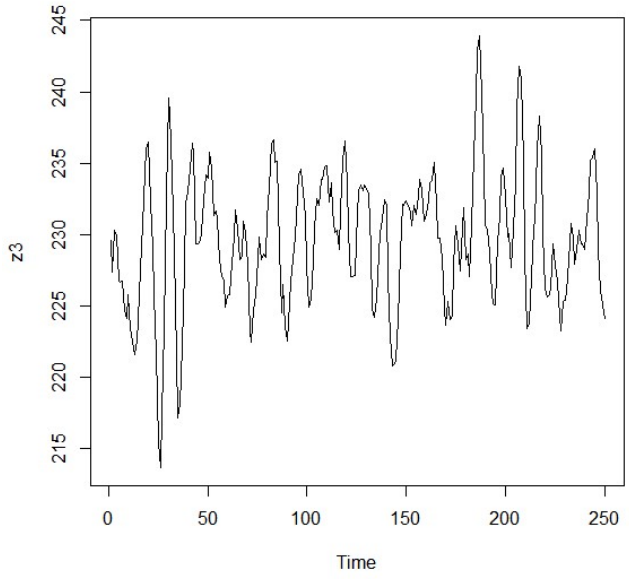
z(t)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 229.574 | 227.346 | 230.260 | 229.903 | 226.778 | 226.641 | 226.760 | 224.678 |
| 224.077 | 225.772 | 223.390 | 222.482 | 221.562 | 222.515 | 224.063 | 227.500 |
| 230.713 | 234.323 | 236.033 | 236.488 | 232.308 | 229.136 | 225.663 | 221.632 |
| 215.405 | 213.619 | 217.433 | 223.408 | 232.653 | 239.577 | 238.463 | 234.178 |
| 228.758 | 221.484 | 217.123 | 218.067 | 222.156 | 227.621 | 232.209 | 233.005 |
| 234.678 | 236.419 | 235.744 | 229.359 | 229.331 | 229.564 | 230.102 | 232.432 |
| 234.155 | 233.918 | 235.767 | 234.668 | 231.319 | 231.633 | 231.121 | 228.189 |
| 227.075 | 226.765 | 224.927 | 225.721 | 225.734 | 227.982 | 229.848 | 231.718 |
| 230.421 | 228.200 | 228.472 | 230.888 | 230.122 | 227.859 | 223.115 | 222.468 |
| 224.663 | 225.799 | 228.227 | 229.851 | 228.225 | 228.618 | 228.418 | 231.163 |
| 233.335 | 236.399 | 236.659 | 235.024 | 235.122 | 228.989 | 224.483 | 226.479 |
| 223.571 | 222.523 | 225.196 | 226.724 | 228.198 | 229.792 | 232.738 | 234.207 |
| 234.561 | 232.976 | 231.266 | 227.812 | 224.928 | 225.447 | 228.163 | 230.455 |
| 232.473 | 232.067 | 233.891 | 233.841 | 234.707 | 234.825 | 232.232 | 233.640 |
| 231.653 | 230.148 | 230.327 | 228.922 | 231.665 | 235.224 | 236.562 | 233.725 |

230.146 227.077 227.032 227.089 229.575 233.044 233.427 233.089
233.444 233.256 232.820 228.954 224.747 224.207 225.484 228.655
230.076 231.062 232.461 232.152 226.865 222.819 220.782 220.958
221.171 224.050 228.727 232.135 232.027 232.315 232.030 231.531
230.582 232.032 231.411 232.684 233.852 233.127 230.938 231.363
232.344 233.622 233.799 235.038 232.160 229.733 229.757 228.285
224.880 223.599 225.273 223.994 224.258 227.948 230.636 229.320
227.449 229.100 231.898 228.203 228.606 227.046 230.713 235.587
239.660 242.860 243.963 239.883 234.243 230.662 230.360 228.729
225.860 225.123 225.070 229.486 231.265 234.107 234.625 232.700
229.792 230.082 227.643 230.342 233.628 238.762 241.821 240.884
235.112 228.468 223.381 223.795 226.994 230.499 230.865 236.017
238.292 235.623 230.088 226.271 225.616 225.771 226.222 229.321
227.805 226.745 225.447 223.250 225.291 225.358 225.985 228.141
230.794 229.727 227.934 228.920 230.296 229.369 229.352 228.958
231.092 232.891 235.210 235.339 236.029 232.881 228.837 226.114
225.020 224.096

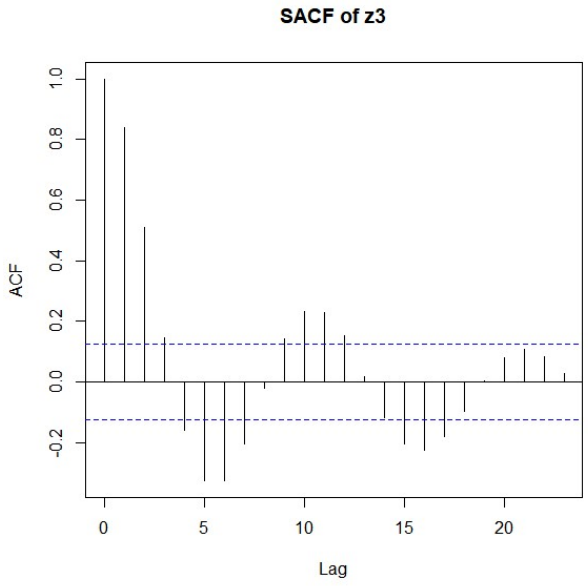
اولا نرسم المتسلسلة في مخطط زمني Time Plot

```
z3 = read.csv(file.choose(), header=F)
z3 <- ts(z3)
plot.ts(z3)
```



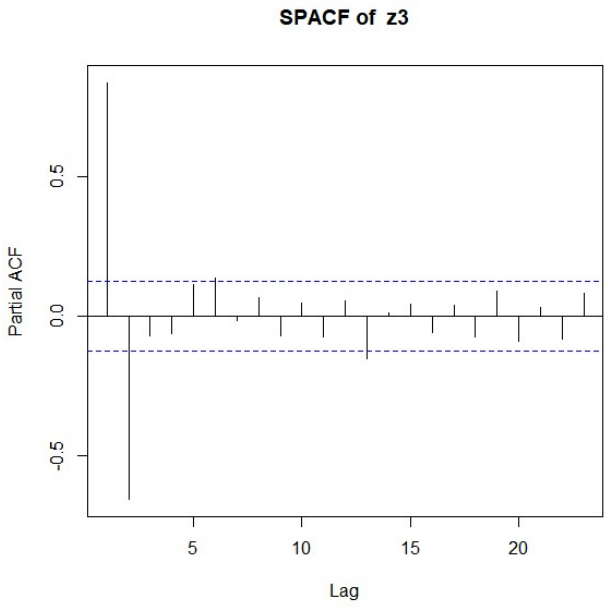

ثانيا نحسب ونرسم الترابط الذاتي العيني

```
> z3acf = acf( z3, plot=F)
> z3acf = acf(z3, main = "SACF of z3")
> z3acf

Autocorrelations of series ‘z3’, by lag

     0      1      2      3      4      5      6      7
8      9     10     11     12     13     14     15     16
17     18
 1.000  0.839  0.510  0.146 -0.159 -0.327 -0.326 -0.203 -
0.020  0.141  0.233  0.228  0.151  0.018 -0.119 -0.205 -
0.225 -0.181 -0.097
    19     20     21     22     23
 0.003  0.078  0.108  0.083  0.029
```




ثالثا نحسب ونرسم الترابط الذاتي الجزئي العيني

```
> z3pacf = pacf( z3, plot=F)
> z3pacf = pacf( z3, main = "SPACF of  z3")
> z3pacf

Partial autocorrelations of series ‘z3’, by lag

8      7      6      5      4      3      2      1
16     15     14     13     12     11     10     9
 19     18     17
- 0.067  0.014- 0.138  0.113  0.063- 0.072- 0.657- 0.839
0.059- 0.042  0.011  0.153- 0.057  0.075- 0.046  0.071
 0.091  0.072- 0.038
 23     22     21     20
 0.083  0.081- 0.034  0.088-
```




من أنماط الترابط الذاتي و الترابط الذاتي الجزئي العيني نلاحظ ان المتسلسلة تتبع نموذج AR(2) ولهذا نطبق النموذج المقترح علي المشاهدات

```
> z3.fit = arima( z3, order = c(2,0,0))
> z3.fit

Call:
arima(x = z3, order = c(2, 0, 0))

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      1.4023  -0.6667   229.6376
s.e.  0.0468   0.0468     0.4521

sigma^2 estimated as 3.577:  log likelihood = -515.27,
aic = 1038.54
>
```

ونستنتج التالي:

1- النموذج المقترح هو

$$z_t = 229.6376+1.4023z_{t-1} - 0.6667z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN(0,3.577)$$

2- المعالم المقدرة وإنحرافها المعياري و قيمة t لها هي:

$\hat{\phi}_1 = 1.4023, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.0468, \quad t = 29.96$

$\hat{\phi}_2 = -0.667, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_2\right) = 0.0468, \quad t = -14.25$

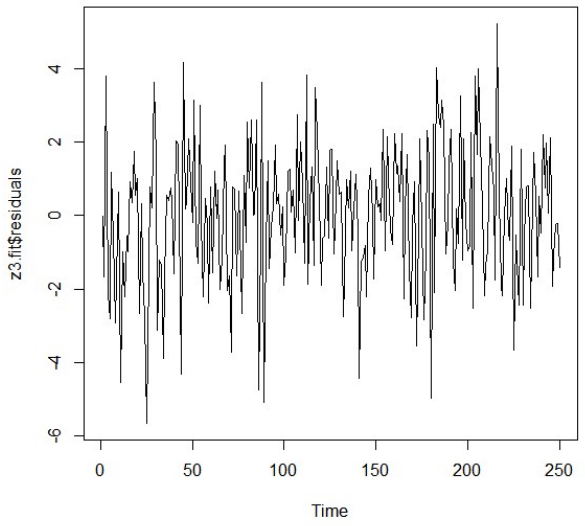
$\hat{\mu} = 229.638, \quad s.e.\left(\hat{\mu}\right) = 0.456$

$\hat{\sigma}^2 = 3.577, \quad with\ d.f. = 247$

**رابعا نفحص البواقي:**

رسم البواقي

```
> plot.ts( z3.fit$residuals)
```




1- إختبار متوسط البواقي

```
> t.test( z3.fit$residuals)

        One Sample t-test

data:  z3.fit$residuals
t = -0.030259, df = 249, p-value = 0.9759
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.2397015  0.2324477
sample estimates:
```

```
   mean of x
-0.003626923
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن المتوسط يساوي الصفر

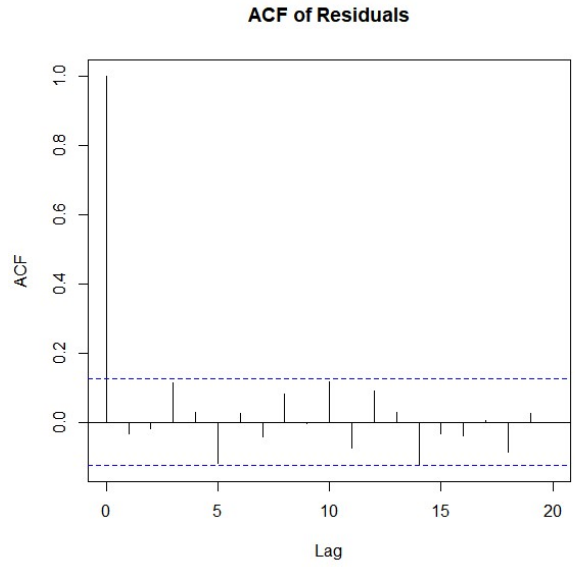
2- إختبار عشوائية البواقي

لانرفض الفرضية الصفرية بأن البواقي عشوائية

```
> library(randtests)

Attaching package: 'randtests'

The following object is masked from 'package:tseries':

    runs.test

> runs.test(z3.fit$residuals)

        Runs Test

data:  z3.fit$residuals
statistic = 0.12675, runs = 127, n1 = 125, n2 = 125, n =
250, p-value = 0.8991
alternative hypothesis: nonrandomness
```

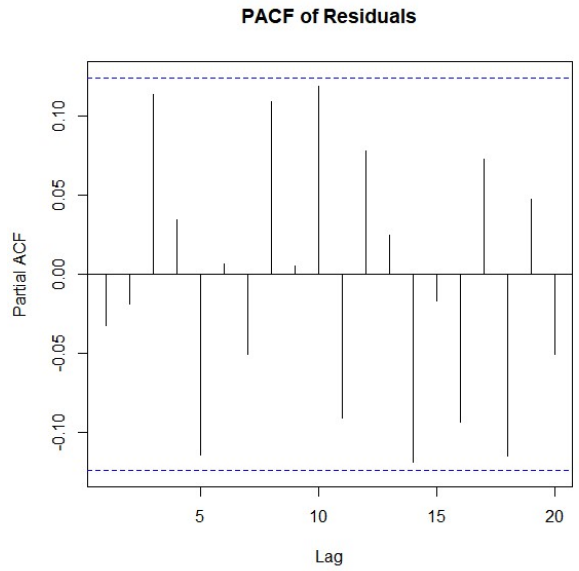
3- الترابط الذاتي للبواقي

```
> acf( z3.fit$residuals, lag.max=20, main="ACF of
Residuals")
```




4- الترابط الذاتي الجزئي للبواقي

```
> pacf( z3.fit$residuals, lag.max=20, main="PACF of Residuals")
```

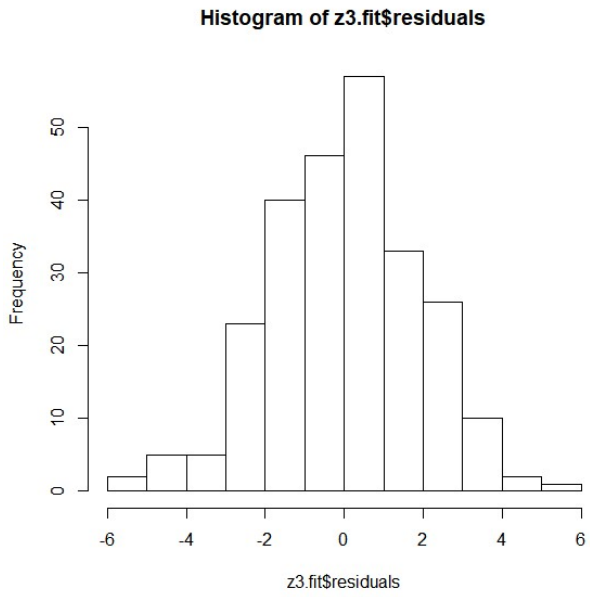



نلاحظ ان أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي تتبع أنماط متسلسلة الضجة البيضاء

5- إختبار طبيعية البواقي :

ا- نرسم المضلع التكراري للبواقي

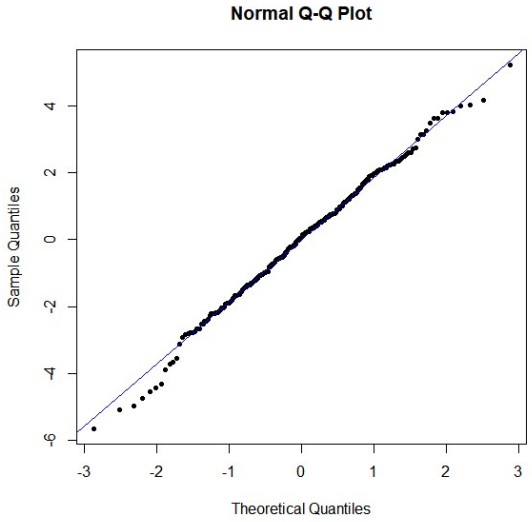
```
> hist( z3.fit$residuals)
```




نلاحظ أنه متناظر ولة شكل التوزيع الطبيعي تقريبا. وهذا لايكفي بل يجب ان ننظر الى:

ب- رسم الاحتمال الطبيعي Normal Probability Plot

```
> qqnorm( z3.fit$residuals, pch=20)
> qqline( z3.fit$residuals, col="blue")
```




واضح من الرسم أن البواقي طبيعية وللتأكد نقوم:

ج- بإختبار K-S Test لطبيعية البواقي

```
> ks.test( z3.fit$residuals, "pnorm")
```

```
        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  z3.fit$residuals
D = 0.15626, p-value = 9.972e-06
alternative hypothesis: two-sided
```

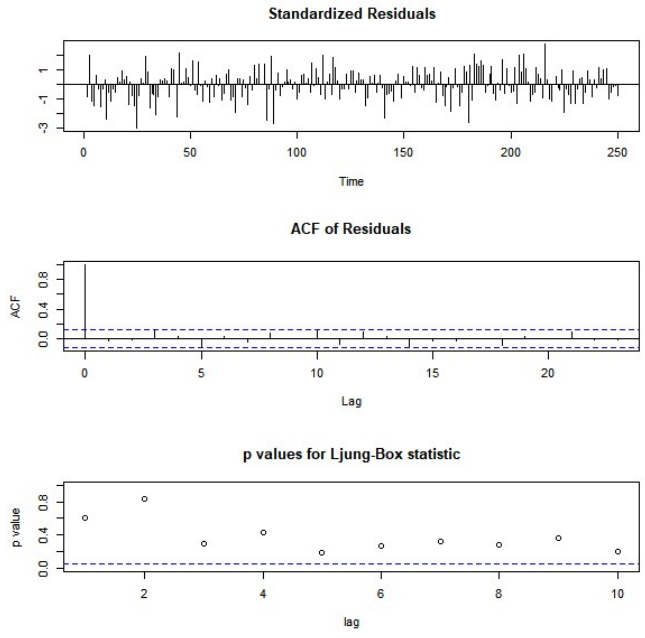
إختبار كولموجوروف-سميرنوف اعطى الـ P-Value للإختبار هي 9.97e-6 وهي أقل من $\alpha = 0.05$ أي اننا لانرفض فرضية طبيعية البواقي.

إختبار بوكس ليونج

```
> Box.test( z3.fit$residuals, lag=20, type="Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  z3.fit$residuals
X-squared = 24.325, df = 20, p-value = 0.2285
```

الإختبار التشخيصي للتطبيق

```
> tsdiag( z3.fit)
```



**توليد تنبؤات:**

```
> library(tseries)
```

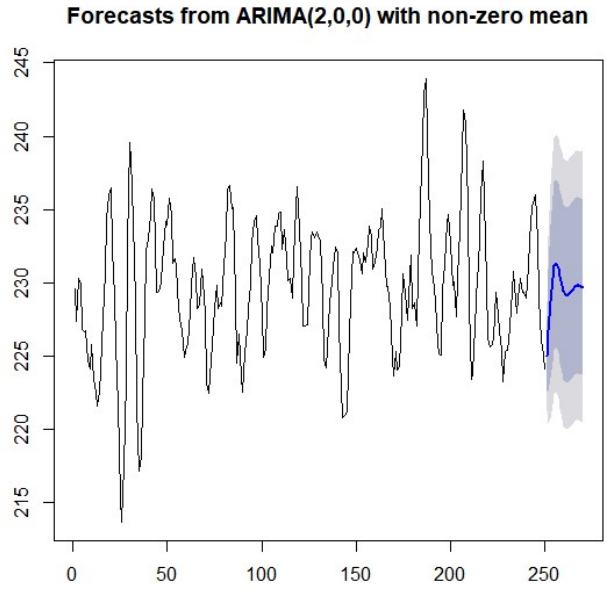
استخدمنا النموذج للتنبؤ عن 20 قيم مستقبلية

```
> z3.f = forecast( z3 , model =  z3.fit, h=20)
> z3.f
```

| | Point Forecast | Lo 80 | Hi 80 | Lo 95 | Hi 95 |
|---|---|---|---|---|---|
| 251 | 224.9449 | 222.5210 | 227.3689 | 221.2378 | 228.6520 |
| 252 | 226.7514 | 222.5766 | 230.9263 | 220.3665 | 233.1363 |
| 253 | 228.7187 | 223.4884 | 233.9490 | 220.7196 | 236.7178 |
| 254 | 230.2731 | 224.6173 | 235.9289 | 221.6233 | 238.9229 |
| 255 | 231.1414 | 225.4117 | 236.8712 | 222.3785 | 239.9043 |
| 256 | 231.3228 | 225.5911 | 237.0544 | 222.5569 | 240.0886 |
| 257 | 230.9982 | 225.2083 | 236.7881 | 222.1433 | 239.8531 |
| 258 | 230.4221 | 224.5377 | 236.3065 | 221.4227 | 239.4216 |
| 259 | 229.8307 | 223.8738 | 235.7876 | 220.7205 | 238.9410 |
| 260 | 229.3854 | 223.3985 | 235.3724 | 220.2292 | 238.5417 |
| 261 | 229.1552 | 223.1641 | 235.1463 | 219.9927 | 238.3178 |
| 262 | 229.1293 | 223.1376 | 235.1210 | 219.9657 | 238.2928 |
| 263 | 229.2464 | 223.2485 | 235.2442 | 220.0735 | 238.4193 |
| 264 | 229.4279 | 223.4214 | 235.4343 | 220.2418 | 238.6140 |
| 265 | 229.6043 | 223.5918 | 235.6169 | 220.4089 | 238.7997 |
| 266 | 229.7308 | 223.7160 | 235.7456 | 220.5319 | 238.9296 |
| 267 | 229.7904 | 223.7754 | 235.8055 | 220.5913 | 238.9896 |
| 268 | 229.7898 | 223.7747 | 235.8050 | 220.5905 | 238.9892 |
| 269 | 229.7492 | 223.7334 | 235.7650 | 220.5488 | 238.9495 |
| 270 | 229.6926 | 223.6760 | 235.7092 | 220.4911 | 238.8942 |

والرسم التالي يعطي التنبؤات و 95% فترات تنبؤ

```
> plot( z3.f)
```




الشكل يبين المتسلسلة الزمنية بكاملها مع التنبؤات.

**حالة دراسة:**

المتسلسلة التالية المتوسط اليومي لعدد التلفزيونات المعيبة في خط إنتاج مصنع ما (إقرأ سطرا بسطر)

Defects

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.20 | 1.50 | 1.54 | 2.70 | 1.95 | 2.40 | 3.44 | 2.83 | 1.76 | 2.00 |
| 2.09 | 1.89 | 1.80 | 1.25 | 1.58 | 2.25 | 2.50 | 2.05 | 1.46 | 1.54 |
| 1.42 | 1.57 | 1.40 | 1.51 | 1.08 | 1.27 | 1.18 | 1.39 | 1.42 | 2.08 |
| 1.85 | 1.82 | 2.07 | 2.32 | 1.23 | 2.91 | 1.77 | 1.61 | 1.25 | 1.15 |
| 1.37 | 1.79 | 1.68 | 1.78 | 1.84 | | | | | |

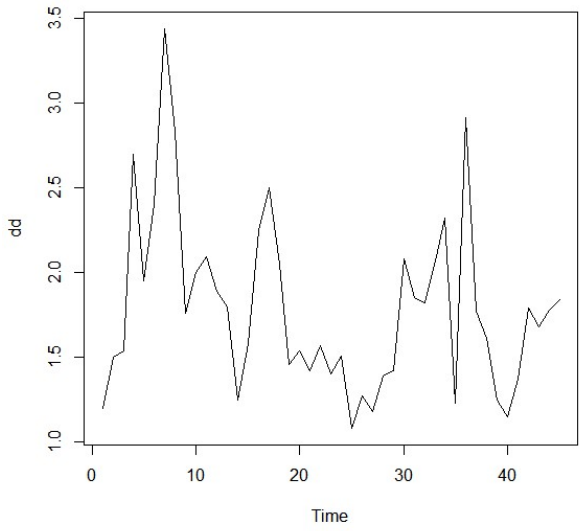
ندخل البيانات

```
> Defects <- c(1.20, 1.50, 1.54, 2.70, 1.95, 2.40, 3.44,
2.83, 1.76, 2.00, 2.09,1.89, 1.80, 1.25, 1.58, 2.25,
2.50, 2.05, 1.46, 1.54, 1.42, 1.57, 1.40, 1.51, 1.08,
1.27, 1.18, 1.39, 1.42, 2.08, 1.85, 1.82, 2.07, 2.32,
1.23, 2.91, 1.77, 1.61, 1.25, 1.15, 1.37, 1.79, 1.68,
1.78, 1.84)
```

نحولها لمتسلسلة زمنية ونرسمها

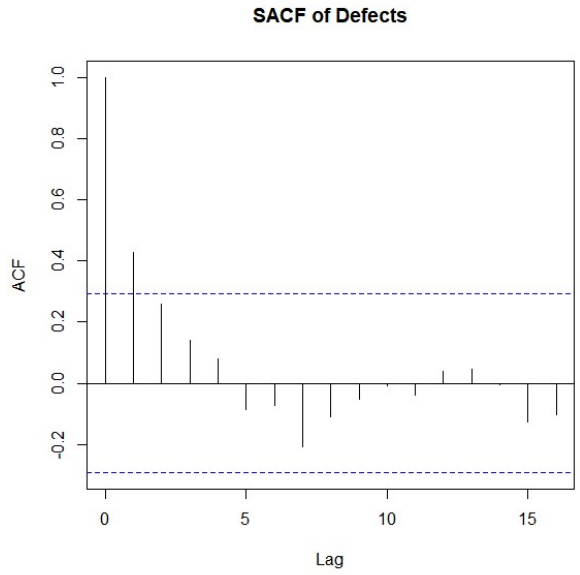
```
> dd <- ts(Defects)
> plot.ts(dd)
```

المخطط الزمني للمتسلسلة

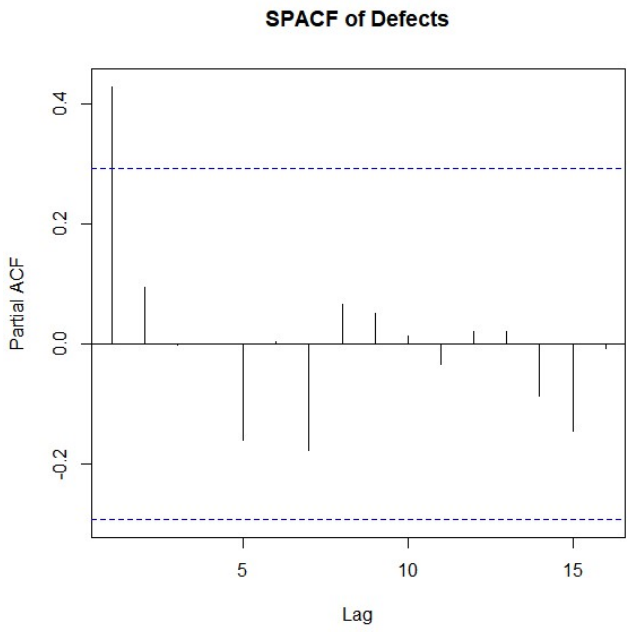



الترابط الذاتي والذاتي الجزئي

```
> ddacf = acf( dd, plot=F)
> ddacf = acf(dd, main = "SACF of Defects")
> ddacf

Autocorrelations of series ‘dd’, by lag

     0      1      2      3      4      5      6      7
8      9     10     11     12     13     14     15     16
 1.000  0.429  0.261  0.141  0.079 -0.085 -0.073 -0.207 -
0.110 -0.052 -0.007 -0.037  0.038  0.045 -0.003 -0.125 -
0.103
```




```
> ddpacf = pacf( dd, plot=F)
> ddpacf = pacf(dd, main = "SPACF of Defects")
> ddpacf

Partial autocorrelations of series ‘dd’, by lag

     1      2      3      4      5      6      7      8
9     10     11     12     13     14     15     16
 0.429  0.094 -0.001  0.000 -0.160  0.003 -0.177  0.066
0.052  0.013 -0.034  0.021  0.022 -0.086 -0.145 -0.008
```




لإختيار النموذج المناسب سوف نستخدم معيار المعلومات الذاتي $AIC$ والذي يعطى بالعلاقة:

$$AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج ونختار النموذج الذي يعطي $\min_m AIC(m)$

سوف نطبق النماذج علي التوالي:

```
> m1 <- arima(dd, c(1,0,0))
> m1

Call:
arima(x = dd, order = c(1,0,0))

Coefficients:
         ar1  intercept
      0.4322     1.7799
s.e.  0.1340     0.1189

sigma^2 estimated as 0.2118:  log likelihood = -29.04,
aic = 64.07
```

```
> m2 <- arima(dd, c(2,0,0))
> m2

Call:
arima(x = dd, order = c(2,0,0))

Coefficients:
         ar1     ar2  intercept
      0.3910  0.0945     1.7768
s.e.  0.1478  0.1473     0.1298

sigma^2 estimated as 0.2098:   log likelihood = -28.83,
aic = 65.66
> m3 <- arima(dd, c(0,0,1))
> m3

Call:
arima(x = dd, order = c(0,0,1))

Coefficients:
         ma1  intercept
      0.3357     1.7848
s.e.  0.1170     0.0937

sigma^2 estimated as 0.2238:   log likelihood = -30.23,
aic = 66.46
> m4 <- arima(dd, c(0,0,2))
> m4

Call:
arima(x = dd, order = c(0,0,2))

Coefficients:
         ma1     ma2  intercept
```

```
      0.3796  0.1765     1.7839
s.e.  0.1467  0.1263     0.1063

sigma^2 estimated as 0.2143:  log likelihood = -29.28,
aic = 66.56
> m5 <- arima(dd, c(1,0,1))
> m5

Call:
arima(x = dd, order = c(1,0,1))

Coefficients:
         ar1      ma1  intercept
      0.5858  -0.1894     1.7765
s.e.  0.2417   0.2866     0.1306

sigma^2 estimated as 0.21:  log likelihood = -28.85,  aic
= 65.69
> m6 <- arima(dd, c(2,0,1))
> m6

Call:
arima(x = dd, order = c(2,0,1))

Coefficients:
         ar1     ar2      ma1  intercept
      0.4047  0.0886  -0.0138     1.7767
s.e.  1.1869  0.5313   1.1883     0.1300

sigma^2 estimated as 0.2098:  log likelihood = -28.83,
aic = 67.66
> m7 <- arima(dd, c(1,0,2))
> m7
```

```
Call:
arima(x = dd, order = c(1,0,2))

Coefficients:
         ar1      ma1     ma2  intercept
      0.5430  -0.1543  0.0411     1.7767
s.e.  0.3397   0.3609  0.1855     0.1296

sigma^2 estimated as 0.2097:  log likelihood = -28.82,
aic = 67.65
> m8 <- arima(dd, c(2,0,2))
Warning message:
In arima(dd, c(2,0,2)) :
  possible convergence problem: optim gave code = 1
>
```

ونلخص ذلك بالجدول التالي:

| *Model* | $\hat{\sigma}^2$ | *m* | *AIC* |
|---|---|---|---|
| $AR(1)$ | 0.2118 | 3 | 64.07 |
| $AR(2)$ | 0.2098 | 4 | 65.66 |
| $MA(1)$ | 0.2238 | 3 | 66.46 |
| $MA(2)$ | 0.2143 | 4 | 66.56 |
| $ARMA(1,1)$ | 0.21 | 4 | 65.69 |
| $ARMA(2,1)$ | 0.2098 | 5 | 67.66 |
| $ARMA(1,2)$ | 0.2097 | 5 | 67.65 |
| $ARMA(2,2)$ | – | – | – |

$$\min_m AIC(m) = 64.07$$

أي ان أفضل نموذج هو AR(1) .

سوف نستخدم الدالة auto.arima( ) من مكتبة forecast لإيجاد نموذج مناسب بطريقة اوتوماتيكية

```
> m.aut <- auto.arima(dd)
```

```
> m.aut
Series: dd
ARIMA(1,0,0) with non-zero mean

Coefficients:
         ar1    mean
      0.4322  1.7799
s.e.  0.1340  0.1189

sigma^2 estimated as 0.2217:  log likelihood=-29.04
AIC=64.07   AICc=64.66   BIC=69.49
```

وهذا يتفق تماما مع الطريقة المطولة التي استخدمناها.

يترك للطالب كتمرين فحص البواقي وتوليد تنبؤات.

**<u>حالة دراسة:</u>**

المتسلسة التالية هي دخل المبيعات السنوية بملايين الريالات لشركة ما

Sales

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.49 | 5.74 | 5.51 | 3.99 | 3.45 | 4.77 | 4.14 | 4.60 | 3.80 | 5.43 |
| 3.96 | 2.54 | 4.05 | 6.16 | 3.78 | 5.07 | 5.42 | 3.91 | 4.30 | 3.88 |
| 2.89 | 4.61 | 4.08 | 4.05 | 3.28 | 2.65 | 1.22 | 3.98 | 3.45 | 3.57 |
| 2.52 | 1.58 | 4.00 | 5.14 | 3.84 | 4.40 | 3.08 | 5.43 | 4.80 | 2.75 |
| 5.77 | 4.99 | 4.31 | 6.46 | 6.11 | 4.79 | 5.65 | 5.52 | 6.12 | 6.06 |
| 3.20 | 5.05 | 6.23 | 6.12 | 4.99 | 4.89 | 4.78 | 5.67 | 6.08 | 5.80 |
| 5.13 | 7.07 | 8.02 | 6.36 | 5.75 | 5.70 | 5.61 | 5.63 | 5.71 | 5.16 |
| 7.20 | 6.87 | 7.56 | 6.57 | 6.08 | 4.72 | 6.09 | 6.64 | 7.49 | 6.64 |
| 7.26 | 7.22 | 6.69 | 7.49 | 9.01 | 7.27 | 5.62 | 7.59 | 7.53 | 6.43 |
| 6.42 | 8.22 | 7.67 | 7.53 | 7.23 | 8.50 | 8.27 | 8.75 | 7.50 | 7.86 |

ندخل المتسلسلة

```
> sales <- c(3.49, 5.74, 5.51, 3.99, 3.45, 4.77, 4.14,
4.60, 3.80, 5.43
+ , 3.96, 2.54, 4.05, 6.16, 3.78, 5.07, 5.42, 3.91, 4.30,
3.88
+ , 2.89, 4.61, 4.08, 4.05, 3.28, 2.65, 1.22, 3.98, 3.45,
3.57
```

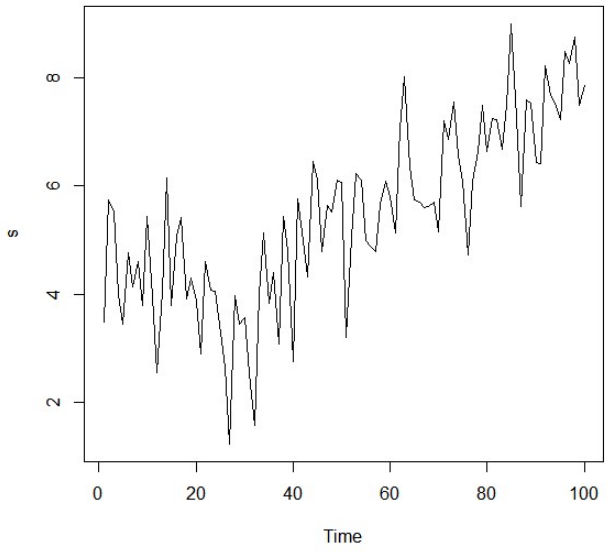
```
+ , 2.52, 1.58, 4.00, 5.14, 3.84, 4.40, 3.08, 5.43, 4.80,
2.75
+ , 5.77, 4.99, 4.31, 6.46, 6.11, 4.79, 5.65, 5.52, 6.12,
6.06
+ , 3.20, 5.05, 6.23, 6.12, 4.99, 4.89, 4.78, 5.67, 6.08,
5.80
+ , 5.13, 7.07, 8.02, 6.36, 5.75, 5.70, 5.61, 5.63, 5.71,
5.16
+ , 7.20, 6.87, 7.56, 6.57, 6.08, 4.72, 6.09, 6.64, 7.49,
6.64
+ , 7.26, 7.22, 6.69, 7.49, 9.01, 7.27, 5.62, 7.59, 7.53,
6.43
+ , 6.42, 8.22, 7.67, 7.53, 7.23, 8.50, 8.27, 8.75, 7.50,
7.86)
```

نحولها لمتسلسلة زمنية و نرسمها

```
> s <- as.ts(sales)
```

مخطط زمني للمتسلسلة

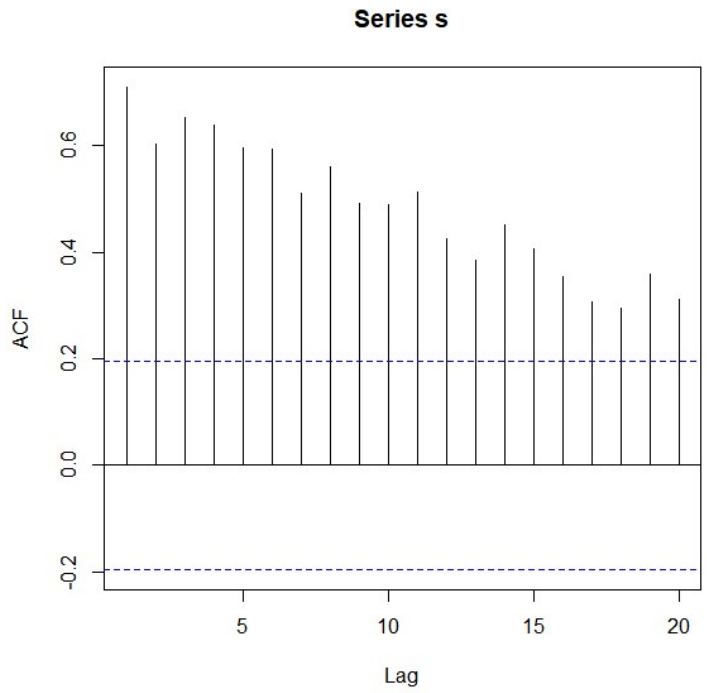
```
> plot.ts(s)
```



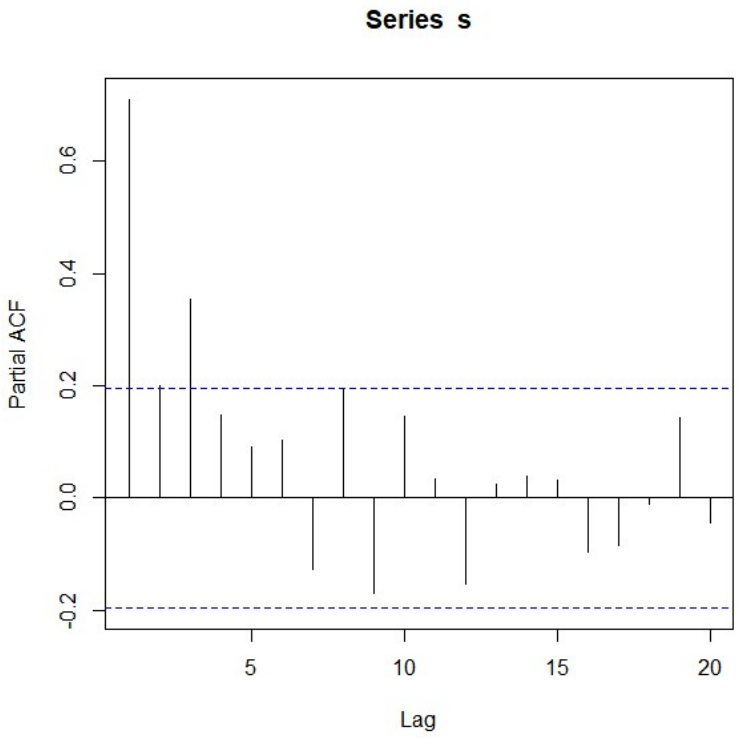

دوال الترابط الذاتي والذاتي الجزئي العينية

```
> acf(s, plot=F)

Autocorrelations of series 's', by lag

     1      2      3      4      5      6      7      8      9
10     11     12     13     14     15     16
```

```
0.710 0.603 0.653 0.637 0.595 0.594 0.511 0.560 0.492
0.490 0.512 0.425 0.384 0.451 0.406 0.354
   17    18    19    20
0.308 0.295 0.360 0.311
>
```



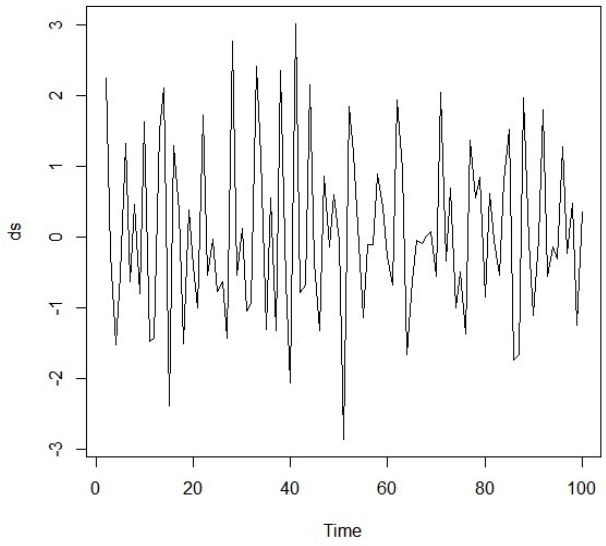

```
> pacf(s, plot=F)

Partial autocorrelations of series 's', by lag

     1      2      3      4      5      6      7      8
9     10     11     12     13
 0.710  0.199  0.353  0.149  0.092  0.103 -0.127  0.193 -
0.170  0.144  0.034 -0.152  0.025
    14     15     16     17     18     19     20
 0.039  0.032 -0.096 -0.084 -0.010  0.143 -0.044
> pacf(s)
>
```




دالة الترابط الذاتي العيني تدل على تخامد بطيئ مما قد يدل على عدم إستقرار في المتوسط.

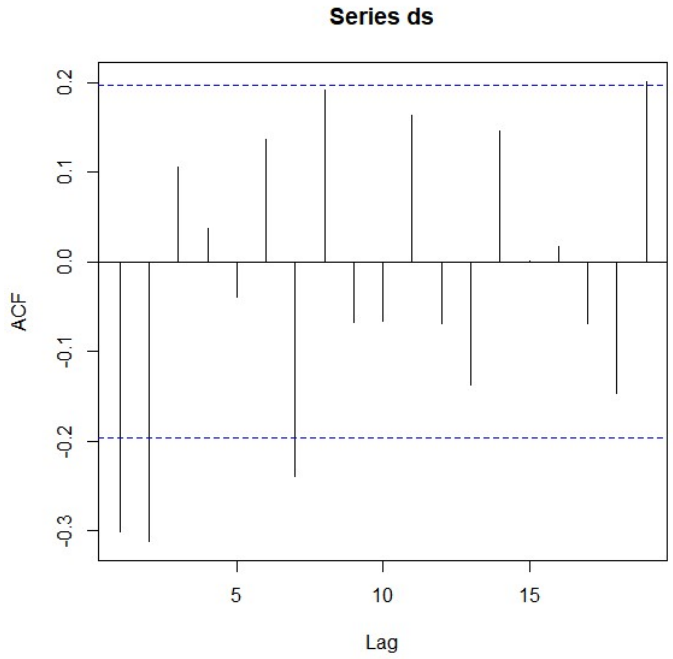
لنجرب التفريق الأول للمتسلسلة $w_t = \nabla z_t$ ونرسمها

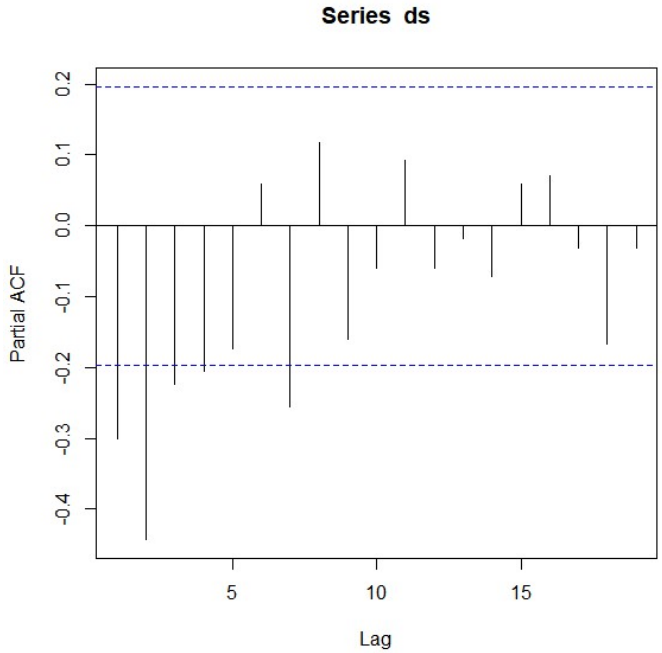
```
> ds <- diff(s)
> plot.ts(ds)
```



تبدو المتسلسلة مستقرة الآن. دوال الترابط الذاتي والذاتي الجزئي للمتسلسلة المستقرة

```
> acf(ds)
> pacf(ds)
```



لإختيار النموذج المناسب سوف نستخدم معيار المعلومات الذاتي $AIC$ والذي يعطى بالعلاقة:

$$AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج ونختار النموذج الذي يعطي $\min_m AIC(m)$

سوف نطبق النماذج علي التوالي:

```
> library(tseries)
> library(randtests)
> m1 <- arima(sales, c(1,1,0))
> m2 <- arima(sales, c(2,1,0))
> m3 <- arima(sales, c(0,1,1))
> m4 <- arima(sales, c(0,1,2))
> m5 <- arima(sales, c(1,1,1))
> m6 <- arima(sales, c(2,1,1))
> m7 <- arima(sales, c(1,1,2))
> m8 <- arima(sales, c(2,1,2))
> m1

Call:
arima(x = sales, order = c(1, 1, 0))

Coefficients:
          ar1
      -0.3081
s.e.   0.0968

sigma^2 estimated as 1.349:  log likelihood = -155.35,
aic = 314.71
> m2

Call:
arima(x = sales, order = c(2, 1, 0))
```

```
Coefficients:
          ar1      ar2
      -0.4485  -0.4560
s.e.   0.0909   0.0903

sigma^2 estimated as 1.07:   log likelihood = -144.13,
aic = 294.26
> m3

Call:
arima(x = sales, order = c(0, 1, 1))

Coefficients:
          ma1
      -0.7569
s.e.   0.0617

sigma^2 estimated as 1.034:   log likelihood = -142.55,
aic = 289.11
> m4

Call:
arima(x = sales, order = c(0, 1, 2))

Coefficients:
          ma1      ma2
      -0.5709  -0.2011
s.e.   0.1237   0.1212

sigma^2 estimated as 1.009:   log likelihood = -141.33,
aic = 288.66
> m5

Call:
```

```
arima(x = sales, order = c(1, 1, 1))

Coefficients:
         ar1      ma1
      0.1306  -0.7979
s.e.  0.1222   0.0641

sigma^2 estimated as 1.022:  log likelihood = -141.98,
aic = 289.95
> m6

Call:
arima(x = sales, order = c(2, 1, 1))

Coefficients:
         ar1      ar2      ma1
      0.0224  -0.3057  -0.6546
s.e.  0.1338   0.1137   0.1153

sigma^2 estimated as 0.9564:  log likelihood = -138.76,
aic = 285.51
> m7

Call:
arima(x = sales, order = c(1, 1, 2))

Coefficients:
          ar1      ma1      ma2
      -0.3453  -0.2396  -0.4451
s.e.   0.2230   0.1935   0.1395

sigma^2 estimated as 0.9897:  log likelihood = -140.38,
aic = 288.76
> m8
```

```
Call:
arima(x = sales, order = c(2, 1, 2))

Coefficients:
          ar1      ar2      ma1      ma2
      -0.0708  -0.2869  -0.5556  -0.0852
s.e.   0.4237   0.1456   0.4404   0.3710

sigma^2 estimated as 0.956:  log likelihood = -138.73,
aic = 287.47
```

ونلخص ذلك بالجدول التالي:

| *Model* | $\hat{\sigma}^2$ | $m$ | *AIC* |
|---|---|---|---|
| $ARI(1,1)$ | 1.349 | 2 | 314.71 |
| $ARI(2,1)$ | 1.07 | 3 | 294.26 |
| $IMA(1,1)$ | 1.034 | 2 | 289.11 |
| $IMA(1,2)$ | 1.009 | 3 | 288.66 |
| $ARIMA(1,1,1)$ | 1.022 | 3 | 289.95 |
| $ARIMA(2,1,1)$ | 0.9564 | 4 | 285.51 |
| $ARIMA(1,1,2)$ | 0.9897 | 4 | 288.76 |
| $ARIMA(2,1,2)$ | 0.956 | 5 | 287.47 |

$$\min_m AIC(m) = 285.51$$

أي ان أفضل نموذج هو ARIMA(2,1,1) .

بإستخدام auto.arima( ) من مكتبة forecast

```
> m.aut <- auto.arima(sales)
> m.aut
Series: sales
ARIMA(2,1,1)

Coefficients:
```

```
          ar1      ar2      ma1
      0.0224  -0.3057  -0.6546
s.e.  0.1338   0.1137   0.1153

sigma^2 estimated as 0.9863:  log likelihood=-138.76
AIC=285.51   AICc=285.94   BIC=295.89
```

مما يتفق مع الطريقة المطولة السابقة.

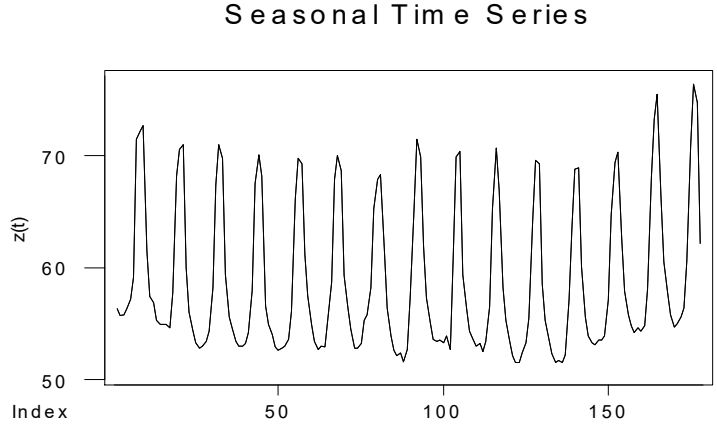
يترك للطالب كتمرين فحص البواقي وتوليد تنبؤات.

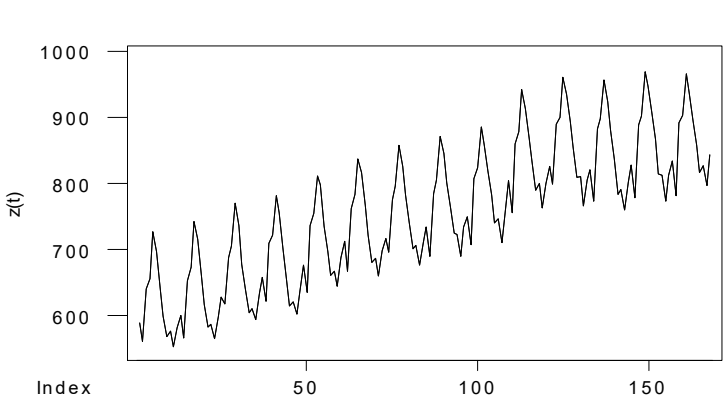
# الفصل السادس

## نماذج الإنحدار الذاتي التكاملي المتوسط المتحرك الموسمية

## Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average Models

المتسلسلات الزمنية الموسمية تعطي انماط متشابهة تتكرر على فترات زمنية متساوية البعد مثل ان يتكرر النمط كل اربعة وعشرون ساعة او كل سبعة ايام او كل شهر او ثلاثة اشهر او سنة.
الأشكال التالية تبين مثل هذه المتسلسلات




في هذا الفصل سوف نستعرض خواص المتسلسلات الزمنية الموسمية وطرق نمذجتها بواسطة نماذج الإنحدار الذاتي التكاملي المتوسط المتحرك $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ فمثلا النموذج $SARIMA(0,1,1)(1,1,0)_{12}$ يكتب على الشكل

$$\left(1-\Phi_1 B^s\right)(1-B)z_t = (1-\theta_1 B)a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

وبشكل عام فإن نموذج الإنحدار الذاتي التكاملي المتوسط المتحرك بالدرجة $(p,d,q)(P,D,Q)_s$ SARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)_s$ يكتب على الشكل

$$\phi_p(B)\Phi_P\left(B^s\right)(1-B)^d\left(1-B^s\right)^D z_t = \delta + \theta_q(B)\Theta_Q\left(B^s\right)a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

حيث $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ عمال الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك غير الموسمية والتي مرت علينا سابقا و $\Phi_P\left(B^s\right)=1+\Phi_1 B^s+\Phi_2 B^{2s}+\cdots+\Phi_P B^{Ps}$ عامل الإنحدار الذاتي الموسمي و $\Theta_Q\left(B^s\right)=1+\Theta_1 B^s+\Theta_2 B^{2s}+\cdots+\Theta_Q B^{Qs}$ عامل المتوسط المتحرك الموسمي ويسمى هذا بالنموذج الموسمي التضاعفي Multiplicative Seasonal Models.

ملاحظة: في جميع النماذج القادمة سيكون مفهوما ضمنيا أن $a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$

**<u>دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لبعض النماذج الموسمية:</u>**

في الإشتقاقات التالية سوف نستخدم المتسلسلة الموسمية المستقرة $w_t = (1-B)^d\left(1-B^s\right)^D z_t$ والتي تتبع النموذج SARMA$(p,q)(P,Q)_s$

$$\phi_p(B)\Phi_P\left(B^s\right)w_t = \delta + \theta_q(B)\Theta_Q\left(B^s\right)a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

سوف نشتق دالة الترابط الذاتي للنموذج الموسمي التضاعفي SARMA$(0,1)(1,1)_{12}$

$$w_t = \Phi w_{t-12} + a_t - \theta a_{t-1} - \Theta a_{t-12} + \theta\Theta a_{t-13}, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

بضرب طرفي المعادلة المعرفة في $w_t$ وأخذ التوقع نجد

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \Phi\gamma_{12} + \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 - \Theta(\Phi-\Theta)\sigma^2 + \theta\Theta(-\Phi\theta+\theta\Theta)\sigma^2\\ &= \Phi\gamma_{12} + \sigma^2\left[\left(1+\theta^2\right) + \Theta(\Phi-\Theta)\left(1+\theta^2\right)\right]\\ &= \Phi\gamma_{12} + \sigma^2\left(1+\theta^2\right)\left[1+\Theta(\Phi-\Theta)\right]\end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة المعرفة في $w_{t-12}$ وأخذ التوقع نجد

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= \Phi\gamma_0 - \Theta\sigma^2 + \theta\Theta(-\theta)\sigma^2\\ &= \Phi\gamma_0 - \Theta\sigma^2\left(1+\theta^2\right)\end{aligned}$$

وبحل العلاقتين السابقتين نجد

$$\gamma_0 = \sigma^2\left(1+\theta^2\right)\frac{1+\Theta^2-2\Phi\Theta}{1-\Phi^2}$$

$$\gamma_{12} = \sigma^2\left(1+\theta^2\right)\left[\Phi-\Theta+\frac{\Phi(\Theta-\Phi)^2}{1-\Phi^2}\right]$$

أيضا

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E\left(w_t w_{t-1}\right)\\ &=\Phi\gamma_{11}-\theta\sigma^2-\Theta E\left(a_{t-12}w_{t-1}\right)+\theta\Theta E\left(a_{t-13}w_{t-1}\right)\\ &=\Phi\gamma_{11}-\theta\sigma^2+\theta\Theta\left(\Phi-\Theta\right)\sigma^2\end{aligned}$$

و

$$\gamma_{11} = E\left(w_t w_{t-11}\right) = \Phi\gamma_1 + \Theta\theta\sigma^2$$

وبحل العلاقتين السابقتين نجد

$$\gamma_1 = -\theta\sigma^2\left[1+\frac{\left(\Theta-\Phi\right)^2}{1-\Phi^2}\right]$$

$$\gamma_{11} = \theta\sigma^2\left[\Theta-\Phi-\frac{\Phi\left(\Theta-\Phi\right)^2}{1-\Phi^2}\right]$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن

$$\gamma_2=\gamma_3=\cdots=\gamma_{10}=0$$

$$\gamma_{13}=\gamma_{11}$$

$$\gamma_k=\Phi\gamma_{k-12},\quad k>13$$

ومن جميع العلاقات السابقة نوجد دالة الترابط الذاتي

$$\rho_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_0}=\begin{cases}1, & k=0\\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1\\ 0, & k=2,...,10\\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2}\dfrac{\left(\Theta-\Phi\right)\left(1-\Phi\Theta\right)}{1+\Theta^2-2\Phi\Theta}, & k=11\\ -\dfrac{\left(\Theta-\Phi\right)\left(1-\Phi\Theta\right)}{1+\Theta^2-2\Phi\Theta}, & k=12\\ \rho_{11}, & k=13\\ \Phi\rho_{k-12}, & k>13\end{cases}$$

**دوال الترابط الذاتي لبعض النماذج الموسمية:**

1- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,0)(0,D,1)_s$ $w_t = (1-\Theta B^s)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=s \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

2- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,0)(1,D,1)_s$ $(1-\Phi B^s)w_t = a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \Phi^{k/s}, & k=s,2s,... \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

3- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,1)(0,D,1)_s$ $w_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^s)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ \dfrac{\theta\Theta}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)}, & k=s-1 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=s \\ \rho_{s-1}, & k=s+1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

4- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,0)(1,D,1)_s$ $(1-\Phi B^s)w_t = (1-\Theta B^s)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{(\Theta-\Phi)(1-\Phi\Theta)}{1+\Theta^2-2\Phi\Theta}\Phi^{k/s-1}, & k=s,2s,... \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

5- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,1)(1,D,0)_s$ $(1-\Phi B^s)w_t = (1-\theta B)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, & k=2,...,s-2 \\ -\dfrac{\theta\Phi}{1+\theta^2}, & k=s-1 \\ \Phi, & k=s \\ \rho_{s-1}, & k=s+1 \\ \Phi\rho_{k-s}, & k>s+1 \end{cases}$$

6- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,2)(0,D,1)_s$ $w_t = \left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2\right)\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$

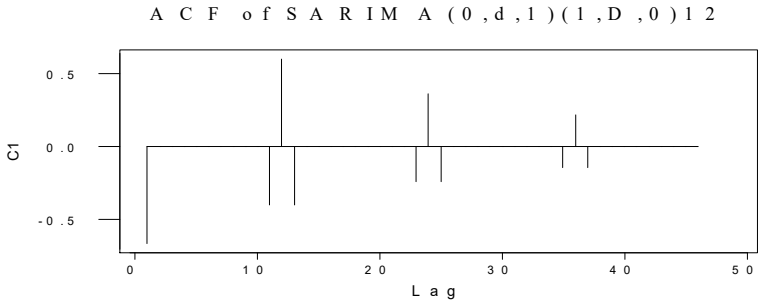
$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta_1\left(1-\theta_2\right)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=1 \\ -\dfrac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=2 \\ \dfrac{\theta_2\Theta}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\left(1+\Theta^2\right)}, & k=s-2 \\ \dfrac{\theta_1\Theta\left(1-\theta_2\right)}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\left(1+\Theta^2\right)}, & k=s-1 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=s \\ \rho_{s-1}, & k=s+1 \\ \rho_{s-2}, & k=s+2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

سوف نستعرض بعض الرسومات لدالة الترابط الذاتي للمتسلسلات الزمنية الموسمية لأعطاء فكرة عن أشكالها.

الأشكال التالية لنموذج $\text{SARIMA}(0,d,1)(1,D,0)_{12}$ :

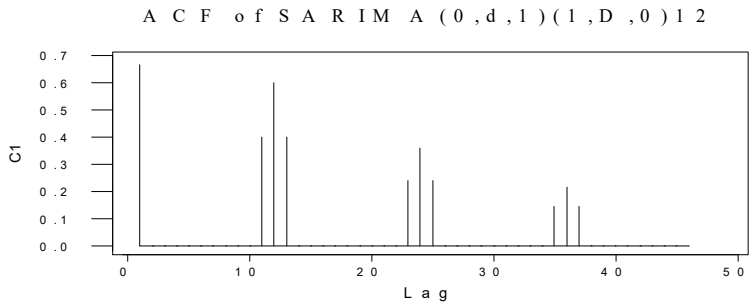
شكل (1)

$\Phi = 0.6, \quad \theta = 0.5$



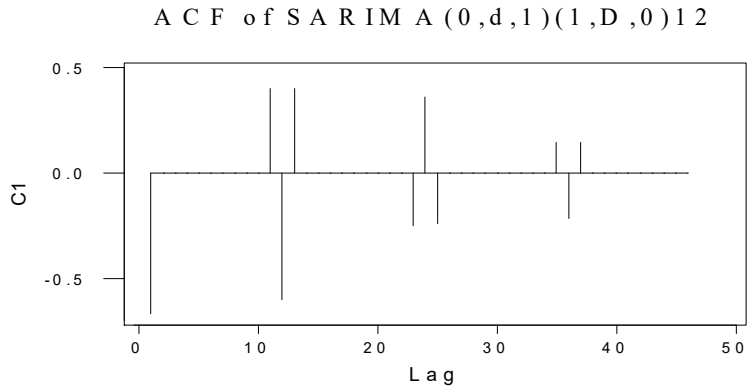

شكل ( 2)

$\Phi = 0.6, \quad \theta = -0.5$



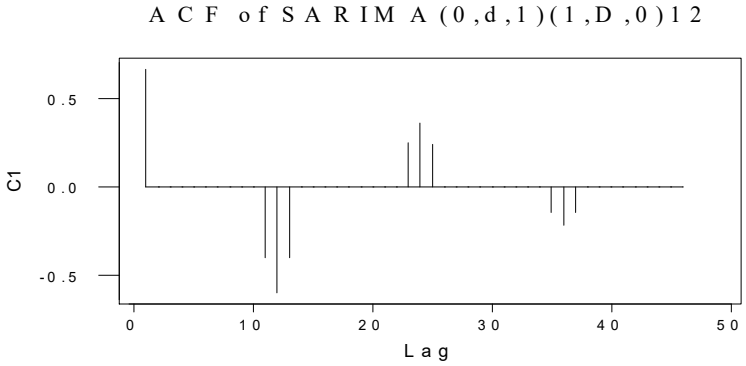

شكل (3)

$\Phi = -0.6, \quad \theta = 0.5$



شكل (4)

$$\Phi = -0.6, \quad \theta = -0.5$$



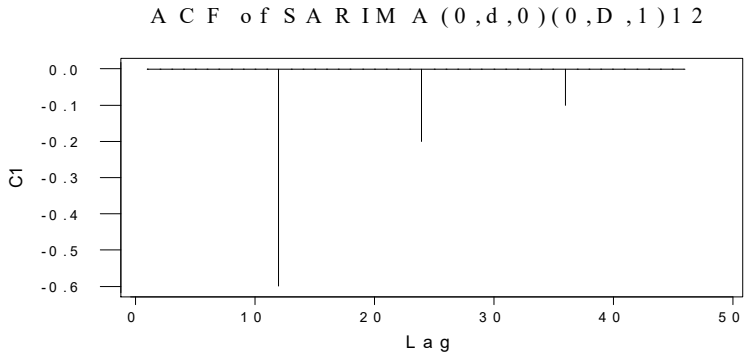

**<u>دالة الترابط الذاتي الجزئي للنموذج الموسمي التضاعفي:</u>**

من الصعوبة إشتقاق وتفسير أنماط دالة الترابط الذاتي الجزئي للنماذج الموسمية التضاعفية ولكنها وبشكل عام فإن أجزاء النموذج الموسمية وغير الموسمية والتي تنمذج المتوسط المتحرك تعطي تخامدات اسية وتخامدات جيبية عند التخلفات الموسمية وغيرالموسمية وفي النماذج التي تحوي إنحدار ذاتي فإن الترابطات الذاتية الجزئية تعطي قطعا cut off .

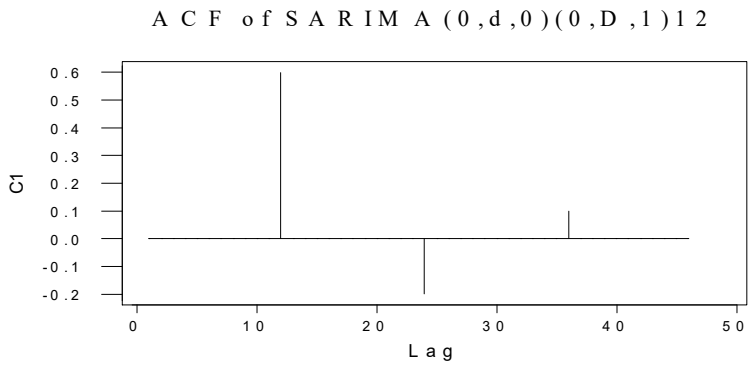
الأشكال التالية لإعطاء فكرة عن بعض دوال الترابط الذاتي الجزئي لبعض النماذج :

1- شكل دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $w_t = \left(1 - \Theta B^{12}\right) a_t$

أ) $\Theta = 0.6$

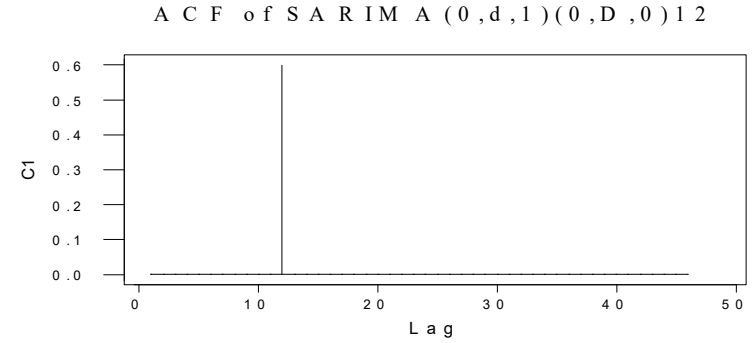



ب) $\Theta = -0.6$

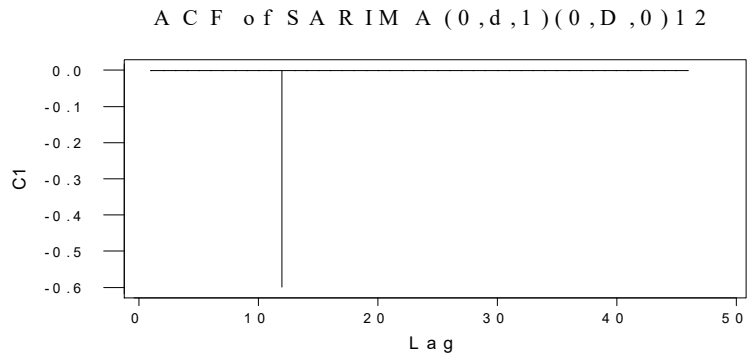



2- شكل دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $\left(1-\Phi B^{12}\right)w_t = a_t$

أ) $\Phi = 0.6$




ب) $\Phi = -0.6$




**<u>أمثلة: للمتسلسلة الزمنية الموسمية</u>** (في جميع الأمثلة التالية إقرأ سطرا بسطر)

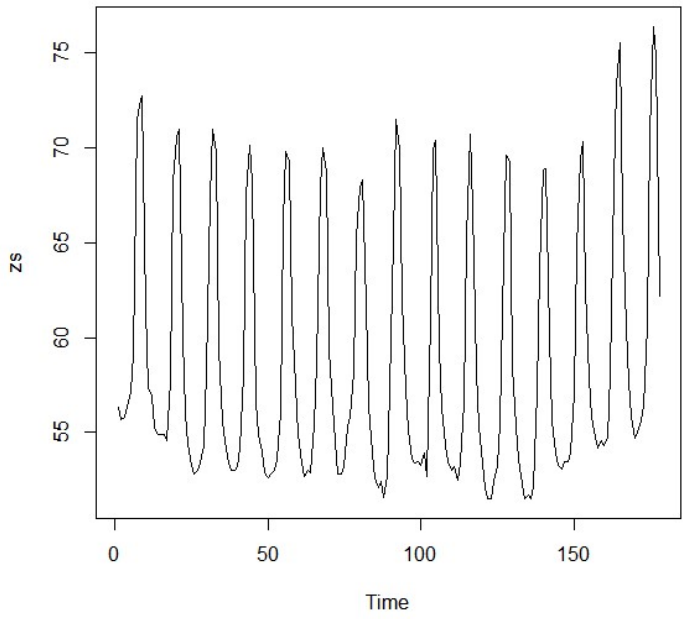
z(t)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56.3 | 55.7 | 55.8 | 56.3 | 57.2 | 59.1 | 71.5 | 72.2 | 72.7 | 61.5 | 57.4 | 56.9 |
| 55.3 | 54.9 | 54.9 | 54.9 | 54.6 | 57.7 | 68.2 | 70.6 | 71.0 | 60.0 | 56.0 | 54.4 |
| 53.3 | 52.8 | 53.0 | 53.4 | 54.3 | 58.2 | 67.4 | 71.0 | 69.8 | 59.4 | 55.6 | 54.6 |

53.4 53.0 53.0 53.2 54.2 58.0 67.5 70.1 68.2 56.6 54.9 54.0
52.9 52.6 52.8 53.0 53.6 56.1 66.1 69.8 69.3 61.2 57.5 54.9
53.4 52.7 53.0 52.9 55.4 58.7 67.9 70.0 68.7 59.3 56.4 54.5
52.8 52.8 53.2 55.3 55.8 58.2 65.3 67.9 68.3 61.7 56.4 53.9
52.6 52.1 52.4 51.6 52.7 57.3 65.1 71.5 69.9 61.9 57.3 55.1
53.6 53.4 53.5 53.3 53.9 52.7 61.0 69.9 70.4 59.4 56.3 54.3
53.5 53.0 53.2 52.5 53.4 56.5 65.3 70.7 66.9 58.2 55.3 53.4
52.1 51.5 51.5 52.4 53.3 55.5 64.2 69.6 69.3 58.5 55.3 53.6
52.3 51.5 51.7 51.5 52.2 57.1 63.6 68.8 68.9 60.1 55.6 53.9
53.3 53.1 53.5 53.5 53.9 57.1 64.7 69.4 70.3 62.6 57.9 55.8
54.8 54.2 54.6 54.3 54.8 58.1 68.1 73.3 75.5 66.4 60.5 57.7
55.8 54.7 55.0 55.6 56.4 60.6 70.8 76.4 74.8 62.2

```
> zs <- as.ts(zs)
> plot.ts(zs)
```

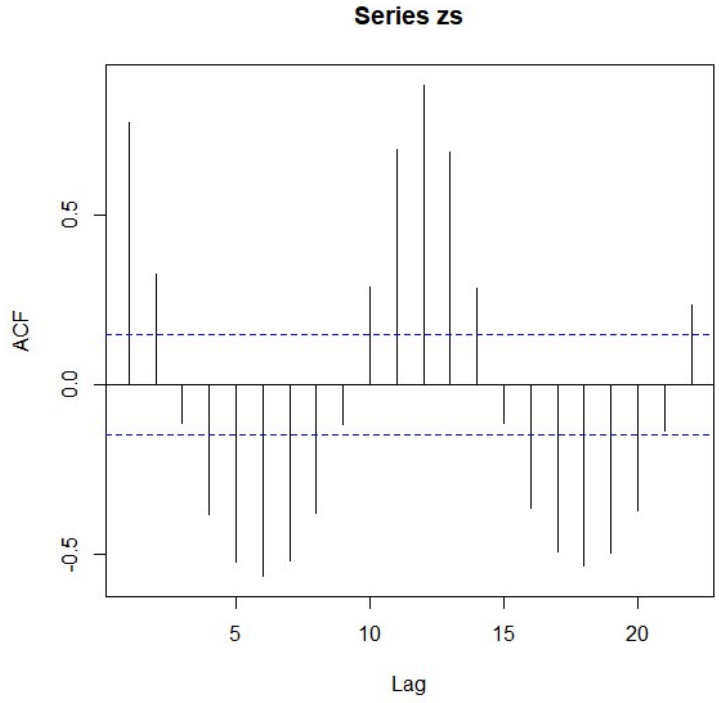
شكل المتسلسلة هو




دالة الترابط الذاتي

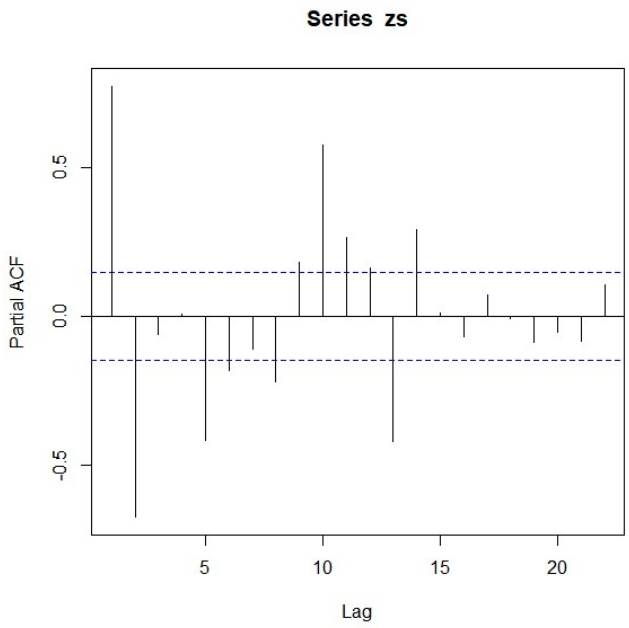
```
> acf(zs)
```

```
> acf(zs, plot=F)

Autocorrelations of series 'zs', by lag

     1      2      3      4      5      6      7      8
9     10     11     12     13
 0.773  0.325 -0.115 -0.384 -0.522 -0.564 -0.518 -0.378 -
0.116  0.288  0.691  0.882  0.682
    14     15     16     17     18     19     20     21
22
 0.282 -0.115 -0.362 -0.491 -0.532 -0.495 -0.372 -0.137
0.233
```




والترابط الذاتي الجزئي

```
> pacf(zs)
> pacf(zs, plot=F)

Partial autocorrelations of series 'zs', by lag

     1      2      3      4      5      6      7      8
9     10     11     12     13
 0.773 -0.675 -0.062  0.006 -0.416 -0.184 -0.111 -0.222
0.179  0.573  0.263  0.162 -0.421
    14     15     16     17     18     19     20     21
22
 0.291  0.012 -0.069  0.071 -0.008 -0.086 -0.054 -0.083
0.103
```




نلاحظ الأنماط الموسمية واضحة في الأشكال السابقة.

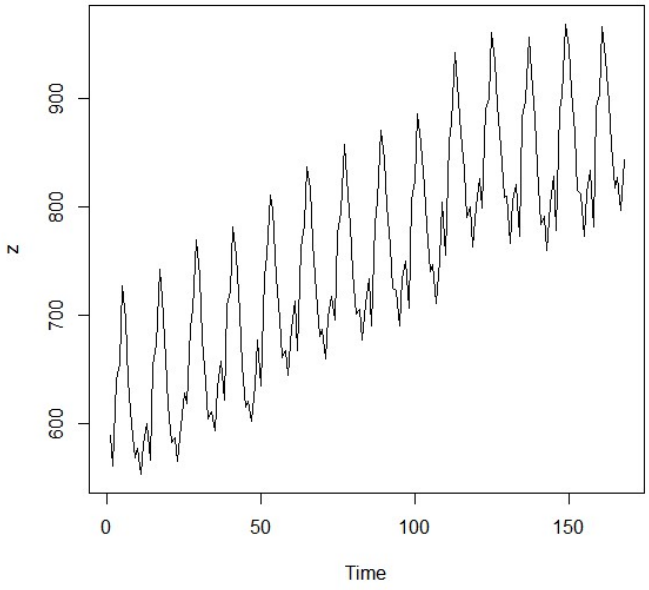
**مثال آخر**

z(t)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 589 | 561 | 640 | 656 | 727 | 697 | 640 | 599 | 568 | 577 | 553 | 582 |
| 600 | 566 | 653 | 673 | 742 | 716 | 660 | 617 | 583 | 587 | 565 | 598 |
| 628 | 618 | 688 | 705 | 770 | 736 | 678 | 639 | 604 | 611 | 594 | 634 |
| 658 | 622 | 709 | 722 | 782 | 756 | 702 | 653 | 615 | 621 | 602 | 635 |
| 677 | 635 | 736 | 755 | 811 | 798 | 735 | 697 | 661 | 667 | 645 | 688 |
| 713 | 667 | 762 | 784 | 837 | 817 | 767 | 722 | 681 | 687 | 660 | 698 |
| 717 | 696 | 775 | 796 | 858 | 826 | 783 | 740 | 701 | 706 | 677 | 711 |
| 734 | 690 | 785 | 805 | 871 | 845 | 801 | 764 | 725 | 723 | 690 | 734 |
| 750 | 707 | 807 | 824 | 886 | 859 | 819 | 783 | 740 | 747 | 711 | 751 |
| 804 | 756 | 860 | 878 | 942 | 913 | 869 | 834 | 790 | 800 | 763 | 800 |
| 826 | 799 | 890 | 900 | 961 | 935 | 894 | 855 | 809 | 810 | 766 | 805 |
| 821 | 773 | 883 | 898 | 957 | 924 | 881 | 837 | 784 | 791 | 760 | 802 |
| 828 | 778 | 889 | 902 | 969 | 947 | 908 | 867 | 815 | 812 | 773 | 813 |
| 834 | 782 | 892 | 903 | 966 | 937 | 896 | 858 | 817 | 827 | 797 | 843 |

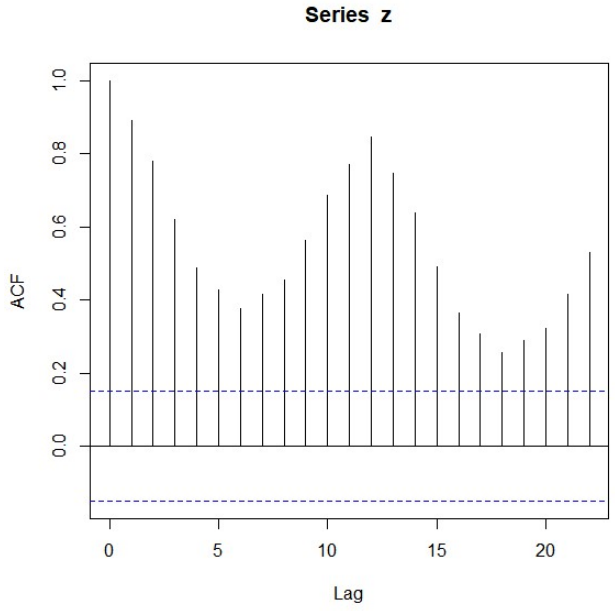
> plot.ts(z)

شكل المتسلسلة



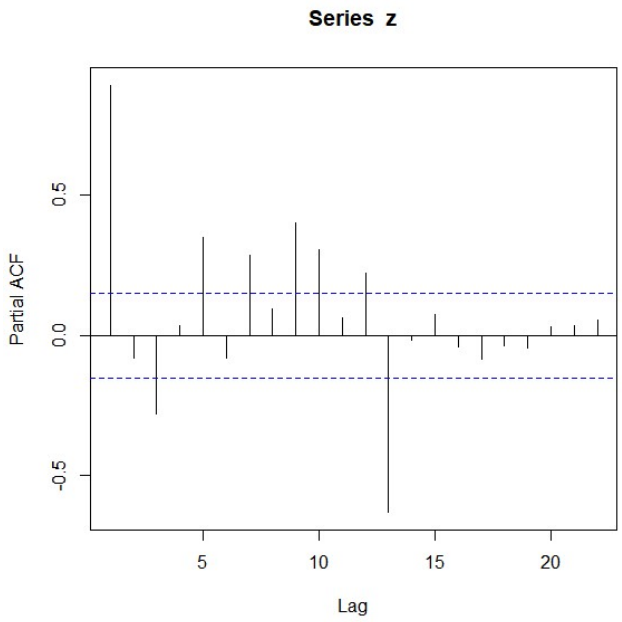

الترابط الذاتي

> acf(z)




والترابط الذاتي الجزئي

```
> pacf(z)
```



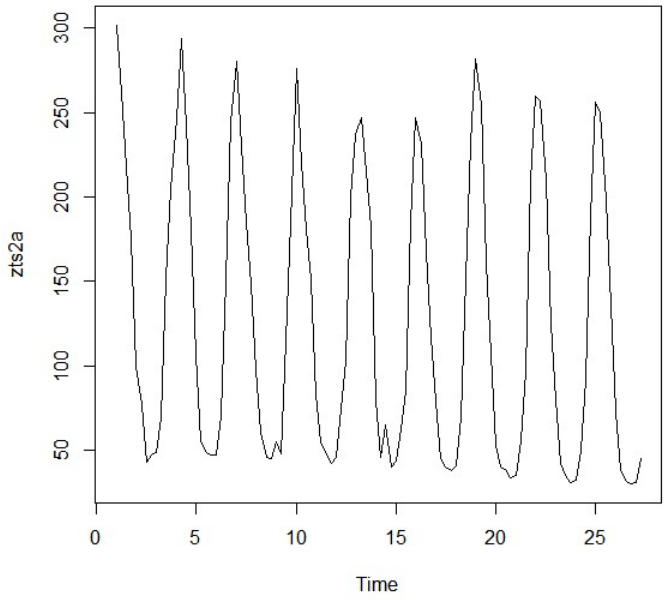

**مثال آخر**

z(t)

302 262 218 175 100 077 043 047 049 069 152 205 246 294
242 181 107 056 049 047 047 071 151 244 280 230 185 148
098 061 046 045 055 048 115 185 276 220 181 151 083 055
049 042 046 074 103 200 237 247 215 182 080 046 065
040 044 063 085 185 247 231 167 117 079 045 040 038 041
069 152 232 282 255 161 107 053 040 039 034 035 056 097
210 260 257 210 125 080 042 035 031 032 050 092 189 256
250 198 136 073 039 032 030 031 045

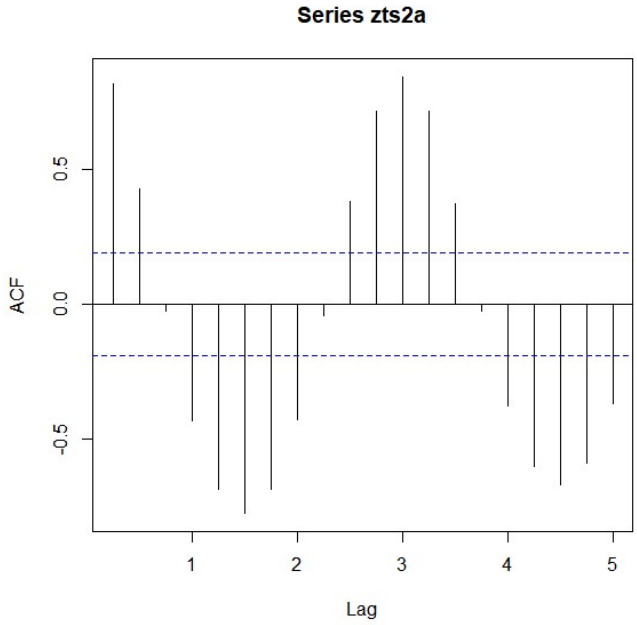
```
> zts2a <- ts(zts2,frequency = 4)
> plot.ts(zts2a)
```

ولها الشكل



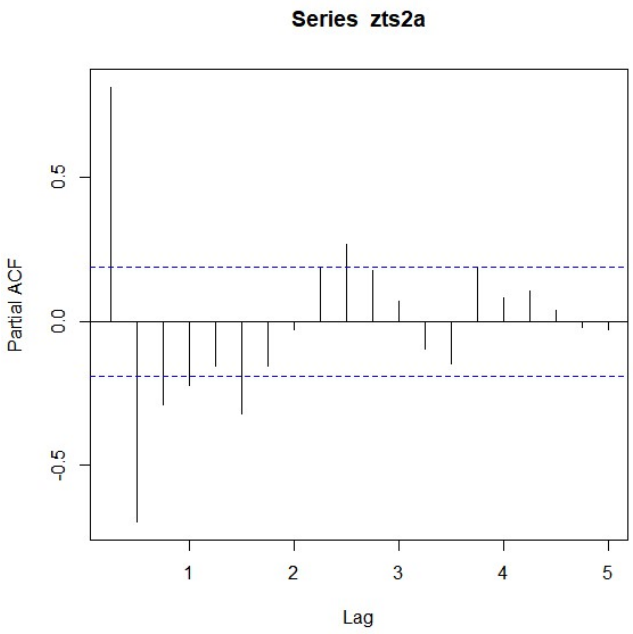

ودالة الترابط الذاتي

```
> acf(zts2a, plot = F)

Autocorrelations of series 'zts2a', by lag

  0.25   0.50   0.75   1.00   1.25   1.50   1.75   2.00
2.25   2.50   2.75   3.00   3.25   3.50   3.75
 0.814  0.427 -0.027 -0.430 -0.685 -0.775 -0.684 -0.427 -
0.044  0.381  0.714  0.843  0.713  0.372 -0.025
  4.00   4.25   4.50   4.75   5.00
-0.375 -0.599 -0.669 -0.590 -0.368
> acf(zts2a)
>
```




ودالة الترابط الذاتي الجزئي

```
> pacf(zts2a, plot = F)

Partial autocorrelations of series ‘zts2a’, by lag

  0.25   0.50   0.75   1.00   1.25   1.50   1.75   2.00
2.25   2.50   2.75   3.00   3.25   3.50   3.75
 0.814 -0.697 -0.289 -0.222 -0.157 -0.320 -0.155 -0.030
0.185  0.268  0.176  0.072 -0.096 -0.147  0.187
  4.00   4.25   4.50   4.75   5.00
 0.081  0.107  0.038 -0.021 -0.028
> pacf(zts2a)
>
```




وكل هذه المتسلسلات تبدي انماط موسمية واضحة.

**<u>إشتقاق دوال تنبؤ لبعض نماذج المتسلسلات الزمنية الموسمية التضاعفية:</u>**

بما ان نماذج المتسلسلات الزمنية الموسمية هي حالة خاصة من نماذج ARIMA فإن طرق التعامل معها هي نفس الطرق السابقة من حيث التعرف علي شكل النموذج وتقدير معالم النموذج والإختبارات التفحصية ومن ثم التنبؤ. جميع الطرق والمعادلات التي درسناها سابقا للنماذج غير الموسمية تنطبق هنا. سوف نشتق دوال التنبؤ لبعض النماذج للتوضيح فقط.

1- دالة التنبؤ للنموذج $SARIMA(0,0,0)(0,1,1)_{12}$ :

ويكتب النموذج على الشكل

$$\left(1-B^{12}\right)z_t=\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$$

من المعادلة الفروقية

$$z_{n+\ell}=z_{n+\ell-12}+a_{n+\ell}-\Theta a_{n+\ell-12}$$

يمكن الحصول على التنبؤات كالتالي

$$z_n(1) = z_{n-11} - \Theta a_{n-11}$$
$$z_n(2) = z_{n-10} - \Theta a_{n-10}$$
$$\vdots$$
$$z_n(12) = z_n - \Theta a_n$$
$$z_n(\ell) = z_n(\ell - 12), \quad \ell \geq 12$$

أو

$$z_n(\ell) = \begin{cases} z_{n+\ell-12} - \Theta a_{n+\ell-12}, & \ell = 1,2,...,12 \\ z_n(\ell-12), & \ell > 12 \end{cases}$$

واضح أن

$$z_n(1) = z_n(13) = z_n(25) = \cdots$$
$$z_n(2) = z_n(14) = z_n(26) = \cdots$$
$$\vdots$$
$$z_n(12) = z_n(24) = z_n(36) = \cdots$$

تباين أخطاء التنبؤ

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2\left(1 + \psi_1^2 + \cdots + \psi_{\ell-1}^2\right)$$

ودالة الأوزان تعطى بالعلاقة (برهن ذلك)

$$\psi_j = \begin{cases} 1-\Theta, & j = 12,24,... \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

وبتعويض الأوزان في صيغة تباين أخطاء التنبؤ نجد

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2\left\{1 + \left\lfloor \frac{\ell-1}{12} \right\rfloor (1-\Theta)^2\right\}$$

حيث $\lfloor x \rfloor$ تعني الجزء الصحيح من $x$.

2- دالة التنبؤ للنموذج $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ :

ويكتب النموذج على الشكل

$$(1-B)\left(1-B^{12}\right)z_t = (1-\theta B)\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$$

من المعادلة الفروقية

$$z_{n+\ell} = z_{n+\ell-1} + z_{n+\ell-12} - z_{n+\ell-13} + a_{n+\ell} - \theta a_{n+\ell-1} - \Theta a_{n+\ell-12} + \theta\Theta a_{n+\ell-13}$$

يمكن الحصول على التنبؤات كالتالي

$$z_n(1) = z_n + z_{n-11} - z_{n-13} - \theta a_n - \Theta a_{n-11} + \theta\Theta a_{n-12}$$
$$z_n(2) = z_n(1) + z_{n-10} - z_{n-11} - \Theta a_{n-10} + \theta\Theta a_{n-11}$$
$$\vdots$$
$$z_n(12) = z_n(11) + z_n - z_{n-1} - \Theta a_n + \theta\Theta a_{n-1}$$
$$z_n(13) = z_n(12) + z_n(1) - z_n + \theta\Theta a_n$$
$$z_n(\ell) = z_n(\ell-1) + z_n(\ell-12) - z_n(\ell-13)$$

وهكذا بقيم أولية

$$z_n(1) = z_n + z_{n-11} - z_{n-13} - \theta a_n - \Theta a_{n-11} + \theta\Theta a_{n-12}$$
$$z_n(2) = z_n(1) + z_{n-10} - z_{n-11} - \Theta a_{n-10} + \theta\Theta a_{n-11}$$
$$\vdots$$
$$z_n(12) = z_n(11) + z_n - z_{n-1} - \Theta a_n + \theta\Theta a_{n-1}$$
$$z_n(13) = z_n(12) + z_n(1) - z_n + \theta\Theta a_n$$

وعلاقة تكرارية

$$z_n(\ell) = z_n(\ell-1) + z_n(\ell-12) - z_n(\ell-13), \quad \ell > 13$$

يمكن توليد العدد المطلوب من التنبؤات.

**<u>أمثلة وحالات دراسة لبعض المتسلسلات الزمنية الموسمية:</u>**

**<u>مثال (1) :</u>** سوف نحاول إيجاد نموذج من عائلة SARIMA ينطبق على المشاهدات التالية:

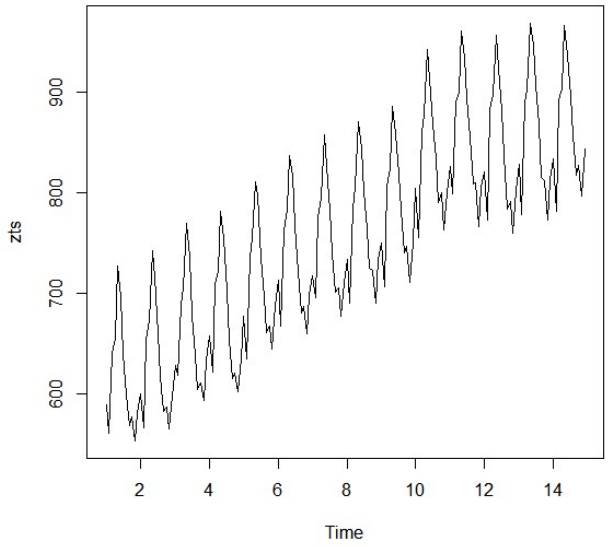
z

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 589 | 561 | 640 | 656 | 727 | 697 | 640 | 599 | 568 | 577 | 553 | 582 |
| 600 | 566 | 653 | 673 | 742 | 716 | 660 | 617 | 583 | 587 | 565 | 598 |
| 628 | 618 | 688 | 705 | 770 | 736 | 678 | 639 | 604 | 611 | 594 | 634 |
| 658 | 622 | 709 | 722 | 782 | 756 | 702 | 653 | 615 | 621 | 602 | 635 |
| 677 | 635 | 736 | 755 | 811 | 798 | 735 | 697 | 661 | 667 | 645 | |
| 688 | 713 | 667 | 762 | 784 | 837 | 817 | 767 | 722 | 681 | 687 | 660 |
| 698 | 717 | 696 | 775 | 796 | 858 | 826 | 783 | 740 | 701 | 706 | 677 |
| 711 | 734 | 690 | 785 | 805 | 871 | 845 | 801 | 764 | 725 | 723 | 690 |
| 734 | 750 | 707 | 807 | 824 | 886 | 859 | 819 | 783 | 740 | 747 | 711 |
| 751 | 804 | 756 | 860 | 878 | 942 | 913 | 869 | 834 | 790 | 800 | 763 |
| 800 | 826 | 799 | 890 | 900 | 961 | 935 | 894 | 855 | 809 | 810 | 766 |
| 805 | 821 | 773 | 883 | 898 | 957 | 924 | 881 | 837 | 784 | 791 | 760 |
| 802 | 828 | 778 | 889 | 902 | 969 | 947 | 908 | 867 | 815 | 812 | 773 |

```
813  834  782  892  903  966  937  896  858  817  827  797
843
> zts <- ts(z, frequency = 12)
> head(zts)
  Jan Feb Mar Apr May Jun
1 589 561 640 656 727 697
```

والمخطط الزمني للمشاهدات

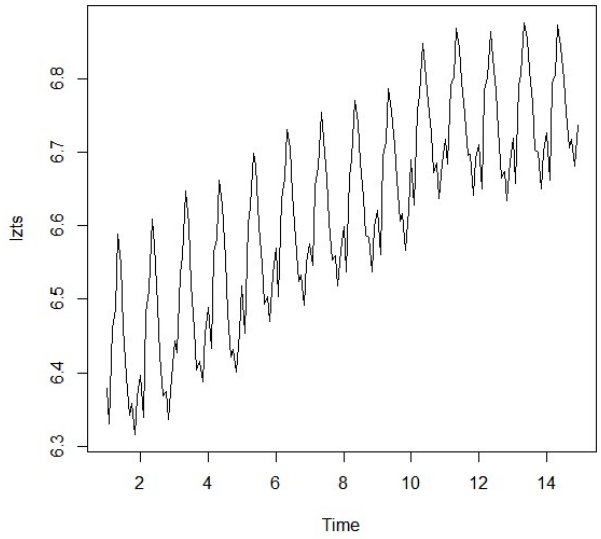
```
> plot.ts(zts)
```




يلاحظ ان المتسلسلة غير مستقرة في التباين والمتوسط لذلك نثبت التباين أولا بتحويل لوغارثمي

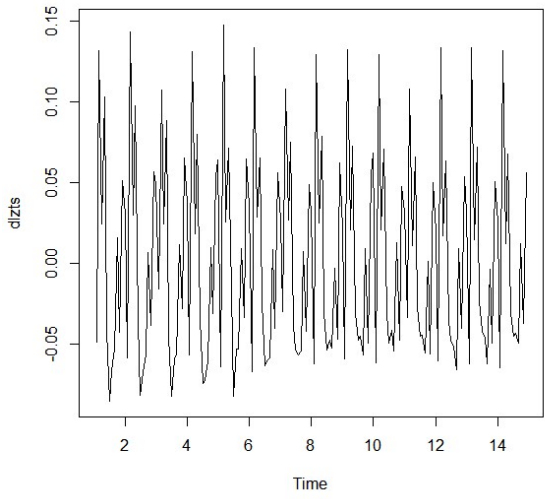
أي $y_t = \ln(z_t)$ ونرسم المخطط الزمني لها

```
> lzts <- log(zts)
> plot.ts(lzts)
```



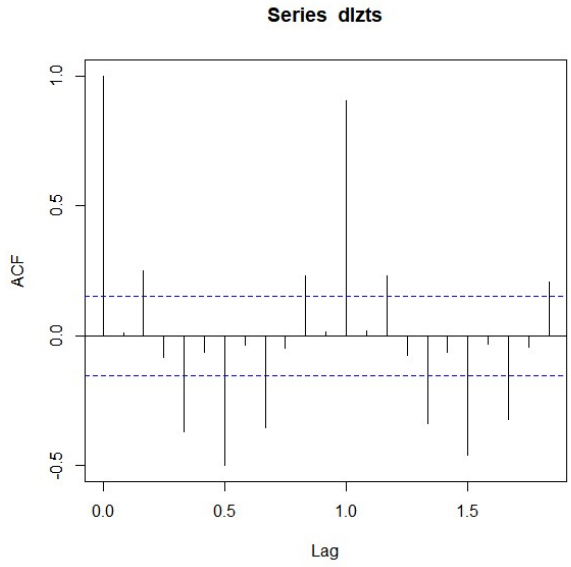

نلاحظ ان المتسلسلة استقرت في التباين ولكن لاتزال غير مستقرة في المتوسط لذلك نأخذ الفرق الأول $x_t = (1-B)\, y_t = (1-B)\ln(z_t)$ ولها الشكل التالي

```
> dlzts <- diff(lzts)
> plot.ts(dlzts)
```

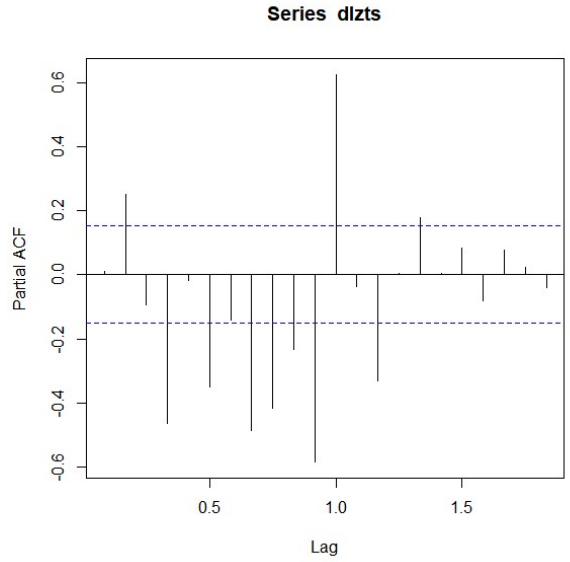



المتسلسلة الآن مستقرة في كل من التباين والمتوسط. لننظر إلى دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لها

```
> acf(dlzts)
```



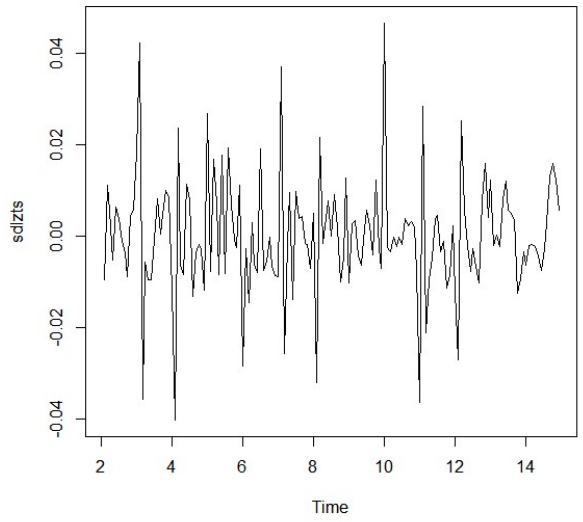

```
> pacf(dlzts)
```




يلاحظ من دالة الترابط الذاتي ان المتسلسلة غير مستقرة موسميا لأن قيمها عند التخلفات 12 و 24 و 36 تتخامد ببطء لذلك نأخذ الفرق الموسمي الأول $w_t = (1-B^{12})(1-B)\ln(z_t)$

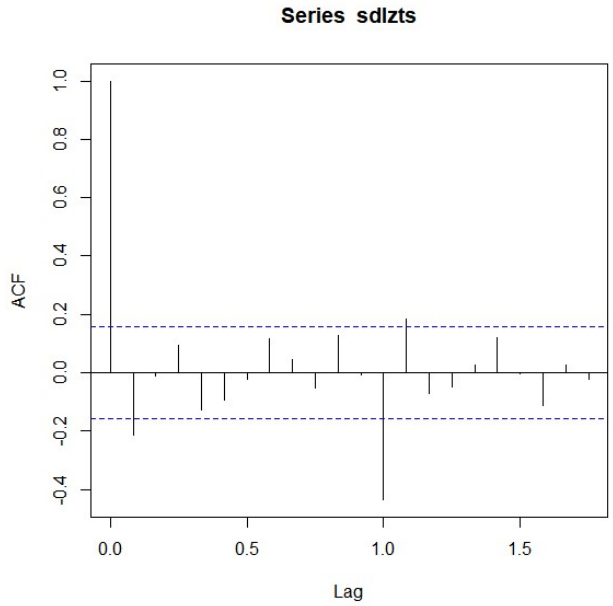
```
> sdlzts <- diff(dlzts, 12)
> plot.ts(sdlzts)
```

ونرسمها بعد هذا التفريق

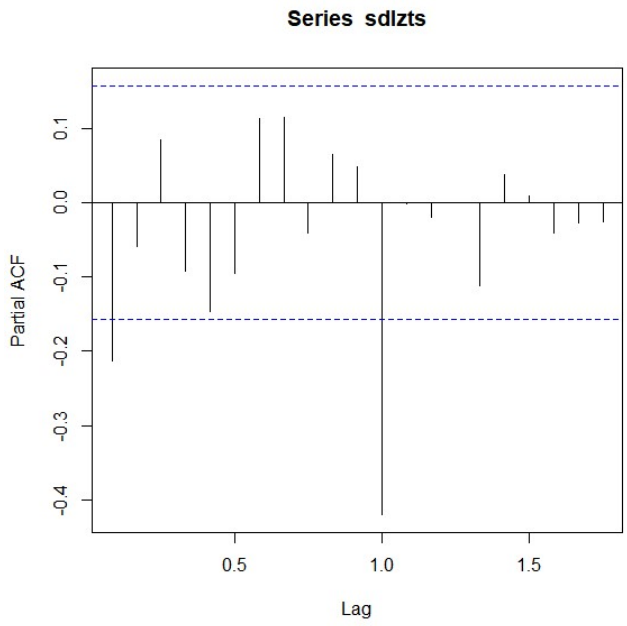



نوجد دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لها

```
> acf(sdlzts)
```




```
> pacf(sdlzts)
```




من انماط دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للمتسلسلة $w_t = (1-B^{12})(1-B)\ln(z_t)$

نجد ان قيم $p$ و $q$ الممكنة هي 0 و 0 اي نطبق النموذج

$$(1-B^{12})(1-B)\ln(z_t) = (1-\Theta B^{12})a_t$$

هو $SARIMA(0,1,0)(0,1,1)_{12}$ الأمر التالي في MINITAB يطبق هذا النموذج

ARIMA 0 1 0 0 1 1 12 'y(t)' ;

NoConstant.

لاحظ اننا استخدمنا $y_t = \ln(z_t)$ وللحصول على النتائج النهائية نجري التحويل $z_t = e^{y_t}$

**النتائج:**

بإستخدام مكتبة forecast

```
> library(forecast)
> fit1<- arima(lzts, order = c(0,1,0), seasonal =
list(order = c(0,1,1), period = 12))
> fit1

Call:
arima(x = lzts, order = c(0, 1, 0), seasonal = list(order
= c(0, 1, 1), period = 12))
```

```
Coefficients:
          sma1
      -0.6313
s.e.   0.0619

sigma^2 estimated as 0.00011:  log likelihood = 483.41,
aic = -962.82
>
```

أي أن النموذج المقترح لهذه المتسلسلة هو

$$\left(1-B^{12}\right)\left(1-B\right)\ln\left(z_t\right)=\left(1-0.6313B^{12}\right)a_t,\quad a_t\sim N\left(0,0.00011\right)$$

لاحظ ان

$$\Theta=-0.6313,\quad s.e.\left(\Theta\right)=0.0619,\quad t=10.1987$$

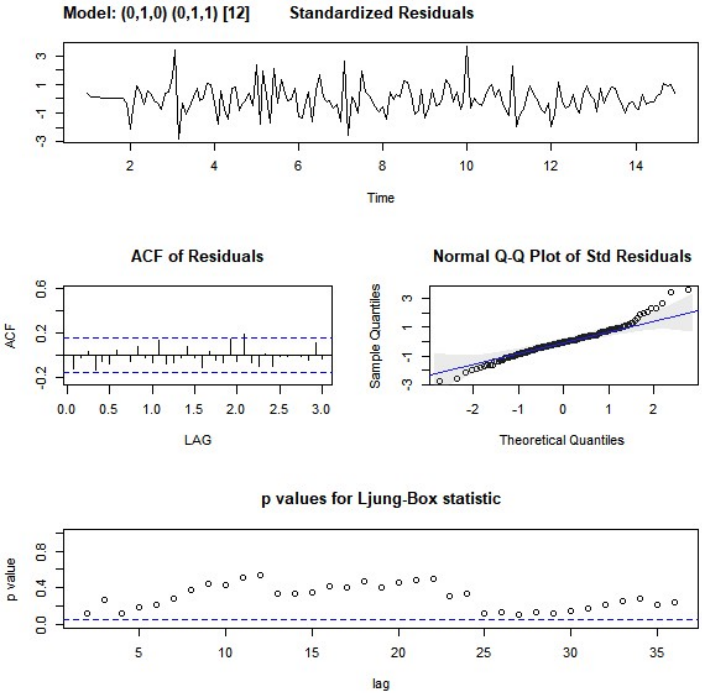
أي ان المعلم عالي المعنوية.

بإستخدام مكتبة astsa

```
> library(astsa)
> fit2<- sarima(lzts, 0,1,0,0,1,1,12)
initial  value -4.369567
iter   2 value -4.517683
iter   3 value -4.535746
iter   4 value -4.538267
iter   5 value -4.541397
iter   6 value -4.542312
iter   7 value -4.542341
iter   8 value -4.542341
iter   9 value -4.542341
iter   9 value -4.542341
iter   9 value -4.542341
final  value -4.542341
converged
initial  value -4.537628
iter   2 value -4.537685
```

```
iter   3 value -4.537726
iter   3 value -4.537726
iter   3 value -4.537726
final  value -4.537726
converged
> fit2
$fit

Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal =
list(order = c(P, D,
    Q), period = S), include.mean = !no.constant,
optim.control = list(trace = trc,
    REPORT = 1, reltol = tol))

Coefficients:
         sma1
      -0.6313
s.e.   0.0619

sigma^2 estimated as 0.00011:  log likelihood = 483.41,
aic = -962.82

$degrees_of_freedom
[1] 154

$ttable
     Estimate     SE  t.value p.value
sma1  -0.6313 0.0619 -10.2011       0

$AIC
[1] -8.102899

$AICc
```

```
[1] -8.090562

$BIC
[1] -9.084304
```

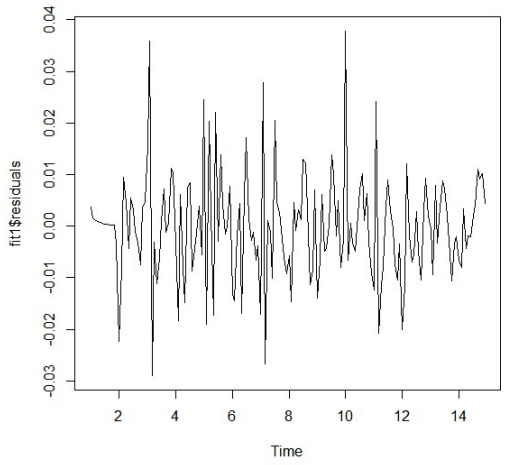



نفس النتائج

**<u>فحص البواقي:</u>**

رسم البواقي

```
> plot.ts(fit1$residuals)
```



**إختبار المتوسط**

```
> t.test(fit1$residuals)

        One Sample t-test

data:  fit1$residuals
t = -0.17798, df = 167, p-value = 0.859
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.001703791  0.001422008
sample estimates:
    mean of x
-0.0001408914
```

لاحظ ان الـ P-value=0.859 وهي اكبر من 0.05 اي لانرفض أن متوسط البواقي صفرا

**إختبار عشوائية البواقي**

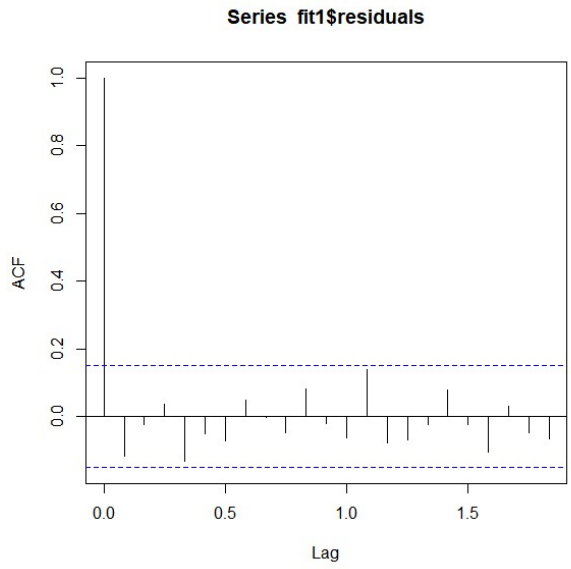
```
> runs.test(fit1$residuals)

        Runs Test

data:  fit1$residuals
statistic = -1.8572, runs = 73, n1 = 84, n2 = 84, n =
168, p-value = 0.06328
alternative hypothesis: nonrandomness
```

الإختبار معنوي عند 0.063 اي اننا لانرفض فرضية عشوائية البواقي

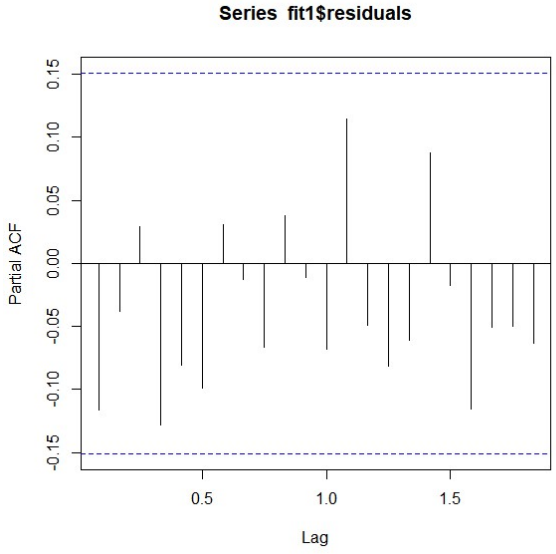
**إختبار إستقلال البواقي:**

دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

```
> acf(fit1$residuals)
```



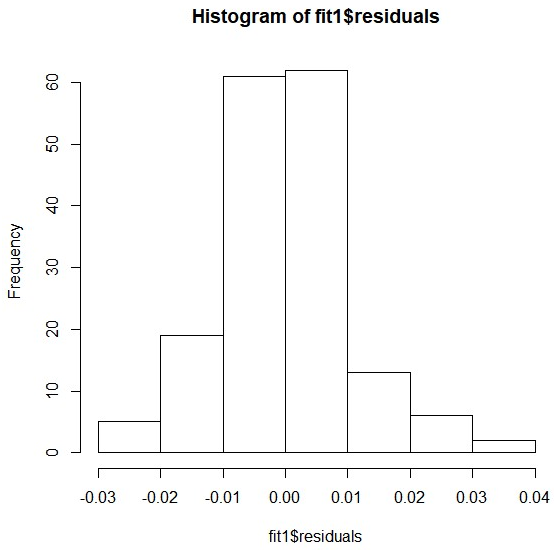

```
> pacf(fit1$residuals)
```



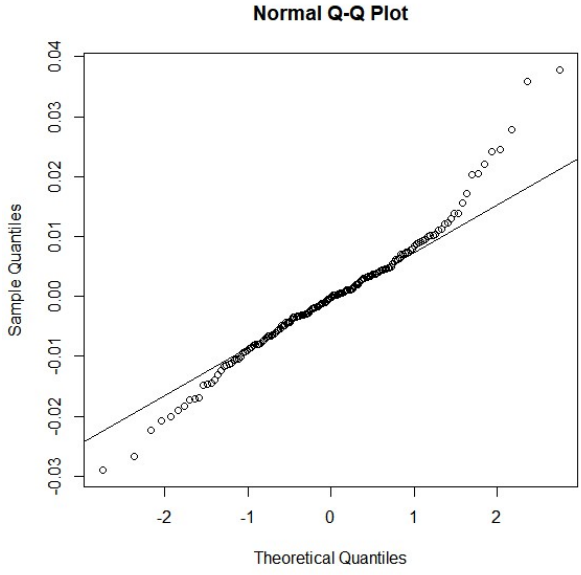

نلاحظ انها تعطي انماط الضجة البيضاء أي انها غير مترابطة وإذا كانت طبيعية فهي مستقلة.

**إختبار طبيعية البواقي:**

```
> hist(fit1$residuals)
```




```
> qqnorm(fit1$residuals)
> qqline(fit1$residuals)
```




```
> ks.test(fit1$residuals, "pnorm")

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test
```

```
data:  fit1$residuals
D = 0.48843, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

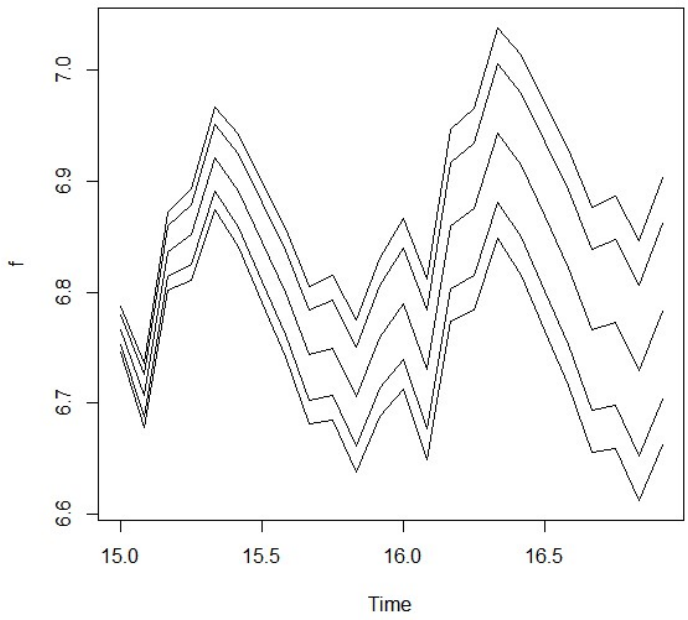
لاحظ ان الـ P-value لإختبار K-S يعطي 2.2e-16 وهي اقل من 0.05 اذا الإختبار معنوي عند $\alpha = 0.05$ اي لانرفض فرضية طبيعية البواقي.

**التنبؤ بإستخدام النموذج:**

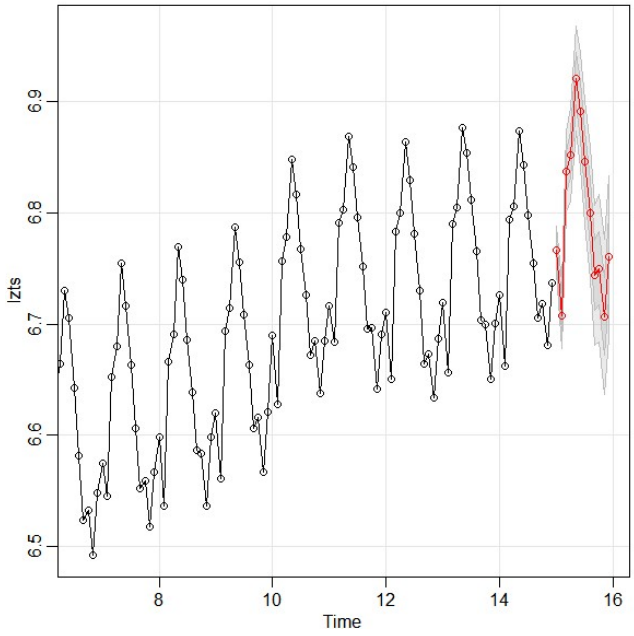
في المخرجات السابقة قمنا بالتنبؤ عن 24 قيمة مستقبلية مع 95% فترات تنبؤ ونرسمها بالرسم التالي:

```
> library(forecast)
> f <- forecast(fit1, h = 24)
> f
         Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
Jan 15         6.766688 6.753246 6.780131 6.746130 6.787247
Feb 15         6.707398 6.688388 6.726409 6.678324 6.736473
Mar 15         6.836941 6.813658 6.860225 6.801333 6.872550
Apr 15         6.851963 6.825078 6.878848 6.810845 6.893080
May 15         6.920604 6.890546 6.950663 6.874634 6.966575
Jun 15         6.891374 6.858447 6.924302 6.841016 6.941733
Jul 15         6.845372 6.809806 6.880938 6.790979 6.899765
Aug 15         6.799424 6.761402 6.837445 6.741275 6.857572
Sep 15         6.743518 6.703190 6.783846 6.681842 6.805194
Oct 15         6.749931 6.707422 6.792440 6.684919 6.814943
Nov 15         6.706580 6.661996 6.751164 6.638395 6.774765
Dec 15         6.759955 6.713389 6.806521 6.688738 6.831172
Jan 16         6.789676 6.739607 6.839746 6.713101 6.866251
Feb 16         6.730386 6.677043 6.783730 6.648805 6.811968
Mar 16         6.859930 6.803502 6.916357 6.773631 6.946228
Apr 16         6.874951 6.815599 6.934302 6.784181 6.965721
May 16         6.943592 6.881454 7.005730 6.848560 7.038624
Jun 16         6.914362 6.849558 6.979167 6.815252 7.013473
Jul 16         6.868360 6.800994 6.935726 6.765332 6.971388
Aug 16         6.822412 6.752578 6.892245 6.715610 6.929213
```

```
Sep 16       6.766506 6.694289 6.838723 6.656060 6.876952
Oct 16       6.772919 6.698395 6.847443 6.658945 6.886894
Nov 16       6.729568 6.652807 6.806330 6.612171 6.846965
Dec 16       6.782943 6.704007 6.861879 6.662221 6.903665
> plot.ts(f)
```




```
> library(astsa)
> f2 <- sarima.for(lzts,12, 0,1,0,0,1,1,12)
```




**حالة دراسة :**

سوف نحاول إيجاد نموذج من عائلة SARIMA ينطبق على المشاهدات التالية:

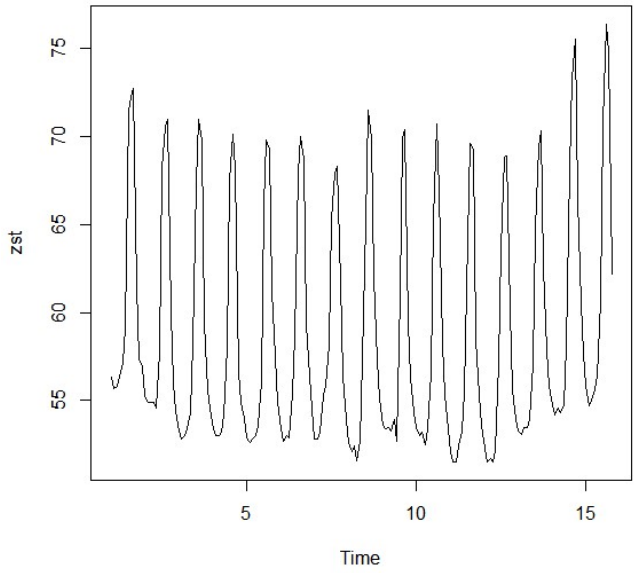
z(t)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56.3 | 55.7 | 55.8 | 56.3 | 57.2 | 59.1 | 71.5 | 72.2 |
| 72.7 | 61.5 | 57.4 | 56.9 | 55.3 | 54.9 | 54.9 | 54.9 |
| 54.6 | 57.7 | 68.2 | 70.6 | 71.0 | 60.0 | 56.0 | 54.4 |
| 53.3 | 52.8 | 53.0 | 53.4 | 54.3 | 58.2 | 67.4 | 71.0 |
| 69.8 | 59.4 | 55.6 | 54.6 | 53.4 | 53.0 | 53.0 | 53.2 |
| 54.2 | 58.0 | 67.5 | 70.1 | 68.2 | 56.6 | 54.9 | 54.0 |
| 52.9 | 52.6 | 52.8 | 53.0 | 53.6 | 56.1 | 66.1 | 69.8 |
| 69.3 | 61.2 | 57.5 | 54.9 | 53.4 | 52.7 | 53.0 | 52.9 |
| 55.4 | 58.7 | 67.9 | 70.0 | 68.7 | 59.3 | 56.4 | 54.5 |
| 52.8 | 52.8 | 53.2 | 55.3 | 55.8 | 58.2 | 65.3 | 67.9 |
| 68.3 | 61.7 | 56.4 | 53.9 | 52.6 | 52.1 | 52.4 | 51.6 |
| 52.7 | 57.3 | 65.1 | 71.5 | 69.9 | 61.9 | 57.3 | 55.1 |
| 53.6 | 53.4 | 53.5 | 53.3 | 53.9 | 52.7 | 61.0 | 69.9 |
| 70.4 | 59.4 | 56.3 | 54.3 | 53.5 | 53.0 | 53.2 | 52.5 |
| 53.4 | 56.5 | 65.3 | 70.7 | 66.9 | 58.2 | 55.3 | 53.4 |
| 52.1 | 51.5 | 51.5 | 52.4 | 53.3 | 55.5 | 64.2 | 69.6 |
| 69.3 | 58.5 | 55.3 | 53.6 | 52.3 | 51.5 | 51.7 | 51.5 |
| 52.2 | 57.1 | 63.6 | 68.8 | 68.9 | 60.1 | 55.6 | 53.9 |

```
53.3    53.1    53.5    53.5    53.9    57.1    64.7    69.4
70.3    62.6    57.9    55.8    54.8    54.2    54.6    54.3
54.8    58.1    68.1    73.3    75.5    66.4    60.5    57.7
55.8    54.7    55.0    55.6    56.4    60.6    70.8    76.4
74.8    62.2
```

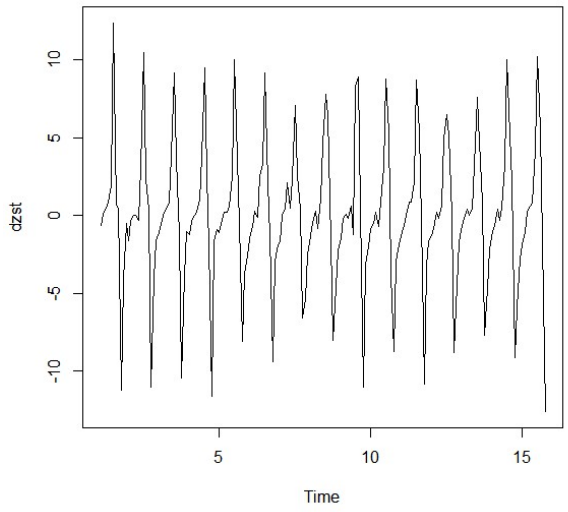
المخطط الزمني

```
> zst <- ts(zs, frequency = 12)
> plot.ts(zst)
```



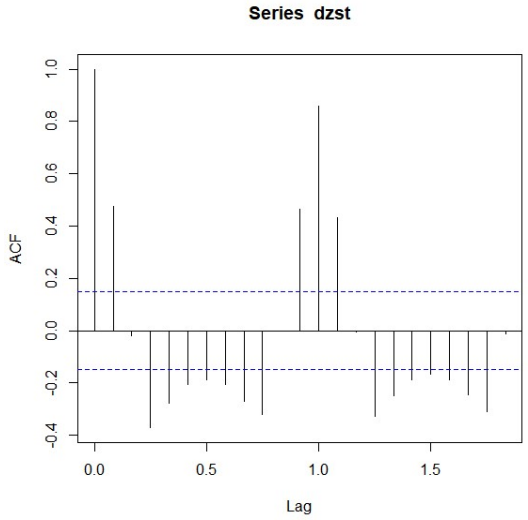

بأخذ الفرق الأول لإستقرار المتوسط $w_t = (1-B)z_t$ نجد

```
> dzst <- diff(zst)
> plot.ts(dzst)
```

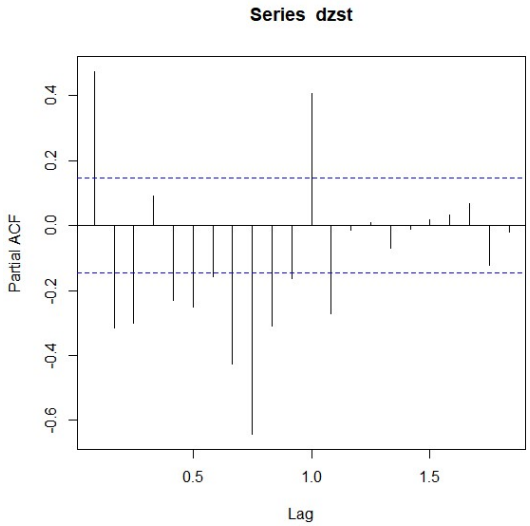



ولها دوال ترابط ذاتي وترابط ذاتي جزئي

> acf(dzst)

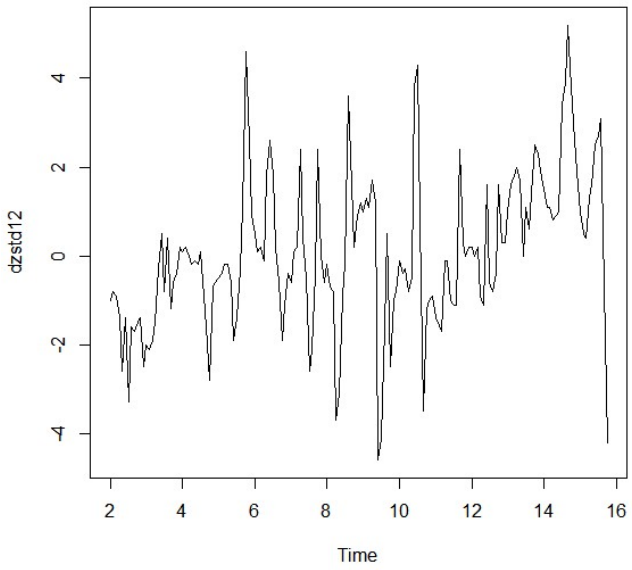



> pacf(dzst)



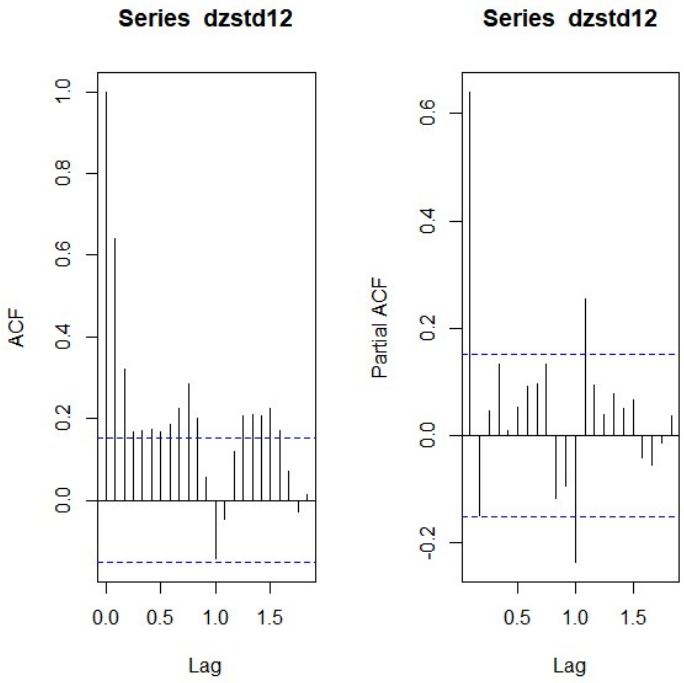

نرى انها تحتاج إلى تفريق موسمي من الرتبة 12 أي $w_t = (1-B^{12})(1-B)z_t$ وينتج المتسلسلة التالية

```
> dzstd12 <- diff(zst, 12)
> plot.ts(dzstd12)
```




ولها دوال ترابط ذاتي وترابط ذاتي جزئي

```
> par(mfrow=c(1,2))
> acf(dzstd12)
> pacf(dzstd12)
```




من الأنماط المشاهدة لدوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي قد يكون النموذج المناسب هو أي $SARIMA(1,1,1)(0,1,1)_{12}$

$$(1-\phi B)(1-B^{12})(1-B)z_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})a_t$$

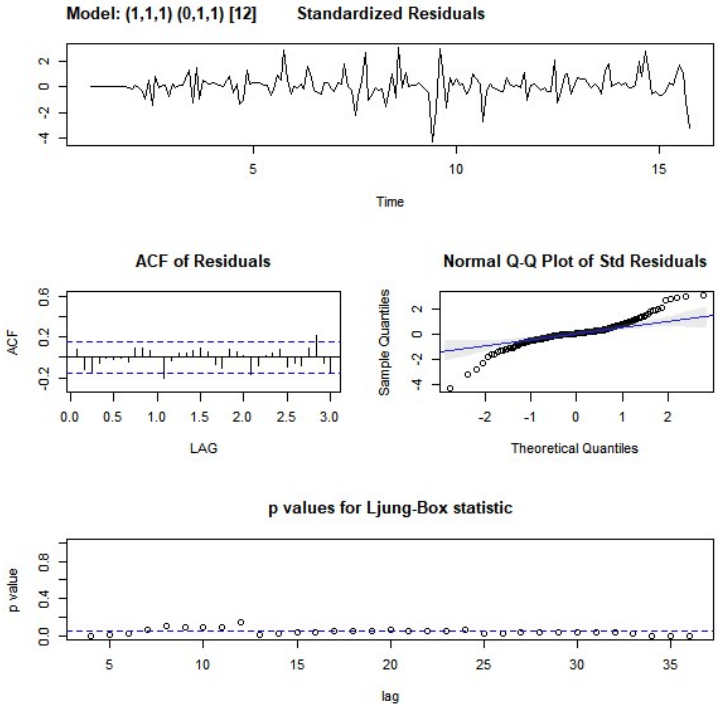
نطبق هذا النموذج على المتسلسلة كالتالي:

```
> fit1<- arima(zst, order = c(1,1,1), seasonal =
list(order = c(0,1,1), period = 12))
> fit1

Call:
arima(x = zst, order = c(1, 1, 1), seasonal = list(order
= c(0, 1, 1), period = 12))

Coefficients:
         ar1      ma1     sma1
      0.5479  -0.8928  -0.6625
s.e.  0.0882   0.0425   0.0813
```

```
sigma^2 estimated as 1.267:   log likelihood = -257.63,
aic = 523.26
> fit2<- sarima(zst,1,1,1,0,1,1,12)
initial  value 0.352273
iter   2 value 0.237092
iter   3 value 0.221567
iter   4 value 0.219136
iter   5 value 0.217742
iter   6 value 0.217122
iter   7 value 0.215590
iter   8 value 0.208130
iter   9 value 0.157765
iter  10 value 0.153144
iter  11 value 0.148290
iter  12 value 0.145769
iter  13 value 0.144290
iter  14 value 0.143715
iter  15 value 0.143655
iter  16 value 0.143653
iter  17 value 0.143651
iter  18 value 0.143650
iter  19 value 0.143650
iter  19 value 0.143650
iter  19 value 0.143650
final  value 0.143650
converged
initial  value 0.143989
iter   2 value 0.143371
iter   3 value 0.142508
iter   4 value 0.142451
iter   5 value 0.142450
iter   6 value 0.142449
iter   7 value 0.142449
iter   7 value 0.142449
```

```
iter   7 value 0.142449
final  value 0.142449
converged
> fit2
$fit

Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal =
list(order = c(P, D,
    Q), period = S), include.mean = !no.constant,
optim.control = list(trace = trc,
    REPORT = 1, reltol = tol))

Coefficients:
         ar1      ma1     sma1
      0.5479  -0.8928  -0.6625
s.e.  0.0882   0.0425   0.0813

sigma^2 estimated as 1.267:  log likelihood = -257.63,
aic = 523.26

$degrees_of_freedom
[1] 162

$ttable
     Estimate     SE  t.value p.value
ar1    0.5479 0.0882   6.2097       0
ma1   -0.8928 0.0425 -21.0066       0
sma1  -0.6625 0.0813  -8.1496       0

$AIC
[1] 1.270646

$AICc
```

```
[1] 1.283181

$BIC
[1] 0.3242715
```




أي أن النموذج المقترح لهذه المتسلسلة هو

$$(1-0.5479B)(1-B^{12})(1-B)z_t = (1-0.8928B)(1-0.6625B^{12})a_t, \quad a_t \sim N(0,1.267)$$

لاحظ ان

$$\phi = 0.5479, \quad s.e.(\phi) = 0.0882, \quad t = 6.212$$
$$\theta = -0.8928, \quad s.e.(\theta) = 0.0425, \quad t = -21.007$$
$$\Theta = -0.6625, \quad s.e.(\Theta) = 0.0813, \quad t = -8.1488$$

أي ان المعالم عالية المعنوية.

**فحص البواقي:**

**إختبار المتوسط**

```
> t.test(fit1$residuals)

        One Sample t-test
```

```
data:  fit1$residuals
t = 1.6175, df = 177, p-value = 0.1075
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.02879064  0.29045085
sample estimates:
mean of x
0.1308301
```

لاحظ ان الـ P-value=0.1075 وهي اكبر من 0.05 اي لانرفض أن متوسط البواقي صفرا

**إختبار عشوائية البواقي**

```
> runs.test(fit1$residuals)

        Runs Test

data:  fit1$residuals
statistic = -2.255, runs = 75, n1 = 89, n2 = 89, n = 178,
p-value = 0.02413
alternative hypothesis: nonrandomness
```

الإختبار غيرمعنوي عند 0.05 اي اننا نرفض فرضية عشوائية البواقي وهذا يحتاج إلى إجراء إختبار آخر أكثر قوة من إختبار الجري مثل إختبار الإشارة Sign Test على الوسيط التالي:

```
> library(BSDA)
>  SIGN.test(fit1$residuals,  md  =  0,  alternative  =
"two.sided", conf.level = 0.95)

        One-sample Sign-Test

data:  fit1$residuals
s = 107, p-value = 0.008521
alternative hypothesis: true median is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.008277848 0.179401945
sample estimates:
```

```
median of x
 0.09993051

Achieved and Interpolated Confidence Intervals:

                  Conf.Level L.E.pt U.E.pt
Lower Achieved CI     0.9394 0.0093 0.1787
Interpolated CI       0.9500 0.0083 0.1794
Upper Achieved CI     0.9573 0.0076 0.1799
```

والإختبار غيرمعنوي عند 0.0085 وللتأكد نجري إختبار ولكوكسون لإشارات الرتب على الوسيط التالي

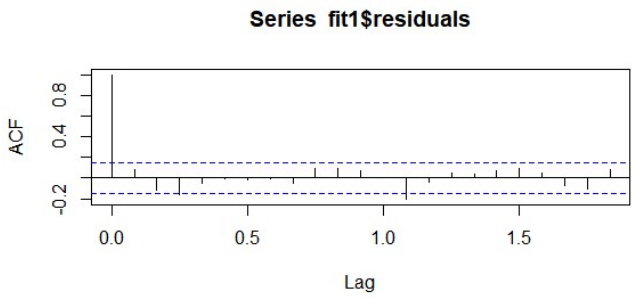
```
> wilcox.test(fit1$residuals)

        Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  fit1$residuals
V = 9433, p-value = 0.0331
alternative hypothesis: true location is not equal to 0
```

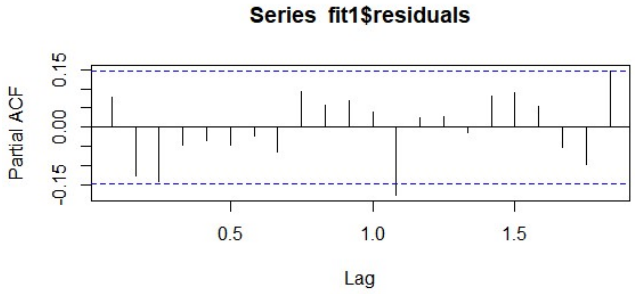
والإختبار ايضا غيرمعنوي عند 0.0331

**<u>إختبار إستقلال البواقي:</u>**

دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

```
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(fit1$residuals)
> pacf(fit1$residuals)
```

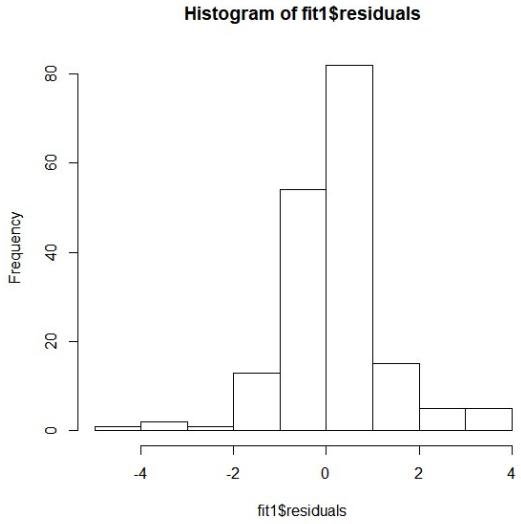



نلاحظ انها تعطي انماط الضجة البيضاء أي انها غير مترابطة وإذا كانت طبيعية فهي مستقلة.

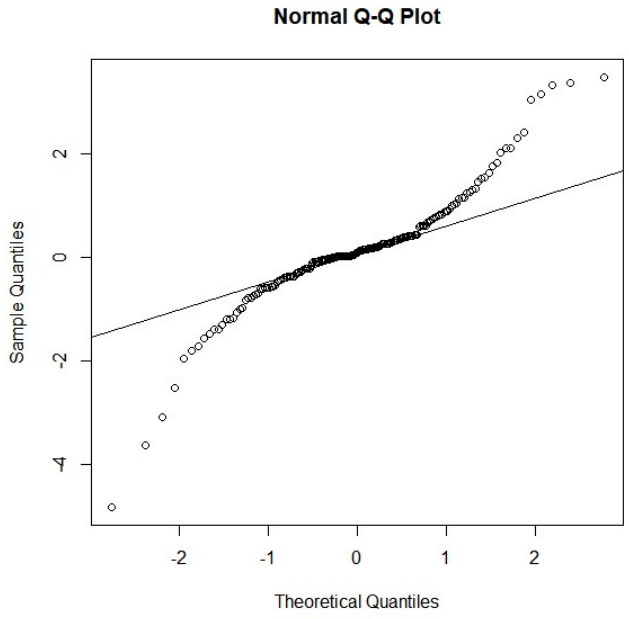
**إختبار طبيعية البواقي:**

```
> hist(fit1$residuals)
```




> qqnorm(fit1$residuals)

> qqline(fit1$residuals)




```
> ks.test(fit1$residuals, pnorm)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  fit1$residuals
D = 0.15033, p-value = 0.0006411
alternative hypothesis: two-sided
```

لاحظ ان الـ P-value لإختبار K-S أقل من 0.00064 اذا الإختبار غيرمعنوي عند $\alpha = 0.05$ اي نرفض فرضية طبيعية البواقي.

إذا النموذج المقترح غير مناسب و نبحث عن نموذج آخر.

لإمكانية وجود عدد كبير جدا من النماذج التي يمكن تجربتها عن طريق AIC لذلك نستخدم التطبيق الاوتوماتيكي auto.arima( ) في مكتبة forecast

```
> fit3 <- auto.arima(zst)
> fit3
Series: zst
ARIMA(2,1,3)(1,1,2)[12]
```

```
Coefficients:
         ar1      ar2      ma1     ma2     ma3    sar1
sma1    sma2
      1.4115  -0.4766  -1.7076  0.5451  0.1903  0.2851  -
0.946  0.1473
s.e.  0.1355   0.1282   0.1410  0.2392  0.1095  0.8292
0.834  0.5709

sigma^2 estimated as 1.244:  log likelihood=-252.47
AIC=522.93   AICc=524.09   BIC=550.89
```

تمرين: يترك للطالب كتابة النموذج $ARIMA(2,1,3)(1,1,2)_{12}$ بالشكل الرياضي

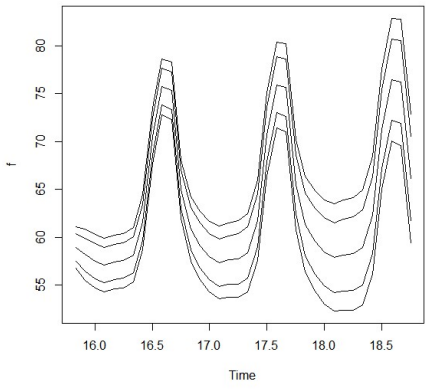
**التنبؤ بإستخدام النموذج:**

سوف نستخدم النمذج المقترح اوتوماتيكيا لإيجاد التنبؤ عن 36 قيمة مستقبلية مع 95% فترات تنبؤ

```
> f <- forecast(fit3, h = 36)
> f
         Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
Nov 15       58.94921 57.51951 60.37891 56.76267 61.13575
Dec 15       58.17776 56.42940 59.92611 55.50388 60.85164
Jan 16       57.49977 55.67947 59.32006 54.71587 60.28366
Feb 16       57.07466 55.23367 58.91565 54.25910 59.89022
Mar 16       57.41762 55.56718 59.26807 54.58761 60.24763
Apr 16       57.55346 55.69502 59.41189 54.71123 60.39569
May 16       58.17621 56.30772 60.04471 55.31860 61.03383
Jun 16       61.55859 59.67587 63.44131 58.67922 64.43796
Jul 16       70.56929 68.66681 72.47176 67.65970 73.47887
Aug 16       75.72269 73.79422 77.65117 72.77335 78.67204
Sep 16       75.33295 73.37210 77.29379 72.33410 78.33180
Oct 16       65.02770 63.02842 67.02697 61.97007 68.08533
Nov 16       60.87414 58.67907 63.06922 57.51707 64.23122
Dec 16       59.13223 56.79942 61.46504 55.56450 62.69995
Jan 17       57.98601 55.56603 60.40598 54.28497 61.68704
```

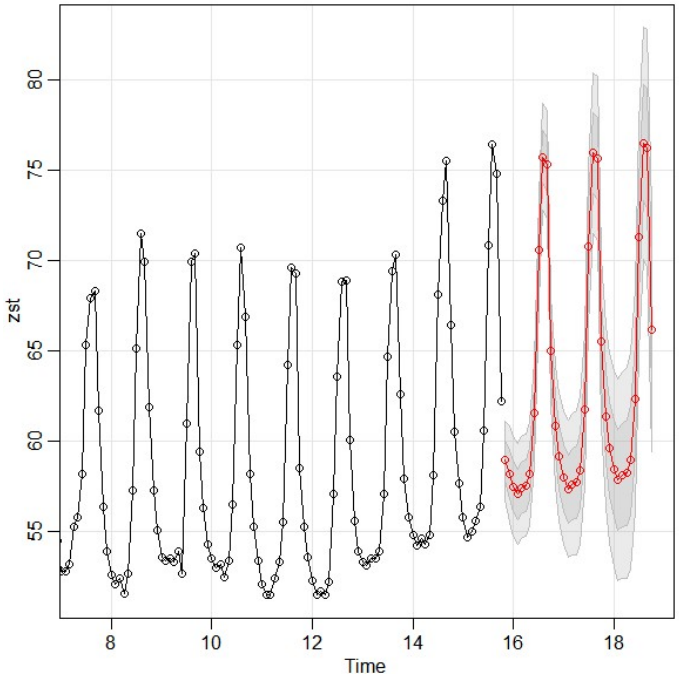
```
Feb 17       57.36241 54.87265 59.85217 53.55465 61.17017
Mar 17       57.62360 55.06885 60.17835 53.71645 61.53075
Apr 17       57.73292 55.11262 60.35321 53.72552 61.74031
May 17       58.38521 55.69659 61.07384 54.27331 62.49712
Jun 17       61.76678 59.00629 64.52727 57.54497 65.98858
Jul 17       70.74487 67.90904 73.58071 66.40783 75.08192
Aug 17       75.92563 73.01137 78.83989 71.46866 80.38260
Sep 17       75.63584 72.64067 78.63102 71.05512 80.21657
Oct 17       65.51706 62.43907 68.59505 60.80969 70.22444
Nov 17       61.36748 58.08138 64.65358 56.34183 66.39313
Dec 17       59.60895 56.16282 63.05508 54.33855 64.87935
Jan 18       58.47091 54.90907 62.03275 53.02355 63.91828
Feb 18       57.86675 54.20689 61.52660 52.26948 63.46402
Mar 18       58.14441 54.39307 61.89574 52.40724 63.88158
Apr 18       58.26608 54.42484 62.10732 52.39141 64.14075
May 18       58.93596 55.00421 62.86771 52.92287 64.94905
Jun 18       62.32073 58.29706 66.34440 56.16705 68.47440
Jul 18       71.29000 67.17287 75.40714 64.99339 77.58662
Aug 18       76.47760 72.26565 80.68954 70.03598 82.91921
Sep 18       76.21472 71.90694 80.52250 69.62654 82.80290
Oct 18       66.14734 61.74306 70.55161 59.41158 72.88310
> plot.ts(f)
```

ونرسمها بالرسم التالي:



الرسم التالي للمتسلسلة بكاملها مع التنبؤات وفترات التنبؤ بإستخدام مكتبة astsa

```
> f2 <- sarima.for(zst,36, 2,1,3,1,1,2,12)
```



# الفصل السابع

## ورقة تدريب عملى على التنبؤ بواسطة نماذج المتوسط المتحرك-الإنحدار الذاتى

## Forecasting By ARMA Models

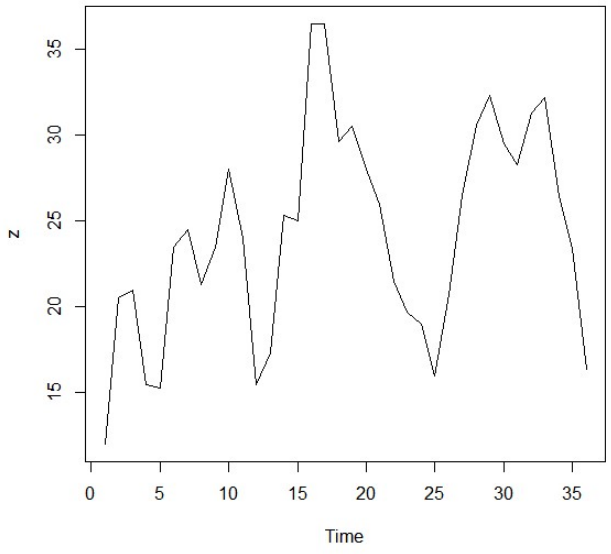
المشاهدات التالية لظاهرة عشوائية مسجلة علي شكل متسلسلة زمنية

```
12.0   20.5   21.0   15.5   15.3   23.5   24.5   21.3
23.5   28.0   24.0   15.5   17.3   25.3   25.0   36.5
36.5   29.6   30.5   28.0   26.0   21.5   19.7   19.0
16.0   20.7   26.5   30.6   32.3   29.5   28.3   31.3
32.2   26.4   23.4   16.4
```

```
> z <- ts(z)
```

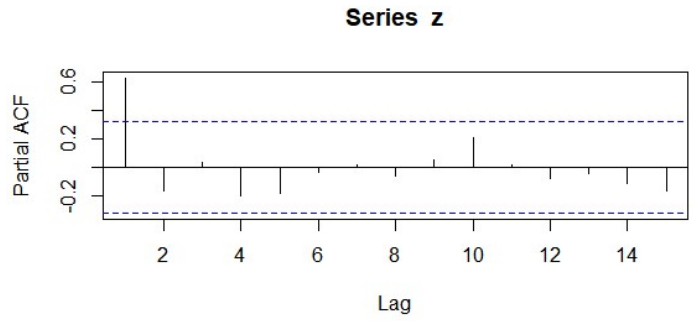
ولها الشكل التالي:

```
> plot.ts(z)
```




اولا نوجد دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

```
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(z)
> pacf(z)
```




نلاحظ من انماط الدالتين ان المشاهدات قد تكون من نموذج $ARMA(1,1)$

نطبق النموذج المقترح بمكتبة forecast

```
> zfit1 <- arima(z , order =c(1,0,1))
> zfit1

Call:
arima(x = z, order = c(1, 0, 1))

Coefficients:
         ar1     ma1  intercept
      0.4553  0.6887    23.2814
s.e.  0.1955  0.1817     2.0507

sigma^2 estimated as 16.12:  log likelihood = -101.83,
aic = 211.66
```

بمكتبة astsa

```
> zfit2 <- sarima(z,1,0,1,0,0,0,-1)
```

```
initial  value 1.762010
iter   2 value 1.398564
iter   3 value 1.342033
iter   4 value 1.332620
iter   5 value 1.331002
iter   6 value 1.329267
iter   7 value 1.328930
iter   8 value 1.328893
iter   9 value 1.328893
iter  10 value 1.328891
iter  11 value 1.328891
iter  11 value 1.328891
iter  11 value 1.328891
final  value 1.328891
converged
initial  value 1.418787
iter   2 value 1.411240
iter   3 value 1.409988
iter   4 value 1.409718
iter   5 value 1.409695
iter   6 value 1.409695
iter   6 value 1.409695
iter   6 value 1.409695
final  value 1.409695
converged
> zfit2
$fit

Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal =
list(order = c(P, D,
    Q), period = S), xreg = xmean, include.mean = FALSE,
optim.control = list(trace = trc,
    REPORT = 1, reltol = tol))
```

```
Coefficients:
         ar1     ma1    xmean
      0.4553  0.6887  23.2814
s.e.  0.1955  0.1817   2.0507

sigma^2 estimated as 16.12:  log likelihood = -101.83,
aic = 211.66

$degrees_of_freedom
[1] 33

$ttable
      Estimate     SE t.value p.value
ar1     0.4553 0.1955  2.3291  0.0261
ma1     0.6887 0.1817  3.7894  0.0006
xmean  23.2814 2.0507 11.3527  0.0000

$AIC
[1] 3.946593

$AICc
[1] 4.03799

$BIC
[1] 3.078553
```

النموذج المقترح هو:

$$z_t = 23.28 + 0.4553 z_{t-1} + a_t - 0.6887 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0,16.12)\ \forall t$$

حيث

$\hat{\phi}_1 = 0.4553 \quad se\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.1955 \quad t = 2.329$

$\hat{\theta}_1 = 0.6887 \quad se\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.1817 \quad t = 3.789$

$\hat{\mu} = 23.2814 \quad se\left(\hat{\delta}\right) = 2.0507 \quad t = 11.3526$

$\hat{\sigma}^2 = 16.12 \quad df = 33$

ونلاحظ ان جميع المقدرات معنوية عند $\alpha = 0.05$ فمثلا الفرضية

$H_0 : \phi_1 = 0$

$H_1 : \phi_1 \neq 0$

نختبرها بالإحصائة $t = \dfrac{\hat{\phi}_1}{se\left(\hat{\phi}_1\right)} = \dfrac{0.4553}{0.1955} = 2.329$ وهي معنوية عند $\alpha = 0.05$ أي اننا

نرفض ان $\phi_1 = 0$ وبالمثل لجميع المقدرات الاخرى

**ثانيا فحص البواقي**

إختبار متوسط البواقي:

الإختبار هو

$H_0 : \mu_a = 0, \quad H_1 : \mu_a \neq 0$

```
> t.test(zfit1$residuals)

        One Sample t-test

data:  zfit1$residuals
t = 0.32271, df = 35, p-value = 0.7488
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -1.156936  1.594271
sample estimates:
mean of x
0.2186678
```

لاحظ ان $t = 0.3227$ والـ **p-value = 0.7488** وهي اكبر من $\alpha = 0.05$ أي ان الإختبار غير معنوي أي يمكن إعتبار متوسط البواقي يساوي الصفر

**إختبارعشوائية البواقي:**

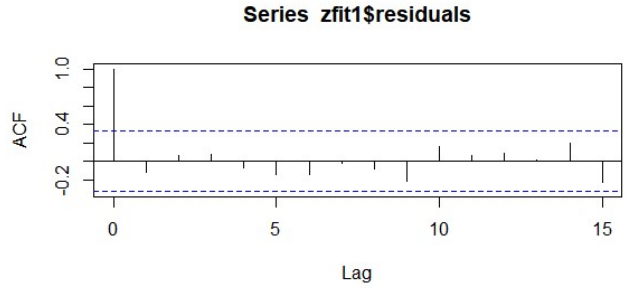
ونستخدم لذلك إختبار الجري Runs Test

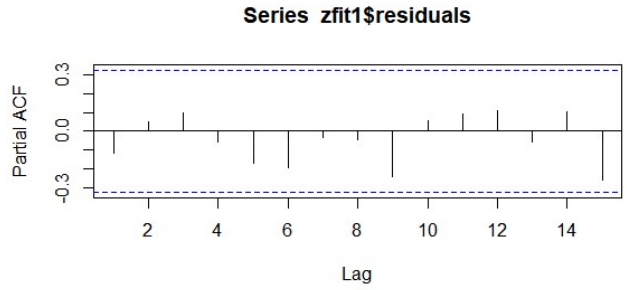
لايمكننا رفض عشوائية البواقي عند $\alpha = 0.05$

**إختبار ترابط البواقي:**

ونستخدم لذلك إختبار الترابط الذاتي

```
> acf(zfit1$residuals)
> pacf(zfit1$residuals)
```

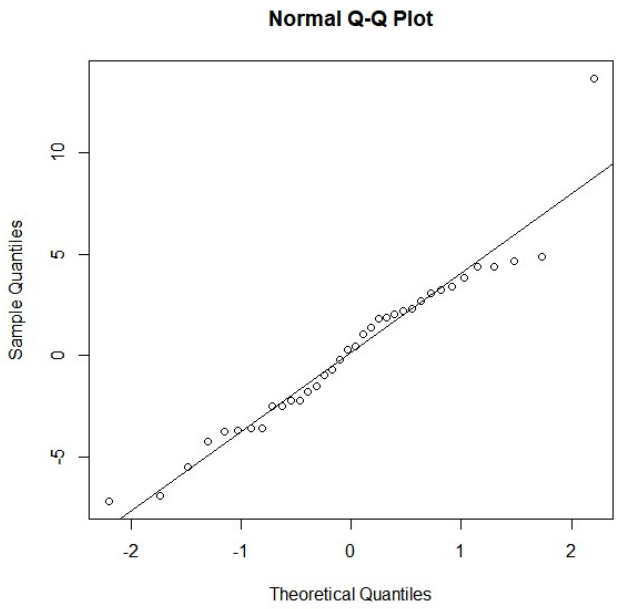



نلاحظ انه لايوجد أي ترابط من أي درجة بين القيم المختلفة للبواقي أي انها تظهر انماط تتمشي مع كونها متسلسة ضجة بيضاء

واخيرا نختبر طبيعية البواقي بالـ Normal Probability Plot

```
> par(mfrow=c(1,1))
> qqnorm(zfit1$residuals)
> qqline(zfit1$residuals)
```




```
> ks.test(zfit1$residuals, pnorm)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  zfit1$residuals
D = 0.38174, p-value = 3.157e-05
alternative hypothesis: two-sided
```

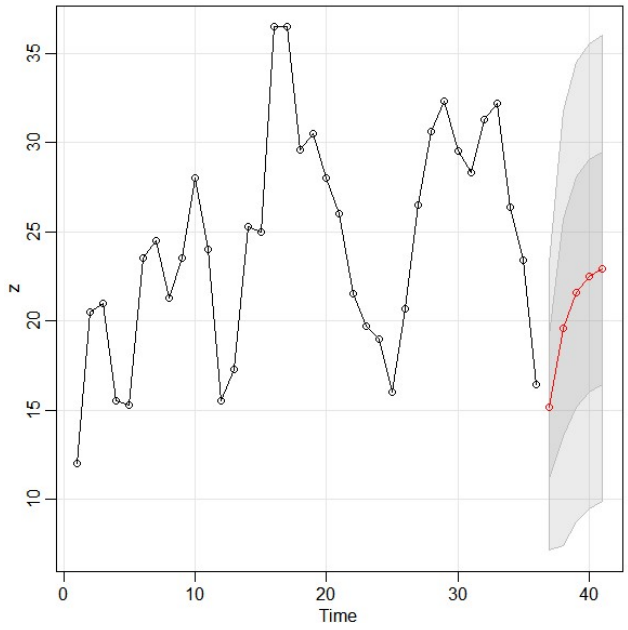
وهو مقبول ( نوعا )

إذا يمكن إعتبار النموذج المقترح مناسبا

الرسم التالي للتنبؤات لخمسة قيم مستقبلية وفترات 95% تنبؤ لها

```
> z.f <- sarima.for(z,5,1,0,1,0,0,0,-1)
> z.f
$pred
Time Series:
Start = 37
End = 41
Frequency = 1
[1] 15.17075 19.58858 21.60003 22.51586 22.93283

$se
```

```
Time Series:
Start = 37
End = 41
Frequency = 1
[1] 4.014701 6.100012 6.448458 6.518360 6.532758
```

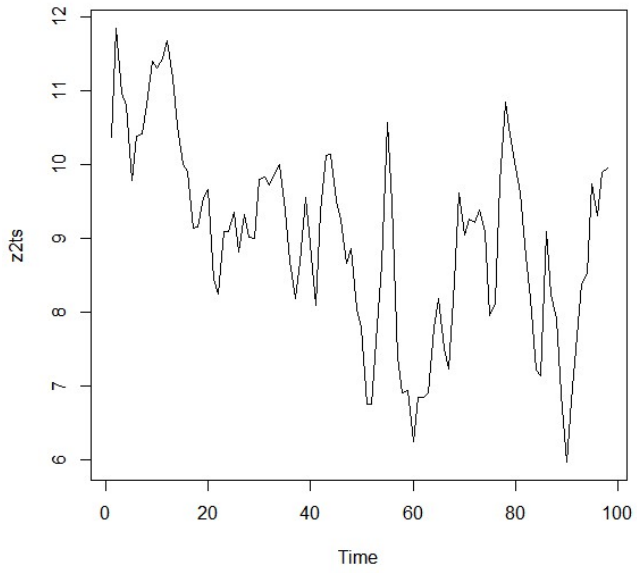



**مثال آخر:**

المشاهدات التالية لظاهرة عشوائية مسجلة علي شكل متسلسلة زمنية

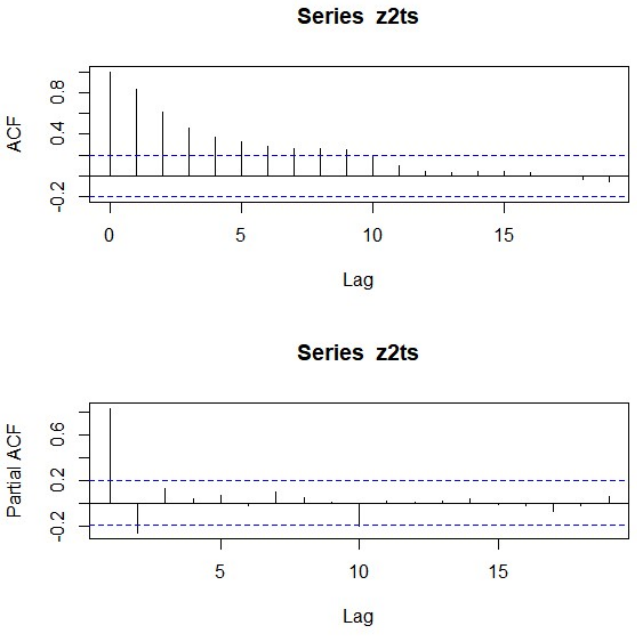
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.38 | 11.86 | 10.97 | 10.80 | 9.79 | 10.39 | 10.42 | 10.82 |
| 11.40 | 11.32 | 11.44 | 11.68 | 11.17 | 10.53 | 10.01 | 9.91 |
| 9.14 | 9.16 | 9.55 | 9.67 | 8.44 | 8.24 | 9.10 | 9.09 |
| 9.35 | 8.82 | 9.32 | 9.01 | 9.00 | 9.80 | 9.83 | 9.72 |
| 9.89 | 10.01 | 9.37 | 8.69 | 8.19 | 8.67 | 9.55 | 8.92 |
| 8.09 | 9.37 | 10.13 | 10.14 | 9.51 | 9.24 | 8.66 | 8.86 |
| 8.05 | 7.79 | 6.75 | 6.75 | 7.82 | 8.64 | 10.58 | 9.48 |
| 7.38 | 6.90 | 6.94 | 6.24 | 6.84 | 6.85 | 6.90 | 7.79 |
| 8.18 | 7.51 | 7.23 | 8.42 | 9.61 | 9.05 | 9.26 | 9.22 |
| 9.38 | 9.10 | 7.95 | 8.12 | 9.75 | 10.85 | 10.41 | 9.96 |
| 9.61 | 8.76 | 8.18 | 7.21 | 7.13 | 9.10 | 8.25 | 7.91 |
| 6.89 | 5.96 | 6.80 | 7.68 | 8.38 | 8.52 | 9.74 | 9.31 |
| 9.89 | 9.96 | | | | | | |

```
> z2ts <- ts(z2)
> plot.ts(z2ts)
```




نفحص دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

```
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(z2ts)
> pacf(z2ts)
```



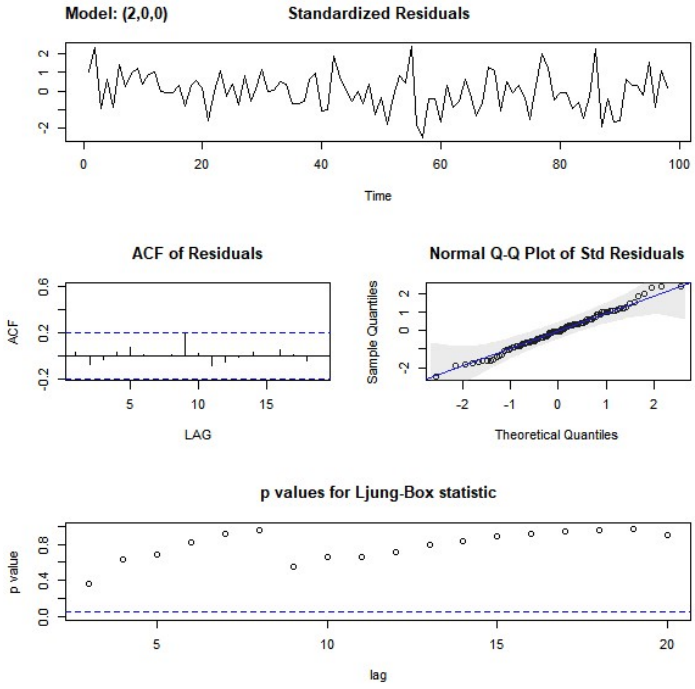

نلاحظ ان الأنماط تقترح نموذج إنحدار ذاتي من الدرجة الثانية $AR(2)$

نطبق النموذج المقترح

```
> z2ts.fit <- arima(z2ts, c(2,0,0))
> z2ts.fit

Call:
arima(x = z2ts, order = c(2, 0, 0))

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      1.0436  -0.2495     9.0473
s.e.  0.0983   0.1008     0.3319

sigma^2 estimated as 0.4788:  log likelihood = -103.63,
aic = 215.27
> z2ts.fit2 <- sarima(z2ts,2,0,0,0,0,0,-1)
initial  value 0.250791
iter   2 value 0.185366
iter   3 value -0.271691
iter   4 value -0.357021
iter   5 value -0.378607
iter   6 value -0.387054
iter   7 value -0.394441
iter   8 value -0.394802
iter   9 value -0.394816
iter  10 value -0.394842
iter  11 value -0.394859
iter  12 value -0.394864
iter  13 value -0.394866
iter  14 value -0.394867
iter  14 value -0.394867
iter  14 value -0.394867
final  value -0.394867
converged
initial  value -0.359931
```

```
iter   2 value -0.360669
iter   3 value -0.361161
iter   4 value -0.361339
iter   5 value -0.361439
iter   6 value -0.361454
iter   7 value -0.361457
iter   8 value -0.361457
iter   8 value -0.361457
final  value -0.361457
converged
> z2ts.fit2
$fit

Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal =
list(order = c(P, D,
    Q), period = S), xreg = xmean, include.mean = FALSE,
optim.control = list(trace = trc,
    REPORT = 1, reltol = tol))

Coefficients:
         ar1      ar2   xmean
      1.0436  -0.2495  9.0473
s.e.  0.0983   0.1008  0.3319

sigma^2 estimated as 0.4788:  log likelihood = -103.63,
aic = 215.27

$degrees_of_freedom
[1] 95

$ttable
      Estimate     SE t.value p.value
ar1     1.0436 0.0983 10.6185  0.0000
```

```
ar2     -0.2495 0.1008 -2.4754  0.0151
xmean    9.0473 0.3319 27.2612  0.0000

$AIC
[1] 0.3247953

$AICc
[1] 0.3495923

$BIC
[1] -0.5960731
```




النموذج المقترح هو

$$z_t = 9.047 + 1.044\left(z_{t-1} - 9.047\right) - 0.2495\left(z_{t-2} - 9.047\right) + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, 0.479\right) \quad \forall t$$

مقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيم $t$ لها هي

$\hat{\phi}_1 = 1.0436 \quad se\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.0983 \quad t = 10.6185$

$\hat{\phi}_2 = -0.2495 \quad se\left(\hat{\phi}_2\right) = 0.1008 \quad t = -2.4754$

$\hat{\mu} = 9.0473 \quad se\left(\hat{\mu}\right) = 0.3319 \quad t = 27.2612$

$\hat{\sigma}^2 = 0.4788 \quad df = 95$

نلاحظ ان جميع المقدرات معنوية عند $\alpha = 0.05$

لكي نقبل بهذا النموذج علي انه مناسب للتنبؤ نجري إختبارات علي البواقي

```
> rs <- fit1$residuals
> t.test(rs)

        One Sample t-test

data:  rs
t = 1.6175, df = 177, p-value = 0.1075
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.02879064  0.29045085
sample estimates:
mean of x
0.1308301
```

واضح جدا ان الأختبار غير معنوي ( ملاحظة الـ P-Value هي إحتمال ان الفرضية الصفرية صحيحة )

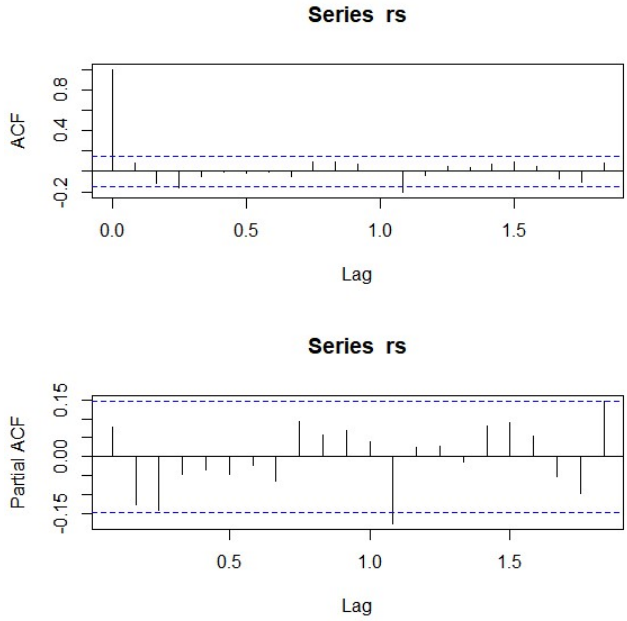
نختبر عشوائية البواقي

```
> runs.test(rs)

        Runs Test

data:  rs
statistic = -2.255, runs = 75, n1 = 89, n2 = 89, n = 178,
p-value = 0.02413
alternative hypothesis: nonrandomness
```

أي لايمكننا رفض فرضية عشوائية البواقي

نفحص الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

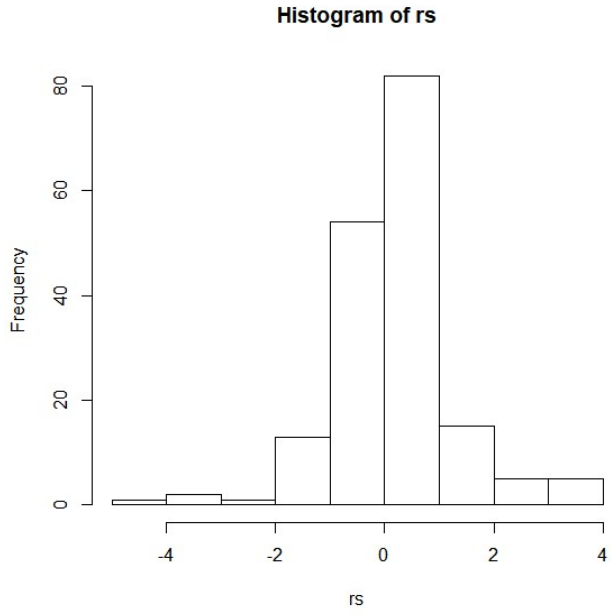
```
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(rs)
> pacf(rs)
```




واضح جدا انماط الضجة البيضاء

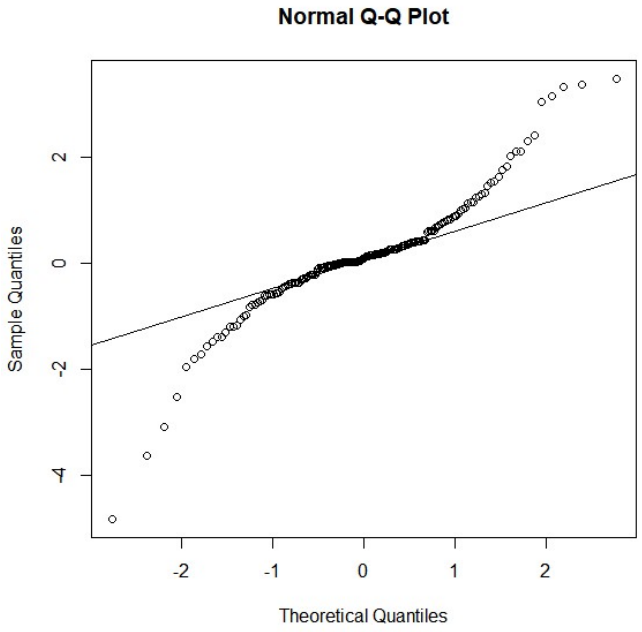
يبقي فحص طبيعية البواقي

> hist(rs)



> qqnorm(rs)

> qqline(rs)



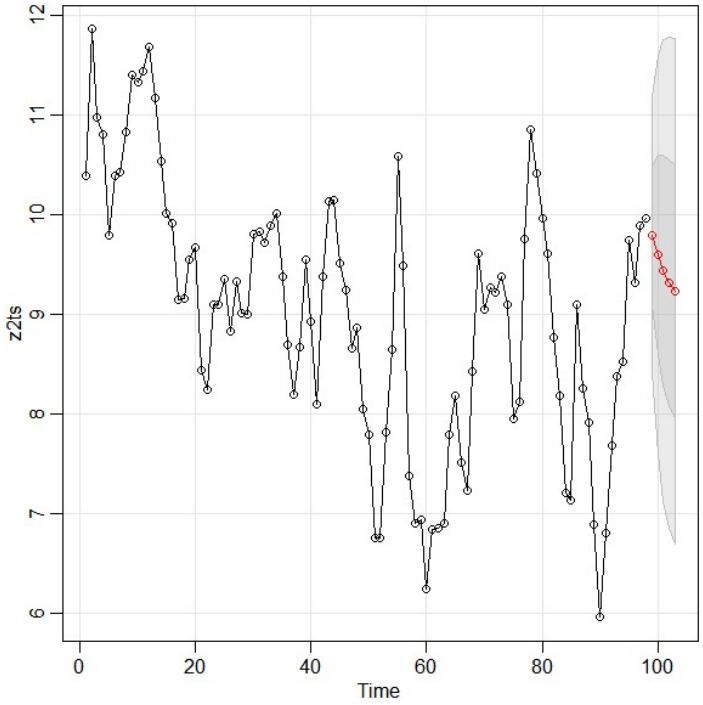

```
> ks.test(rs, pnorm)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  rs
D = 0.15033, p-value = 0.0006411
alternative hypothesis: two-sided
```

توجد مشكلة مع توزيع البواقي و يترك إيجاد نموذج مناسب للبيانات ولكن نستطيع ان نقول ان البواقي لها توزيع طبيعي ( أي $a_t \sim IIDN(0,0.4788)$ )

الرسم التالي للتنبؤات لخمسة قيم مستقبلية وفترات 95% تنبؤ لها

```
> z2ts.f2 <- sarima.for(z2ts,5,2,0,0,0,0,0,-1)
> z2ts.f2
$pred
Time Series:
Start = 99
End = 103
```

```
Frequency = 1
[1] 9.789559 9.594219 9.432885 9.313251 9.228652

$se
Time Series:
Start = 99
End = 103
Frequency = 1
[1] 0.6919687 1.0001591 1.1566667 1.2326774 1.2686092
```




تمرين: طبق علي المشاهدات السابقة نموذج $AR(1)$ وقارن بين النتائج

## مثال على تحليل البواقي ومعايير إختيار النموذج المناسب

## : Example on Residual Analysis and Model Selection Criteria

لقد عرفنا سابقا البواقي علي انها القيم المشاهدة ناقص القيم المطبقة فمن مشاهدات معطاة $z_1, z_2, ..., z_n$ ونموذج مطبق ينتج لدينا قيم مطبقة $\hat{z}_1, \hat{z}_2, ..., \hat{z}_n$ وتكتب البواقي:

$$e_i = z_i - \hat{z}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

والبواقي هي مقدرات الأخطاء في النموذج أي $\hat{a}_i = e_i, i = 1, 2, ..., n$ ولهذا يجب ان تحقق الشروط المفروضة علي الأخطاء في هذا النموذج والتي منها:

1- متوسط الأخطاء يساوي الصفر

2- الأخطاء عشوائية و غير مترابطة أو مستقلة ( وفي كثير من النماذج نفترض ان الأخطاء لها توزيع طبيعي مستقل ومتطابق بمتوسط صفري وتباين $\sigma^2$ أي $a_t \sim IIDN\left(0, \sigma^2\right)$ )

لهذا فإننا نجري تحليلا وهو مجموعة من الإختبارات علي البواقي لنري فيما إذا كانت تحقق هذه الشروط وفي هذه الحالة نعتبر النموذج المطبق مقبولا أما إذا فشل احد هذه الإختبارات فيجب علينا إعادة النظر وإقتراح نموذج آخر

أولا: إختبار المتوسط

$$H_0 : E\left(a_t\right) = 0$$
$$H_1 : E\left(a_t\right) \neq 0$$

وهو إختبار بذيلين ونستخدم فية الإحصائة $u = \dfrac{\overline{e}}{se\left(\overline{e}\right)}$ والتي لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $E\left(a_t\right) = 0$ إذا كانت $|u| < 1.96$ ( هذا علي إعتبار ان حجم العينة اكبر من 30 وحدة وهذا دائما متحقق للمتسلسلات الزمنية التي ندرسها )

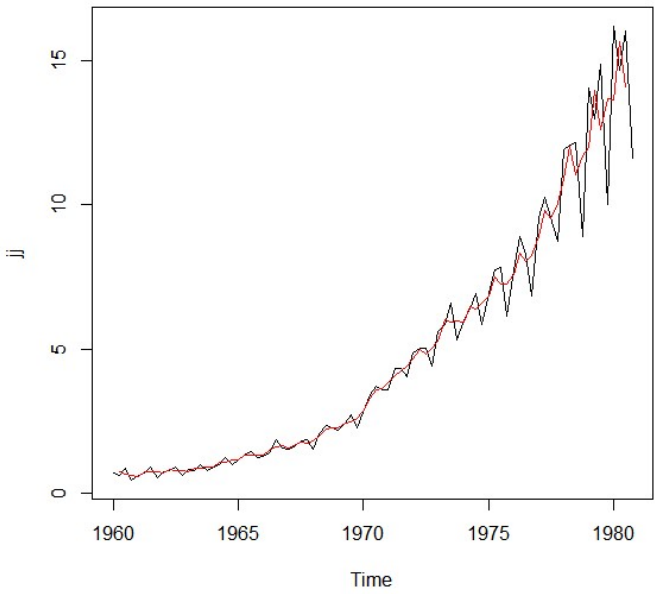
**مثال:**

سوف نطبيق متوسط متحرك من الدرجة الثالثة علي المتغير jj وهي الدخل ربع السنوي لشركة Johnson and Johnson يوجد 84 ربع سنوي اى 21 سنة مقاسة من الربع الاول لسنة 1960 وحتى الربع الاخير لسنة 1980

سوف نطبق متوسطات متحركة من الدرجة 3 و 5

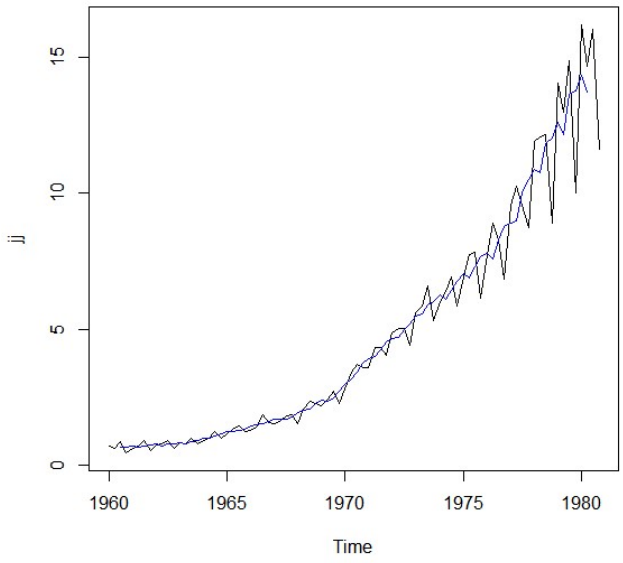
```
> k3 = c(1,1,1)
```

```
> k3 = k / sum(k3)
> fjj3 = filter(jj, sides=2, k3)
> plot(jj)
> lines(fjj3, col="red")
```




لاحظ ان المتسلسلة الأصلية باللون الاسود و المتسلسلة الممهدة بالمتوسط المتحرك من الدرجة 3 باللون الاحمر.

```
> k5 = c( rep(1,5))
> k5 = k5 / sum(k5)
> fjj5 = filter(jj, sides=2, k5)
> plot(jj)
> lines(fjj5, col="blue")
> resid5 = jj - fjj5
```




المتسلسلة الأصلية باللون الاسود و المتسلسلة الممهدة بالمتوسط المتحرك من الدرجة 5 باللون الازرق.

الآن نختبر متوسط البواقي للتطبيقين

```
> t.test(resid3)

        One Sample t-test

data:  resid3
t = 0.1936, df = 81, p-value = 0.847
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1632910  0.1984943
sample estimates:
 mean of x
0.01760163
```

لاحظ ان **p-value = 0.847** لانرفض الفرضية الصفرية.

```
> resid5 = jj -fjj5
> t.test(resid5)
```

```
        One Sample t-test

data:  resid5
t = 0.055478, df = 79, p-value = 0.9559
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1796211  0.1899211
sample estimates:
mean of x
  0.00515
```

لاحظ ان **p-value = 0.9559** لانرفض الفرضية الصفرية.

ملاحظة: في R عندما يكون الإنحراف المعياري ( او التباين ) غير معروف يستخدم Ttest.

ثانيا: نختبر عشوائية البواقي بواسطة إختبار الجري Runs test حول المتوسط وحول الصفر تابع المثال:

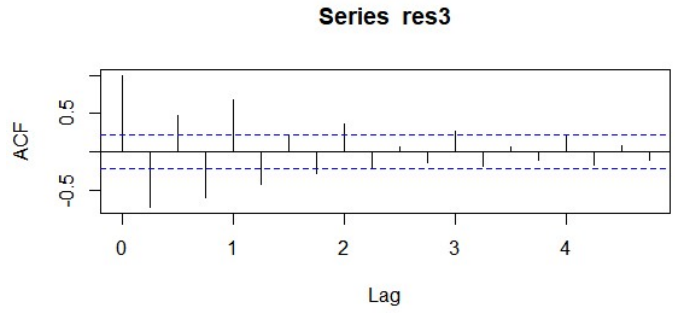
```
> runs.test(resid3)

        Runs Test

data:  resid3
statistic = 3.5558, runs = 58, n1 = 41, n2 = 41, n = 82,
p-value = 0.0003768
alternative hypothesis: nonrandomness
> runs.test(resid5)

        Runs Test

data:  resid5
statistic = 0, runs = 41, n1 = 40, n2 = 40, n = 80, p-
value = 1
alternative hypothesis: nonrandomness
```

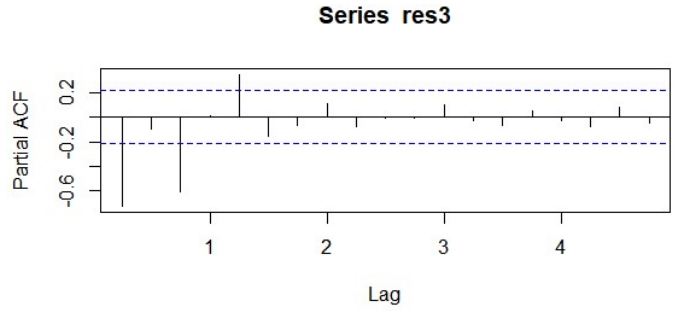
نلاحظ انه في كلتا الحالتين لانرفض عشوائية البواقي

ثالثا: نختبر ترابط أو إستقلال البواقي بواسطة إختبار الترابط الذاتي Autocorrelation test

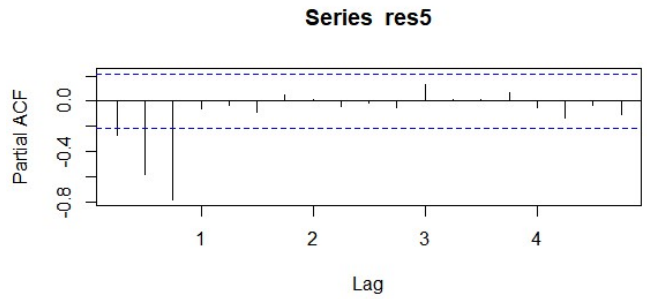
تابع المثال:

```
> library(tseries)
> res3 = na.remove(resid3)
> acf(res3)
> pacf(res3)
```




```
> res5 = na.remove(resid5)
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(res5)
> pacf(res5)
```




يوجد ترابط بين البواقي

رابعا: نختبر في ما إذا كانت البواقي موزعة طبيعيا

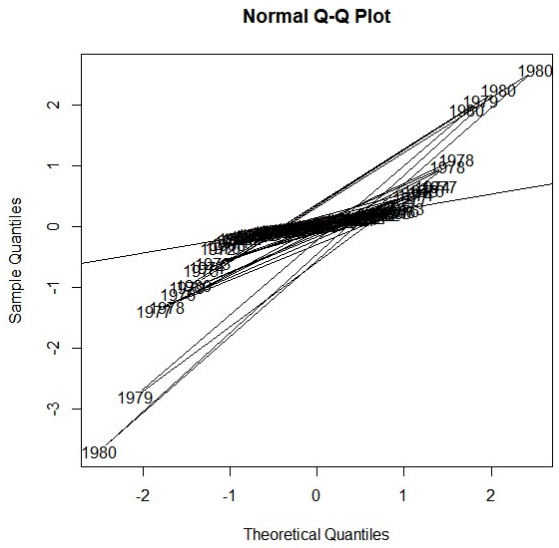
تابع المثال:

```
> ks.test(resid3, pnorm)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  resid3
D = 0.25262, p-value = 5.699e-05
alternative hypothesis: two-sided

Warning message:
In ks.test(resid3, pnorm) :
  ties should not be present for the Kolmogorov-Smirnov
test
> ks.test(resid5, pnorm)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test
```

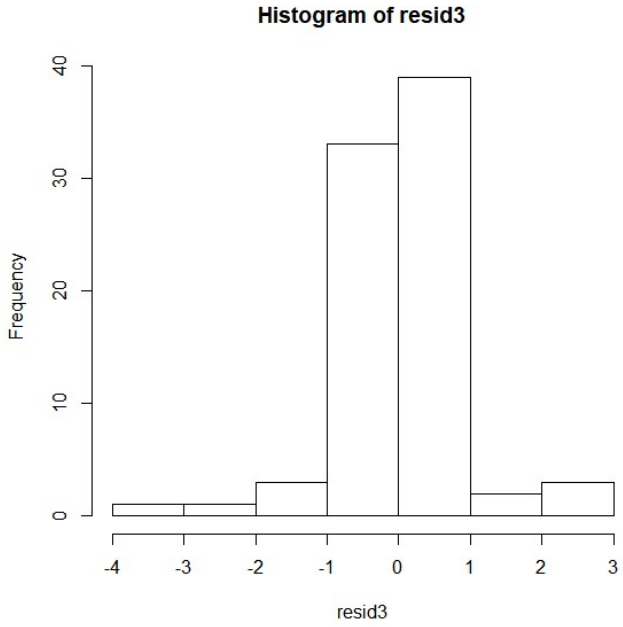
```
data:  resid5
D = 0.25199, p-value = 7.736e-05
alternative hypothesis: two-sided

Warning message:
In ks.test(resid5, pnorm) :
  ties should not be present for the Kolmogorov-Smirnov test
```

لاحظ الـ P-Value الناتجة وهي اصغرمن 0.05 أي نرفض فرضية التوزيع الطبيعي عند $\alpha = 0.05$ هناك ايضا إختبار آخر للطبيعية هو الـ Q-Q Plot والذي يبين مدي تطابق مشاهدات ما مع توزيع معين

```
> qqnorm(resid3)
> qqline(resid3)
```




```
> hist(resid3)
```




لاحظ ان في جميع الحالات فإننا نرفض ان البواقي لها توزيع طبيعي.

ملاحظة اخيرة: يبدو ان البواقي لاتحقق معظم الشروط وهذا يجعلنا نرفض جودة التطبيق لطريقة المتوسط المتحرك من الدرجة الثالثة .

يترك كتمرين المتوسط المتحرك من الدرجة 5.

# الفصل التاسع

**تحليل او تفكيك المتسلسلة الى مركبات Decomposition Method:**

ينظر إلى المتلسلسة الزمنية على انها مكونة من عدة مركبات أو اجزاء متحدة مع بعضها لتكوين هذه المتسلسلة،

لنفترض ان لدينا المتسلسلة الزمنية المشاهده $z_1, z_2, ..., z_n$ . لقد وجد بالتجربة أنه يمكن نمذجتها على الشكل

$$z_t = T_t + S_t + C_t + E_t, \quad t = 1,2,...,n$$

حيث $Z_t$ المتسلسلة الزمنية المشاهدة و $T_t$ مركبة الإنجراف وهي التي تنمذج الإتجاه العام الذي تنحي أو تنجرف اليه المتسلسلة و $S_t$ مركبة موسمية وتنمذج التأثير الموسمي (إذا وجد) وهو التغير الذي يحدث للمتسلسلة نتيجة التأثيرات الموسمية مثل الشهرية والسنوية و $C_t$ مركبة دورية (إذا وجدت) و تنمذج منحى أو إتجاة يتكرر بعد فترات زمنية طويلة غير موسمية و $E_t$ مركبة الخطأ وتشمل جميع العوامل الاخرى التي تؤثر على المتسلسلة والتي لايمكن نمذجتها ضمنيا أو التي لايمكن مشاهدتها او قياسها. النموذج السابق يسمي بالنموذج الإضافي Additive Model وذلك لأن كل المركبات تدخل بشكل إضافي في النموذج. هناك أشكال اخرى مثل

$$z_t = T_t S_t + C_t + E_t, \quad t = 1,2,...,n$$
$$z_t = T_t S_t C_t + E_t, \quad t = 1,2,...,n$$

والتي تسمى بالنماذج التضاعفية Multiplicative Models .

في هذا المستوى سوف نهمل المركبة الدورية $C_t$ وذلك لأن المركبة الدورية نادرا ماتكون موجودة في المتسلسلات القصيرة أو الطويلة نسبيا لأنها تحتاج الى مشاهدات طويلة جدا على مدي عدد كبير من العقود.

ونكتفي بالنماذج علي الشكل

$$z_t = T_t + S_t + E_t, \ t = 1,2,...,n$$
$$z_t = T_t S_t + E_t, \quad t = 1,2,...,n$$

أنظر كتاب FORECASTING: METHODS AND APPLICATIONS للمؤلفين MAKRIDAKIS/ WHEELWRIGHT/ McGEE ص 131-141

سوف نستعرض في المثال التالي طرق التحليل الإضافية والتضاعفية بدون المركبة الدورية أي النماذج

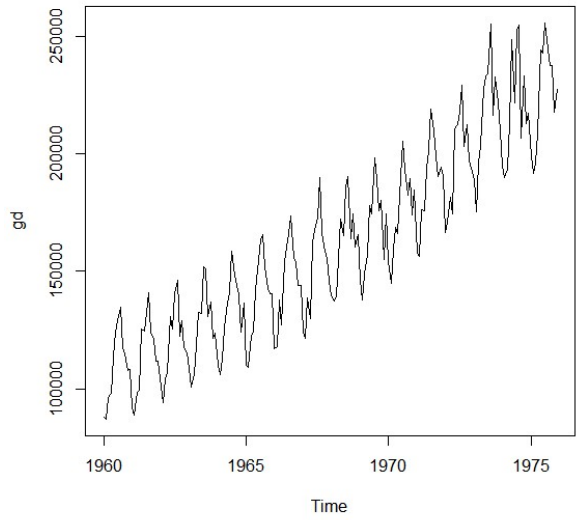
$$z_t = T_t + S_t + E_t, \ \ t = 1,2,...,n$$
$$z_t = T_t S_t + E_t \ , \quad t = 1,2,...,n$$

البيانات التالية هي الطلب علي البنزين بملايين اللترات في مدينة اونتاريو بكندة من سنة 1960 وحتى سنة 1975

```
GasDemand
 MONTHLY GASOLINE DEMAND ONTARIO GALLON MILLIONS 1960-1975
 87695  86890  96442  98133 113615 123924 128924 134775 117357 114626
 107677 108087   92188   88591   98683   99207 125485 124677 132543
140735   124008  121194  111634  111565  101007   94228  104255  106922
130621  125251   140318  146174  122318  128770  117518  115492  108497
100482  106140  118581   132371  132042  151938  150997  130931  137018
121271  123548  109894  106061   112539  125745  136251  140892  158390
148314  144148  140138  124075  136485   109895  109044  122499  124264
142296  150693  163331  165837  151731  142491   140229  140463  116963
118049  137869  127392  154166  160227  165869  173522   155828  153771
143963  143898  124046  121260  138870  129782  162312  167211   172897
189689  166496  160754  155582  145936  139625  137361  138963  155301
172026 165004 185861 190270 163903 174270 160272 165614 146182 137728
148932 156751 177998 174559 198079 189073 175702 180097 155202 174508
154277 144998 159644 168646 166273 190176 205541 193657 182617 189614
174176 184416 158167 156261 176353 175720 193939 201269 218960 209861
198688 190474 194502 190755 166286 170699 181468 174241 210802 212262
218099 229001 203200 212557 197095 193693 188992 175347 196265 203526
227443 233038 234119 255133 216478 232868 221616 209893 194784 189756
193522 212870 248565 221532 252642 255007 206826 233231 212678 217173
199024 191813 195997 208684 244113 243108 255918 244642 237579 237579
217775 227621
```

أولا نرسم المتسلسلة في مخطط زمني

```
> GasDemand <-c(87695,86890,96442,..)
> gd <- ts(GasDemand, frequency = 12, start = 1960)
> plot.ts(gd)
```




نلاحظ ان المتسلسلة الزمنية موسمية ومنجرفة الى الاعلى

اولا: تطبيق النموذج الإضافي: $z_t = T_t + S_t + E_t,\ \ t = 1,2,...,n$

```
> gdd <- decompose(gd)
> gdd
$x
        Jan     Feb     Mar     Apr     May     Jun     Jul     Aug     Sep
Oct     Nov     Dec
1960   87695   86890   96442   98133 113615 123924 128924 134775 117357
114626 107677 108087
1961   92188   88591   98683   99207 125485 124677 132543 140735 124008
121194 111634 111565
1962 101007   94228 104255 106922 130621 125251 140318 146174 122318
128770 117518 115492
1963 108497 100482 106140 118581 132371 132042 151938 150997 130931
137018 121271 123548
1964 109894 106061 112539 125745 136251 140892 158390 148314 144148
140138 124075 136485
1965 109895 109044 122499 124264 142296 150693 163331 165837 151731
142491 140229 140463
1966 116963 118049 137869 127392 154166 160227 165869 173522 155828
153771 143963 143898
1967 124046 121260 138870 129782 162312 167211 172897 189689 166496
160754 155582 145936
```

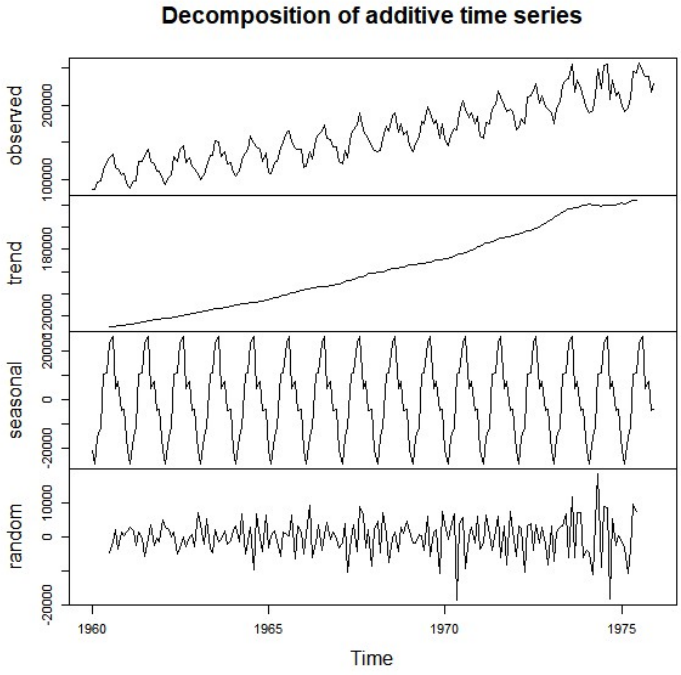
```
1968 139625 137361 138963 155301 172026 165004 185861 190270 163903
174270 160272 165614
1969 146182 137728 148932 156751 177998 174559 198079 189073 175702
180097 155202 174508
1970 154277 144998 159644 168646 166273 190176 205541 193657 182617
189614 174176 184416
1971 158167 156261 176353 175720 193939 201269 218960 209861 198688
190474 194502 190755
1972 166286 170699 181468 174241 210802 212262 218099 229001 203200
212557 197095 193693
1973 188992 175347 196265 203526 227443 233038 234119 255133 216478
232868 221616 209893
1974 194784 189756 193522 212870 248565 221532 252642 255007 206826
233231 212678 217173
1975 199024 191813 195997 208684 244113 243108 255918 244642 237579
237579 217775 227621

$seasonal
           Jan           Feb           Mar           Apr           May
Jun        Jul        Aug         Sep        Oct
1960   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1961   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1962   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1963   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1964   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1965   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1966   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1967   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1968   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1969   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
```

```
1970   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1971   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1972   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1973   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1974   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
1975   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
           Nov        Dec
1960  -4719.856  -3811.017
1961  -4719.856  -3811.017
1962  -4719.856  -3811.017
1963  -4719.856  -3811.017
1964  -4719.856  -3811.017
1965  -4719.856  -3811.017
1966  -4719.856  -3811.017
1967  -4719.856  -3811.017
1968  -4719.856  -3811.017
1969  -4719.856  -3811.017
1970  -4719.856  -3811.017
1971  -4719.856  -3811.017
1972  -4719.856  -3811.017
1973  -4719.856  -3811.017
1974  -4719.856  -3811.017
1975  -4719.856  -3811.017

$trend
          Jan       Feb       Mar       Apr       May       Jun       Jul
Aug       Sep       Oct       Nov       Dec
1960        NA        NA        NA        NA        NA        NA 110032.6
110290.7 110455.0 110593.1 111132.4 111658.4
1961 111840.5 112239.7 112765.1 113315.9 113754.5 114064.2 114576.6
115179.0 115646.0 116199.6 116735.1 116973.0
1962 117320.9 117871.5 118027.7 118272.9 118833.7 119242.5 119718.2
120290.9 120630.0 121194.4 121753.1 122109.0
1963 122876.1 123561.2 124121.0 124823.6 125323.6 125815.7 126209.5
126500.2 126999.3 127564.4 128024.6 128555.0
```

```
1964 129192.6 129349.6 129788.5 130469.2 130716.1 131372.0 131911.0
132035.4 132574.7 132928.0 133118.1 133778.4
1965 134392.6 135328.6 136374.7 136788.7 137559.8 138398.7 138858.9
139528.6 140544.2 141315.0 141939.9 142831.8
1966 143334.8 143760.7 144251.6 144892.3 145517.9 145816.6 146254.9
146683.8 146859.3 147000.6 147439.6 148070.0
1967 148653.8 149620.3 150738.4 151473.9 152249.0 152818.0 153552.0
154872.0 155546.8 156614.0 158082.0 158394.8
1968 158843.0 159407.4 159323.5 159778.7 160537.2 161552.6 162645.7
162934.2 163364.9 163840.7 164149.9 164796.9
1969 165704.1 166163.3 166605.0 167339.5 167371.0 167530.3 168238.2
168878.4 169627.7 170569.6 170576.7 170738.9
1970 171700.5 172202.4 172681.5 173366.2 174553.3 175756.7 176331.7
176963.0 178128.5 179119.5 180567.0 182182.0
1971 183203.3 184437.6 185782.4 186487.8 187370.6 188481.6 189084.0
190023.9 190838.6 190990.1 191631.1 192791.8
1972 193214.0 193975.6 194961.1 196069.2 197097.4 197327.8 198396.3
199536.1 200346.3 202183.0 204096.6 205655.7
1973 207188.8 208945.2 210587.3 211986.8 213854.8 215551.5 216467.8
217309.5 217795.6 218070.7 219340.1 219740.7
1974 220033.1 220799.7 220392.2 220005.2 219647.9 219578.8 220058.8
220321.2 220510.0 220438.8 220078.8 220792.3
1975 221827.8 221532.5 222382.0 223844.5 224238.0 224885.8        NA
NA       NA       NA       NA       NA

$random
                Jan               Feb               Mar               Apr
May             Jun             Jul             Aug
1960              NA              NA              NA              NA
NA             NA -4.812072e+03 -1.587389e+03
1961    1.622236e+03    2.827325e+03    1.678269e+03  -2.715236e+03
1.302986e+03 -3.289389e+02 -5.737072e+03 -5.156389e+02
1962    4.960903e+03    2.832533e+03    1.987728e+03    4.276389e+01
1.359694e+03 -4.933231e+03 -3.103697e+03 -1.885972e+02
1963    6.895694e+03    3.396783e+03  -2.220647e+03    5.151097e+03  -
3.380181e+03 -4.715356e+03  2.025011e+03 -1.574889e+03
1964    1.976194e+03    3.187367e+03  -1.489147e+03    6.669431e+03  -
4.892639e+03 -1.421647e+03  2.775511e+03 -9.793056e+03
1965  -3.222847e+03    1.913667e+02    1.884686e+03  -1.131028e+03  -
5.691389e+03  1.352644e+03  7.686361e+02  2.366944e+02
```

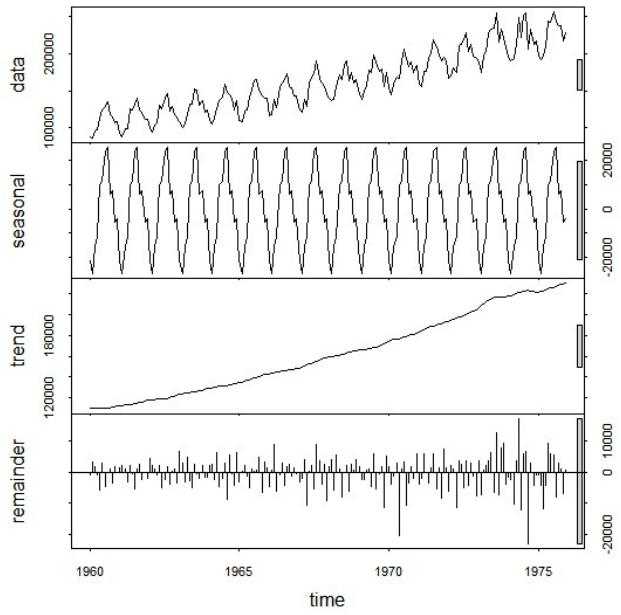
```
1966  -5.096972e+03    7.642833e+02    9.377769e+03  -6.106653e+03  -
1.779472e+03  3.468686e+03 -4.089322e+03  7.665278e+02
1967  -3.333056e+03  -1.884300e+03    3.891978e+03  -1.029819e+04  -
3.645139e+02  3.451311e+03 -4.358489e+03  8.745278e+03
1968    2.056778e+03    4.429617e+03  -4.600147e+03    6.916014e+03
1.061194e+03 -7.490272e+03 -4.881556e+02  1.264111e+03
1969    1.752694e+03  -1.959300e+03  -1.912647e+03    8.052222e+02
1.994444e+02 -3.913022e+03  6.137344e+03 -5.877097e+03
1970    3.851278e+03  -7.284250e+02    2.722853e+03    6.673472e+03  -
1.870789e+04  3.477561e+03  5.505886e+03 -9.377722e+03
1971  -3.761514e+03  -1.700592e+03    6.331019e+03    6.258472e+02  -
3.859139e+03  1.845686e+03  6.172511e+03 -6.234597e+03
1972  -5.653181e+03    3.199408e+03    2.267311e+03  -1.043453e+04
3.277069e+03  3.992478e+03 -4.000781e+03  3.393236e+03
1973    3.077944e+03  -7.122175e+03    1.438144e+03    2.932889e+03
3.160653e+03  6.544811e+03 -6.052281e+03  1.175178e+04
1974  -3.974347e+03  -4.567675e+03  -1.110986e+04    4.258472e+03
1.848953e+04 -8.988522e+03  8.879719e+03  8.614111e+03
1975  -1.529056e+03  -3.243467e+03  -1.062456e+04  -3.766819e+03
9.447403e+03  7.280561e+03           NA           NA
               Sep           Oct           Nov           Dec
1960  2.185956e+03 -3.542342e+03  1.264439e+03  2.396417e+02
1961  3.645914e+03 -2.580883e+03 -3.812278e+02 -1.596983e+03
1962 -3.028128e+03  3.666667e-01  4.847722e+02 -2.805942e+03
1963 -7.843778e+02  1.878325e+03 -2.033728e+03 -1.195983e+03
1964  6.857247e+03 -3.652167e+02 -4.323269e+03  6.517642e+03
1965  6.470664e+03 -6.399258e+03  3.008939e+03  1.442267e+03
1966  4.252622e+03 -8.048417e+02  1.243272e+03 -3.609833e+02
1967  6.233122e+03 -3.435217e+03  2.219856e+03 -8.647775e+03
1968 -4.177961e+03  2.854075e+03  8.419389e+02  4.628142e+03
1969  1.358247e+03  1.952117e+03 -1.065485e+04  7.580142e+03
1970 -2.276278e+02  2.919242e+03 -1.671144e+03  6.045058e+03
1971  3.133289e+03 -8.091383e+03  7.590731e+03  1.774225e+03
1972 -1.862378e+03  2.798700e+03 -2.281769e+03 -8.151650e+03
1973 -6.033711e+03  7.222075e+03  6.995772e+03 -6.036733e+03
1974 -1.840013e+04  5.216992e+03 -2.680978e+03  1.916833e+02
1975           NA            NA            NA            NA

$figure
 [1]   -21274.778   -26475.992   -15760.394   -11393.681     10427.556
10941.689  23703.447  26071.681   4716.086   7575.258
```

```
[11]  -4719.856  -3811.017

$type
[1] "additive"

attr(,"class")
[1] "decomposed.ts"
> plot(gdd)
>
```

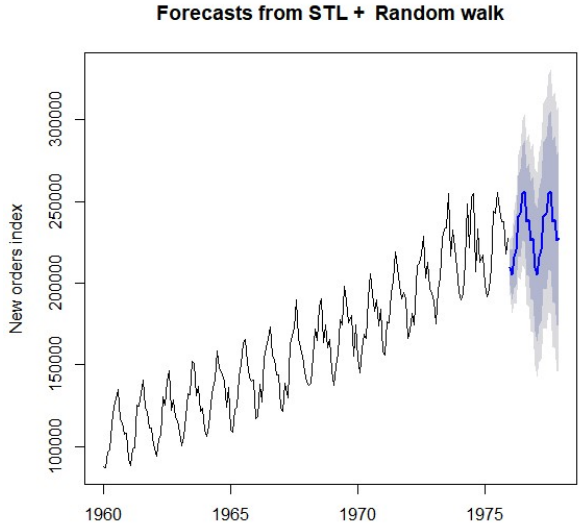



بإستخدام الدالة stl من مكتبة forecast

```
> fit <-
stl(gd,t.window=15,s.window="periodic",robust=TRUE)
> plot(fit)
```




```
> gdadj <- seasadj(fit)
> plot(naive(gdadj), xlab="New orders index", main="Naive
forecasts of seasonally adjusted data")
> fcast <- forecast(fit, method="naive")
> plot(fcast, ylab="New orders index")
```




ثانيا: تطبيق النموذج التضاعفي: $z_t = T_t S_t + E_t \,, \quad t = 1,2,...,n$

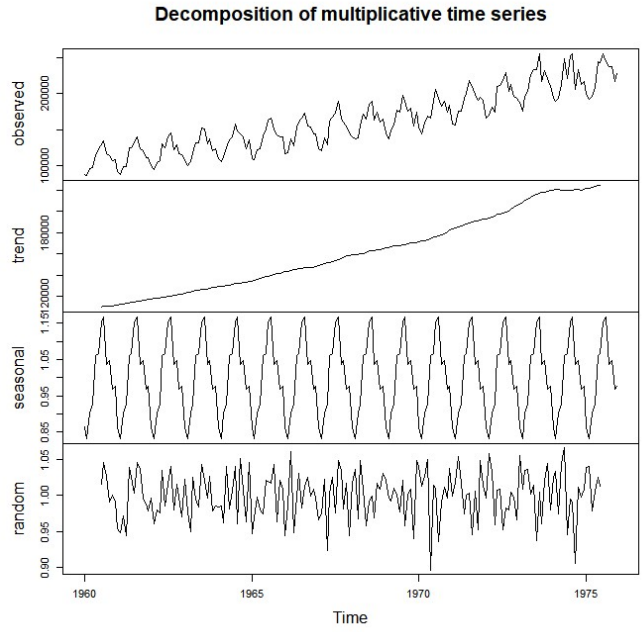
```
> gdm <- decompose(gd, type = c("multiplicative"), filter = NULL)
> gdm
```

```
$x
        Jan     Feb     Mar     Apr     May     Jun     Jul     Aug     Sep
Oct     Nov     Dec
1960   87695   86890   96442   98133 113615 123924 128924 134775 117357
114626 107677 108087
1961   92188   88591   98683   99207 125485 124677 132543 140735 124008
121194 111634 111565
1962 101007   94228 104255 106922 130621 125251 140318 146174 122318
128770 117518 115492
1963 108497 100482 106140 118581 132371 132042 151938 150997 130931
137018 121271 123548
1964 109894 106061 112539 125745 136251 140892 158390 148314 144148
140138 124075 136485
1965 109895 109044 122499 124264 142296 150693 163331 165837 151731
142491 140229 140463
1966 116963 118049 137869 127392 154166 160227 165869 173522 155828
153771 143963 143898
1967 124046 121260 138870 129782 162312 167211 172897 189689 166496
160754 155582 145936
1968 139625 137361 138963 155301 172026 165004 185861 190270 163903
174270 160272 165614
1969 146182 137728 148932 156751 177998 174559 198079 189073 175702
180097 155202 174508
1970 154277 144998 159644 168646 166273 190176 205541 193657 182617
189614 174176 184416
1971 158167 156261 176353 175720 193939 201269 218960 209861 198688
190474 194502 190755
1972 166286 170699 181468 174241 210802 212262 218099 229001 203200
212557 197095 193693
1973 188992 175347 196265 203526 227443 233038 234119 255133 216478
232868 221616 209893
1974 194784 189756 193522 212870 248565 221532 252642 255007 206826
233231 212678 217173
1975 199024 191813 195997 208684 244113 243108 255918 244642 237579
237579 217775 227621

$seasonal
           Jan         Feb         Mar         Apr         May         Jun
Jul        Aug        Sep        Oct        Nov        Dec
1960  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
```

```
1961  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1962  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1963  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1964  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1965  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1966  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1967  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1968  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1969  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1970  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1971  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1972  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1973  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1974  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1975  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888

$trend
          Jan       Feb       Mar       Apr       May       Jun       Jul
Aug       Sep       Oct       Nov       Dec
1960        NA        NA        NA        NA        NA        NA 110032.6
110290.7 110455.0 110593.1 111132.4 111658.4
1961 111840.5 112239.7 112765.1 113315.9 113754.5 114064.2 114576.6
115179.0 115646.0 116199.6 116735.1 116973.0
1962 117320.9 117871.5 118027.7 118272.9 118833.7 119242.5 119718.2
120290.9 120630.0 121194.4 121753.1 122109.0
```

```
1963 122876.1 123561.2 124121.0 124823.6 125323.6 125815.7 126209.5
126500.2 126999.3 127564.4 128024.6 128555.0
1964 129192.6 129349.6 129788.5 130469.2 130716.1 131372.0 131911.0
132035.4 132574.7 132928.0 133118.1 133778.4
1965 134392.6 135328.6 136374.7 136788.7 137559.8 138398.7 138858.9
139528.6 140544.2 141315.0 141939.9 142831.8
1966 143334.8 143760.7 144251.6 144892.3 145517.9 145816.6 146254.9
146683.8 146859.3 147000.6 147439.6 148070.0
1967 148653.8 149620.3 150738.4 151473.9 152249.0 152818.0 153552.0
154872.0 155546.8 156614.0 158082.0 158394.8
1968 158843.0 159407.4 159323.5 159778.7 160537.2 161552.6 162645.7
162934.2 163364.9 163840.7 164149.9 164796.9
1969 165704.1 166163.3 166605.0 167339.5 167371.0 167530.3 168238.2
168878.4 169627.7 170569.6 170576.7 170738.9
1970 171700.5 172202.4 172681.5 173366.2 174553.3 175756.7 176331.7
176963.0 178128.5 179119.5 180567.0 182182.0
1971 183203.3 184437.6 185782.4 186487.8 187370.6 188481.6 189084.0
190023.9 190838.6 190990.1 191631.1 192791.8
1972 193214.0 193975.6 194961.1 196069.2 197097.4 197327.8 198396.3
199536.1 200346.3 202183.0 204096.6 205655.7
1973 207188.8 208945.2 210587.3 211986.8 213854.8 215551.5 216467.8
217309.5 217795.6 218070.7 219340.1 219740.7
1974 220033.1 220799.7 220392.2 220005.2 219647.9 219578.8 220058.8
220321.2 220510.0 220438.8 220078.8 220792.3
1975 221827.8 221532.5 222382.0 223844.5 224238.0 224885.8        NA
NA       NA       NA       NA       NA


$random
           Jan         Feb         Mar         Apr         May         Jun
Jul       Aug       Sep       Oct       Nov       Dec
1960         NA          NA          NA          NA          NA          NA
1.0154649 1.0455756 1.0266339 0.9903915 1.0008600 0.9925421
1961  0.9539934  0.9487674  0.9714236  0.9444431  1.0386618  1.0246523
1.0025669 1.0454759 1.0361220 0.9966166 0.9878392 0.9779330
1962  0.9964291  0.9609213  0.9805149  0.9752280  1.0349610  0.9846678
1.0157940 1.0397342 0.9797758 1.0152756 0.9970469 0.9697754
1963  1.0219287  0.9775132  0.9492373  1.0248088  0.9945135  0.9838233
1.0433423 1.0213207 0.9961689 1.0263602 0.9784863 0.9854022
1964  0.9844794  0.9856145  0.9625157  1.0396974  0.9814348  1.0053642
1.0406369 0.9611184 1.0506060 1.0073753 0.9628048 1.0460821
```

```
1965  0.9463956  0.9685647  0.9971025  0.9799851  0.9739840  1.0207066
1.0194066 1.0169583 1.0431651 0.9634981 1.0205269 1.0083329
1966  0.9444245  0.9870488  1.0609307  0.9484646  0.9975230  1.0300739
0.9828958 1.0121793 1.0252644 0.9995559 1.0086209 0.9964476
1967  0.9657771  0.9741898  1.0226466  0.9242748  1.0037998  1.0257229
0.9758532 1.0479828 1.0342715 0.9808058 1.0166421 0.9446878
1968  1.0173382  1.0357896  0.9681894  1.0485276  1.0089486  0.9574593
0.9903718 0.9991785 0.9694380 1.0163719 1.0085749 1.0304214
1969  1.0210122  0.9963311  0.9922954  1.0105001  1.0013495  0.9767615
1.0203905 0.9579446 1.0008565 1.0089195 0.9398721 1.0479721
1970  1.0399198  1.0121370  1.0262373  1.0493878  0.8969007  1.0143397
1.0102312 0.9363445 0.9906027 1.0115311 0.9964169 1.0379107
1971  0.9992010  1.0183984  1.0537060  1.0164712  0.9745734  1.0010312
1.0036043 0.9449493 1.0059981 0.9529640 1.0484535 1.0145049
1972  0.9960644  1.0577924  1.0332210  0.9586617  1.0070353  1.0083787
0.9527361 0.9819762 0.9800183 1.0045751 0.9975414 0.9656951
1973  1.0557165  1.0087476  1.0345510  1.0357036  1.0013926  1.0134806
0.9373373 1.0045530 0.9604094 1.0203855 1.0436966 0.9793865
1974  1.0245554  1.0330317  0.9747094  1.0437726  1.0655251  0.9457704
0.9949915 0.9903320 0.9062929 1.0109974 0.9982411 1.0085295
1975  1.0383880  1.0407758  0.9783426  1.0056969  1.0250202  1.0133910
NA        NA        NA        NA        NA        NA

$figure
 [1]  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888

$type
[1] "multiplicative"

attr(,"class")
[1] "decomposed.ts"
> plot(gdm)
```



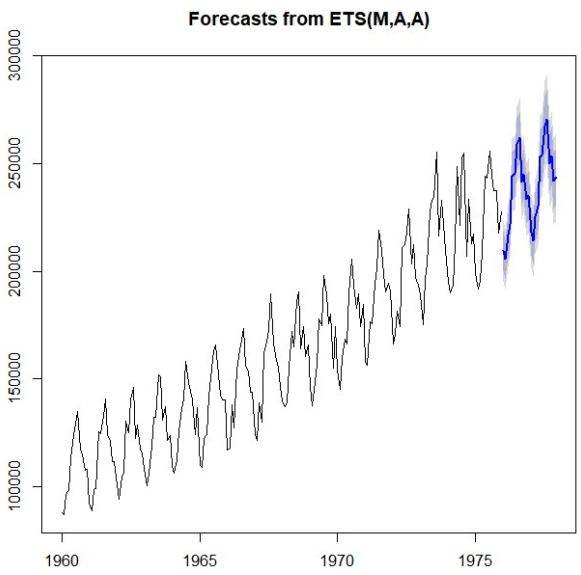

```
> gdm <- decompose(gd, type = c("multiplicative"), filter = NULL)
> gdm
$x
        Jan     Feb     Mar     Apr     May     Jun     Jul     Aug     Sep
Oct     Nov     Dec
1960   87695   86890   96442   98133 113615 123924 128924 134775 117357
114626 107677 108087
1961   92188   88591   98683   99207 125485 124677 132543 140735 124008
121194 111634 111565
1962 101007   94228 104255 106922 130621 125251 140318 146174 122318
128770 117518 115492
1963 108497 100482 106140 118581 132371 132042 151938 150997 130931
137018 121271 123548
1964 109894 106061 112539 125745 136251 140892 158390 148314 144148
140138 124075 136485
1965 109895 109044 122499 124264 142296 150693 163331 165837 151731
142491 140229 140463
1966 116963 118049 137869 127392 154166 160227 165869 173522 155828
153771 143963 143898
1967 124046 121260 138870 129782 162312 167211 172897 189689 166496
160754 155582 145936
1968 139625 137361 138963 155301 172026 165004 185861 190270 163903
174270 160272 165614
```

```
1969 146182 137728 148932 156751 177998 174559 198079 189073 175702
180097 155202 174508
1970 154277 144998 159644 168646 166273 190176 205541 193657 182617
189614 174176 184416
1971 158167 156261 176353 175720 193939 201269 218960 209861 198688
190474 194502 190755
1972 166286 170699 181468 174241 210802 212262 218099 229001 203200
212557 197095 193693
1973 188992 175347 196265 203526 227443 233038 234119 255133 216478
232868 221616 209893
1974 194784 189756 193522 212870 248565 221532 252642 255007 206826
233231 212678 217173
1975 199024 191813 195997 208684 244113 243108 255918 244642 237579
237579 217775 227621

$seasonal
          Jan        Feb        Mar        Apr        May        Jun
Jul       Aug       Sep       Oct       Nov       Dec
1960  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1961  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1962  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1963  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1964  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1965  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1966  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1967  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1968  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1969  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1970  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
```

```
1971  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1972  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1973  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1974  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888
1975  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888

$trend
          Jan       Feb       Mar       Apr       May       Jun       Jul
Aug       Sep       Oct       Nov       Dec
1960       NA        NA        NA        NA        NA        NA 110032.6
110290.7 110455.0 110593.1 111132.4 111658.4
1961 111840.5 112239.7 112765.1 113315.9 113754.5 114064.2 114576.6
115179.0 115646.0 116199.6 116735.1 116973.0
1962 117320.9 117871.5 118027.7 118272.9 118833.7 119242.5 119718.2
120290.9 120630.0 121194.4 121753.1 122109.0
1963 122876.1 123561.2 124121.0 124823.6 125323.6 125815.7 126209.5
126500.2 126999.3 127564.4 128024.6 128555.0
1964 129192.6 129349.6 129788.5 130469.2 130716.1 131372.0 131911.0
132035.4 132574.7 132928.0 133118.1 133778.4
1965 134392.6 135328.6 136374.7 136788.7 137559.8 138398.7 138858.9
139528.6 140544.2 141315.0 141939.9 142831.8
1966 143334.8 143760.7 144251.6 144892.3 145517.9 145816.6 146254.9
146683.8 146859.3 147000.6 147439.6 148070.0
1967 148653.8 149620.3 150738.4 151473.9 152249.0 152818.0 153552.0
154872.0 155546.8 156614.0 158082.0 158394.8
1968 158843.0 159407.4 159323.5 159778.7 160537.2 161552.6 162645.7
162934.2 163364.9 163840.7 164149.9 164796.9
1969 165704.1 166163.3 166605.0 167339.5 167371.0 167530.3 168238.2
168878.4 169627.7 170569.6 170576.7 170738.9
1970 171700.5 172202.4 172681.5 173366.2 174553.3 175756.7 176331.7
176963.0 178128.5 179119.5 180567.0 182182.0
1971 183203.3 184437.6 185782.4 186487.8 187370.6 188481.6 189084.0
190023.9 190838.6 190990.1 191631.1 192791.8
1972 193214.0 193975.6 194961.1 196069.2 197097.4 197327.8 198396.3
199536.1 200346.3 202183.0 204096.6 205655.7
```

```
1973 207188.8 208945.2 210587.3 211986.8 213854.8 215551.5 216467.8
217309.5 217795.6 218070.7 219340.1 219740.7
1974 220033.1 220799.7 220392.2 220005.2 219647.9 219578.8 220058.8
220321.2 220510.0 220438.8 220078.8 220792.3
1975 221827.8 221532.5 222382.0 223844.5 224238.0 224885.8       NA
NA       NA       NA       NA       NA

$random
           Jan         Feb         Mar         Apr         May         Jun
Jul        Aug        Sep        Oct        Nov        Dec
1960         NA          NA          NA          NA          NA          NA
1.0154649 1.0455756 1.0266339 0.9903915 1.0008600 0.9925421
1961  0.9539934  0.9487674  0.9714236  0.9444431  1.0386618  1.0246523
1.0025669 1.0454759 1.0361220 0.9966166 0.9878392 0.9779330
1962  0.9964291  0.9609213  0.9805149  0.9752280  1.0349610  0.9846678
1.0157940 1.0397342 0.9797758 1.0152756 0.9970469 0.9697754
1963  1.0219287  0.9775132  0.9492373  1.0248088  0.9945135  0.9838233
1.0433423 1.0213207 0.9961689 1.0263602 0.9784863 0.9854022
1964  0.9844794  0.9856145  0.9625157  1.0396974  0.9814348  1.0053642
1.0406369 0.9611184 1.0506060 1.0073753 0.9628048 1.0460821
1965  0.9463956  0.9685647  0.9971025  0.9799851  0.9739840  1.0207066
1.0194066 1.0169583 1.0431651 0.9634981 1.0205269 1.0083329
1966  0.9444245  0.9870488  1.0609307  0.9484646  0.9975230  1.0300739
0.9828958 1.0121793 1.0252644 0.9995559 1.0086209 0.9964476
1967  0.9657771  0.9741898  1.0226466  0.9242748  1.0037998  1.0257229
0.9758532 1.0479828 1.0342715 0.9808058 1.0166421 0.9446878
1968  1.0173382  1.0357896  0.9681894  1.0485276  1.0089486  0.9574593
0.9903718 0.9991785 0.9694380 1.0163719 1.0085749 1.0304214
1969  1.0210122  0.9963311  0.9922954  1.0105001  1.0013495  0.9767615
1.0203905 0.9579446 1.0008565 1.0089195 0.9398721 1.0479721
1970  1.0399198  1.0121370  1.0262373  1.0493878  0.8969007  1.0143397
1.0102312 0.9363445 0.9906027 1.0115311 0.9964169 1.0379107
1971  0.9992010  1.0183984  1.0537060  1.0164712  0.9745734  1.0010312
1.0036043 0.9449493 1.0059981 0.9529640 1.0484535 1.0145049
1972  0.9960644  1.0577924  1.0332210  0.9586617  1.0070353  1.0083787
0.9527361 0.9819762 0.9800183 1.0045751 0.9975414 0.9656951
1973  1.0557165  1.0087476  1.0345510  1.0357036  1.0013926  1.0134806
0.9373373 1.0045530 0.9604094 1.0203855 1.0436966 0.9793865
1974  1.0245554  1.0330317  0.9747094  1.0437726  1.0655251  0.9457704
0.9949915 0.9903320 0.9062929 1.0109974 0.9982411 1.0085295
```

```
1975  1.0383880  1.0407758  0.9783426  1.0056969  1.0250202  1.0133910
NA         NA         NA         NA         NA         NA

$figure
 [1]  0.8640319  0.8319237  0.9008633  0.9269912  1.0620604  1.0667441
1.1538448 1.1687321 1.0349234 1.0465218 0.9680746 0.9752888

$type
[1] "multiplicative"

attr(,"class")
[1] "decomposed.ts"
> plot(gdm)
> predict(gd)
         Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
Jan 1976       209498.7 200385.0 218612.3 195560.5 223436.8
Feb 1976       205582.0 196553.6 214610.4 191774.2 219389.8
Mar 1976       216637.5 207052.2 226222.8 201978.0 231296.9
Apr 1976       221799.3 211904.3 231694.3 206666.2 236932.5
May 1976       244328.6 233388.9 255268.4 227597.7 261059.5
Jun 1976       245544.7 234448.1 256641.2 228574.0 262515.4
Jul 1976       259021.8 247256.0 270787.5 241027.6 277015.9
Aug 1976       262152.9 250141.5 274164.3 243783.0 280522.8
Sep 1976       241460.1 230170.4 252749.9 224194.0 258726.3
Oct 1976       245069.2 233518.4 256620.1 227403.7 262734.7
Nov 1976       233483.8 222271.3 244696.2 216335.8 250631.8
Dec 1976       235138.2 223742.0 246534.4 217709.2 252567.2
Jan 1977       218126.7 207260.0 228993.5 201507.4 234746.1
Feb 1977       214210.1 203370.3 225049.8 197632.1 230788.0
Mar 1977       225265.5 213893.1 236638.0 207872.9 242658.2
Apr 1977       230427.4 218736.9 242117.9 212548.3 248306.5
May 1977       252956.7 240294.6 265618.8 233591.6 272321.8
Jun 1977       254172.7 241326.8 267018.7 234526.6 273818.9
Jul 1977       267649.8 254160.1 281139.6 247019.0 288280.7
Aug 1977       270781.0 257027.3 284534.7 249746.6 291815.4
Sep 1977       250088.2 236937.5 263238.9 229976.0 270200.5
Oct 1977       253697.3 240269.5 267125.0 233161.3 274233.2
Nov 1977       242111.8 228938.8 255284.9 221965.5 262258.2
Dec 1977       243766.3 230385.0 257147.5 223301.4 264231.1
> pgd <- predict(gd)
> plot(pgd)
```




مناقشة النتائج:

عند تطبيق أكثر من نموذج للتمهيد يجب ان نختار افضل نموذج، وهنا يأتي دور مقاييس دقة التطبيق والتي تنتج من البرنامج، لدينا ثلاثة مقاييس دقة:

1- متوسط الخطأ النسبي المطلق Mean Absolute Percentage Error أو MAPE ويعطى بالعلاقة

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{z_t - \hat{z}_t}{z_t}\right|}{n} \times 100, \quad z_t \neq 0$$

2- متوسط الإنحراف المطلق Mean Absolute Deviation أو MAD ويعطى بالعلاقة

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^{n}|z_t - \hat{z}_t|}{n}$$

3- متوسط ألإنحراف المربع (أو متوسط الخطأ المربع) MSD (أو MSE ) ويعطى بالعلاقة

$$MSD = \frac{\sum_{t=1}^{n}(z_t - \hat{z}_t)^2}{n}$$

بإختيار أحد هذة المقاييس نختار النموذج الذي يعطي أقل قيمة لهذا المقياس، المقياس الأكثر إستخداما وشيوعا هو MSD أو MSE وهو الذي سوف هنا.

```
> MAPE <- (sum(abs(gd - pgd$fitted)/gd)/length(gd))*100
> MAPE
```

```
[1] 2.755263
> MAD <- sum(abs(gd - pgd$fitted))/length(gd)
> MAD
[1] 4559.612
> MSD <- sum((gd - pgd$fitted)^2))/length(gd)
> MSD
[1] 34682600
```

للنموذج الإضافي مقاييس الدقة هي:

MAPE: 2.755263

MAD: 4559.612

MSD: 34682600

يترك للطالب كتمرين إيجاد مقاييس دقة التطبيق للنموذج التضاعفي.

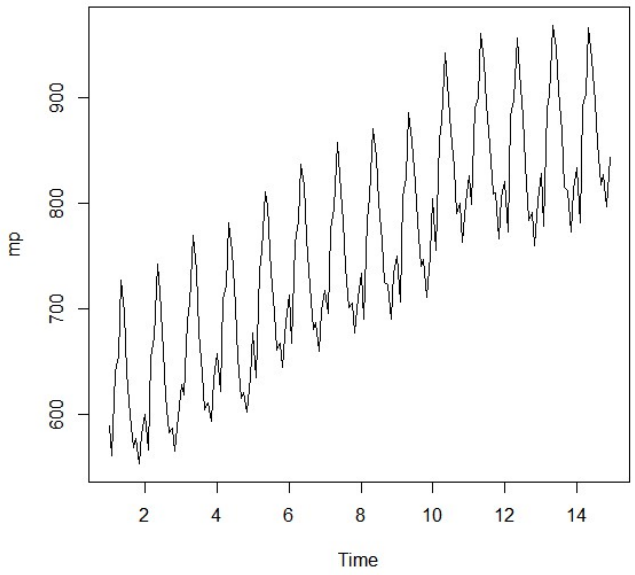
**توضيح طريقة تحليل او تفكيك المتسلسلة الى مركبات Decomposition Method:**

سوف نوضح بالمثال التالي طريقة تحليل أو تفكيك المتسلسلة إلى مركبات. البيانات التالية إنتاج 168 يوما للحليب في أحد المزارع بالكيلو جرام

```
MilkProd
589   561   640   656   727   697   640   599   568   577
553   582   600   566   653   673   742   716   660   617
583   587   565   598   628   618   688   705   770   736
678   639   604   611   594   634   658   622   709   722
782   756   702   653   615   621   602   635   677   635
736   755   811   798   735   697   661   667   645   688
713   667   762   784   837   817   767   722   681   687
660   698   717   696   775   796   858   826   783   740
701   706   677   711   734   690   785   805   871   845
801   764   725   723   690   734   750   707   807   824
886   859   819   783   740   747   711   751   804   756
860   878   942   913   869   834   790   800   763   800
826   799   890   900   961   935   894   855   809   810
766   805   821   773   883   898   957   924   881   837
784   791   760   802   828   778   889   902   969   947
908   867   815   812   773   813   834   782   892   903
966   937   896   858   817   827   797   843
```

ونرسم البيانات السابقة بالأوامر:

```
> mp <- ts(MilkProd, frequency =12)
> plot.ts(mp)
```




اولا: تطبيق النموذج الإضافي:

لمشاهدات $z_1, z_2, ..., z_n$ نكتب النموذج على الشكل $z_t = T_t + S_t + E_t,\ t = 1,2,...,n$ لكي نقوم بتفكيك هذه المتسلسلة الزمنية الي المركبات السابقة سوف نستعرض طريقتين ممكنة:

الطريقة الاولي:

1- نطبق إنحدار خطي بسيط للمشاهدات علي الزمن لتقدير مركبة الانجراف $T_t$ أي:

$$\hat{T}_t \equiv \hat{z}_t = a + bt, t = 1,2,...,168$$

أي:

```
> inx = c(1:168)
> trnd <- lm(mp ~ inx)
> trnd

Call:
lm(formula = mp ~ inx)
```

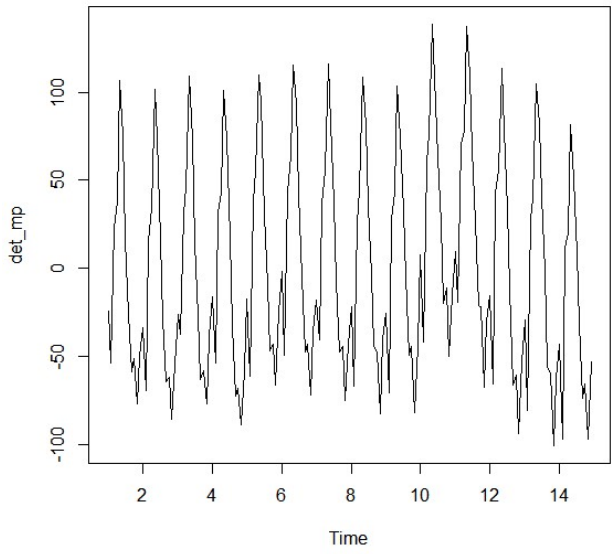
```
Coefficients:
(Intercept)          inx
    611.682        1.693
```

2- نطرح مركبة الإنجراف من المشاهدات الاصلية فنحصل علي مايسمي بالمتسلسلة مزالة الإنجراف Detrended Series أي $z_t - \hat{z}_t = z_t - \hat{T}_t, t = 1,2,...,168$

```
> det_mp = mp - trnd$fitted
```

ولها الشكل التالي:

```
> plot.ts(det_mp)
```




نلاحظ انها اصبحت موسمية فقط لأن $z_t - \hat{T}_t = S_t + E_t, t = 1,2,...,168$

3- لتقدير المركبة الموسمية نوجد المؤشرات الموسمية Seasonal Indices كالتالي:

لنرمز للمؤشرات الموسمية بالرمز $I_s, s = 1,2,...,12$ حيث $I_1$ المؤشر الموسمي للشهر الأول و $I_2$ المؤشر الموسمي للشهر الثاني وهكذا ولنرمز بـ $d_t = z_t - \hat{T}_t, t = 1,2,...,168$ تقدر هذه المؤشرات كالتالي:

$$I_1 = \frac{1}{14}\left(d_1 + d_{13} + d_{25} + \cdots + d_{157}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{14}\left(d_2 + d_{14} + d_{26} + \cdots + d_{158}\right)$$

$$\vdots$$

$$I_{12} = \frac{1}{14}\left(d_{12} + d_{24} + d_{36} + \cdots + d_{168}\right)$$

ويتم ذلك بإلتالي:

```
n <- length(det_mp)-11
s1 <- seq(1, n, by = 12)
> s <- data.frame(matrix(nrow = 12, ncol = 14))
> s[1,] = s1
> for (i in 2:12) {
    s[i,] = s1+i-1
  }
> st =t(s)
> I <- data.frame(matrix(nrow = 12,ncol = 1))
> colnames(I) <- c("season Index")
> for (i in 1:12) {
     I[i,] = mean(det_mp[st[,i]])
   }
> I
   season Index
1    -18.327521
2    -57.805851
3     34.715820
4     49.594633
5    110.616304
6     82.280831
7     32.516788
8     -9.747256
9    -52.297014
10   -48.775344
```

```
11    -79.753673
12    -43.017717
```

4- التنبؤات تولد كالتالي:

$$z_{168}(\ell) = 612 + 1.69(\ell + 168) + I_{(\ell \bmod 12)}, \ell = 1,2,...$$

فمثلا التنبؤ عند اليوم 169 هو

$$z_{168}(1) = 612 + 1.69(169) + I_1$$
$$= 897.61 + (-18.328) = 879.282$$

الطريقة الثانية:

وهي التي يستخدمها برنامج Minitab :

1- كالطريقة الاولى نطبق إنحدار خطي بسيط للمشاهدات علي الزمن لتقدير مركبة الانجراف $T_t$ فنحصل على نفس النتيجة كما في الطريقة الاولى (1)

2- ايضا هنا نطرح مركبة الإنجراف من المشاهدات الاصلية فنحصل علي المتسلسلة مزالة الإنجراف Detrended Series

3- نطبق الآن متوسط متحرك من درجة الموسم ونوسطه اذا احتاج الامر

4- نطرح المتوسطات المتحركة من نظيراتها في المتسلسلة مزالة الإنجراف فنحصل علي متسلسلة تحوي المركبات الموسمية

5- تقدر المركبات الموسمية كالتالي:

$$I_1 = Median(d_1, d_{13}, d_{25}, \cdots, d_{157})$$
$$I_2 = Median(d_2, d_{14}, d_{26}, \cdots, d_{158})$$
$$\vdots$$
$$I_{12} = Median(d_{12}, d_{24}, d_{36}, \cdots, d_{168})$$

6- تولد التنبؤات كالسابق

وسوف نستعرض هذا كالتالي:

```
> mp <- ts(MilkProd, frequency = 12)
> inx <- c(1:168)
> trnd <- lm(mp ~ inx)
> det_mp = mp - trnd$fitted
```

في الخطوة التالية نطبق متوسط متحرك من الدرجة 12 ونوسطه:

```
> mdet = filter(det_mp,
filter=c(1/24,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/1
2,1/12,1/12,1/24), sides=2)
```

نطرح المتوسطات المتحركة الموسطة من المتسلسلة المزال إنجرافها

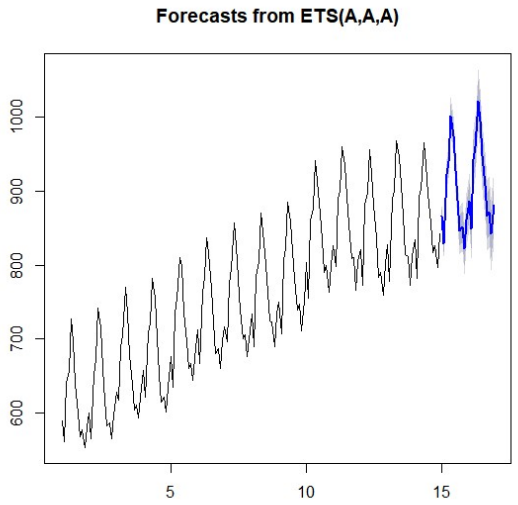
```
> library(forecast)
> sm <- ma(det_mp,order=12)
> ssm = det_mp - sm
> ssm[is.na(ssm)] <- 0
> for (i in 1:12) {
+      Index[i,] = median(ssm[st[,i]])
+    }
> Index
   season Index
1     -20.60417
2     -58.89583
3      35.39583
4      48.50000
5     109.43750
6      81.16667
7      33.68750
8      -8.18750
9     -51.77083
10    -48.89583
11    -79.29167
12    -43.29167
```

يترك للطالب كتمرين للمقارنه بين الحسابات التي اجريناها مع الحسابات السابقة.

سوف نولد تنبؤات باستخدام التالي:

```
> forecast(mp , h=24)
       Point Forecast    Lo 80     Hi 80    Lo 95     Hi 95
Jan 15       866.6590 857.4940  875.8239 852.6424  880.6755
Feb 15       828.5864 817.2805  839.8923 811.2955  845.8773
Mar 15       923.2189 910.1169  936.3210 903.1811  943.2568
Apr 15       939.8496 925.1691  954.5302 917.3977  962.3016
```

```
May 15      1002.5333 986.4278 1018.6388 977.9020 1027.1645
Jun 15       975.6267 958.2121  993.0414 948.9934 1002.2601
Jul 15       927.8921 909.2597  946.5245 899.3963  956.3879
Aug 15       887.5150 867.7394  907.2907 857.2707  917.7593
Sep 15       846.7471 825.8905  867.6038 814.8496  878.6447
Oct 15       851.7846 829.9000  873.6693 818.3149  885.2544
Nov 15       822.7503 799.8835  845.6172 787.7785  857.7221
Dec 15       860.8669 837.0581  884.6757 824.4545  897.2793
Jan 16       886.7523 862.0368  911.4679 848.9532  924.5515
Feb 16       848.6798 823.0897  874.2699 809.5431  887.8164
Mar 16       943.3123 916.8763  969.7483 902.8820  983.7426
Apr 16       959.9430 932.6871  987.1989 918.2587 1001.6273
May 16      1022.6266 994.5745 1050.6787 979.7247 1065.5286
Jun 16       995.7201 966.8936 1024.5467 951.6337 1039.8065
Jul 16       947.9855 918.4045  977.5665 902.7453  993.2257
Aug 16       907.6084 877.2915  937.9253 861.2427  953.9740
Sep 16       866.8405 835.8050  897.8761 819.3757  914.3053
Oct 16       871.8780 840.1398  903.6162 823.3387  920.4174
Nov 16       842.8437 810.4179  875.2695 793.2527  892.4347
Dec 16       880.9603 847.8609  914.0596 830.3392  931.5813
> plot(forecast(mp , h=24))
```




تمرين: ولد تنبؤات لإنتاج الحليب اليومي بإستخدام الطريقتين المعطاة وقارنها بالقيم الأخيرة الناتجة من البرنامج

# الفصل العاشر

## التمهيد و التنبؤ بواسطة المتوسط المتحرك Using Moving Average Smoothing for Forecasting

يستخدم المتوسط المتحرك لتمهيد المشاهدات وذلك بتقليل تباين الأخطاء فمثلا لو كان لدينا مشاهدات من متسلسلة زمنية $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ فالمتوسط المتحرك من الدرجة $m$ للمشاهدات يحسب من العلاقة

$$\hat{z}_t = \frac{1}{m}\left(z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \cdots + z_{t-m+1}\right),\ t = m, m+1, \ldots, n$$

أو

$$\hat{z}_t = \hat{z}_{t-1} + \frac{1}{m}\left(z_t - z_{t-m}\right),\ t = m, m+1, \ldots, n$$

لاحظ ان عدد المشاهدات اصبح بعد التمهيد $n - m + 1$.

فمثلا لو كانت $m$=3 فإن المتوسط المتحرك من الدرجة الثالثة هو

$$\hat{z}_3 = \frac{1}{3}\left(z_3 + z_2 + z_1\right)$$

$$\hat{z}_4 = \frac{1}{3}\left(z_4 + z_3 + z_2\right) \quad or \quad \hat{z}_4 = \hat{z}_3 + \frac{1}{3}\left(z_4 - z_1\right)$$

$$\vdots$$

$$\hat{z}_n = \frac{1}{3}\left(z_n + z_{n-1} + z_{n-2}\right) \quad or \quad \hat{z}_n = \hat{z}_{n-1} + \frac{1}{3}\left(z_n - z_{n-3}\right)$$

ولكي نرى كيف يعمل التمهيد لتقليل تباين الأخطاء لنفترض ان المشاهدات تتبع النموذج

$$z_t = \mu + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), t = 1, 2, \ldots, n$$

فيكون

$$V\left(z_t\right) = \sigma^2, \quad \forall t$$

وبالتالي

$$V\left(\hat{z}_t\right) = \frac{\sigma^2}{m},\ t = m, m+1, \ldots, n$$

أي ان المشاهدات الممهدة اصبح تباينها أصغر بـ $m$ ضعف من المشاهدات الأصلية وهذا التمهيد للأخطاء يظهر أي نمط في المتسلسلة كان مدفونا او مغطى من تأثير الأخطاء.

ملاحظة: تؤخذ $m$ دائما فردية وذلك لنتجنب توسيط القيم الممهدة.

**التنبؤ بإستخدام المتوسط المتحرك:**

يؤخذ كمتنبئ للقيم المستقبلية المتوسط المتحرك:

$$z_n(\ell) = \hat{z}_{n-1}, \quad \ell > 0$$

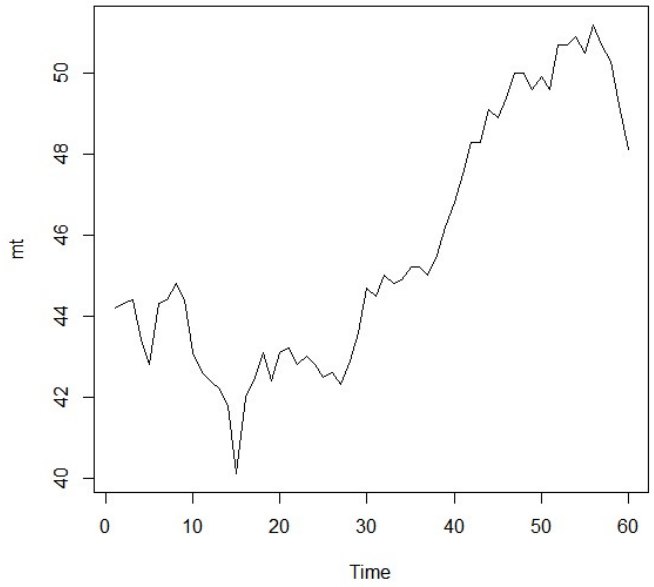
**مثال:**

سوف نستخدم المشاهدات للمتغير Metals

```
Metals
44.2    44.3    44.4    43.4    42.8    44.3    44.4
44.8    44.4    43.1    42.6    42.4    42.2    41.8
40.1    42.0    42.4    43.1    42.4    43.1    43.2
42.8    43.0    42.8    42.5    42.6    42.3    42.9
43.6    44.7    44.5    45.0    44.8    44.9    45.2
45.2    45.0    45.5    46.2    46.8    47.5    48.3
48.3    49.1    48.9    49.4    50.0    50.0    49.6
49.9    49.6    50.7    50.7    50.9    50.5    51.2
50.7    50.3    49.2    48.1
```

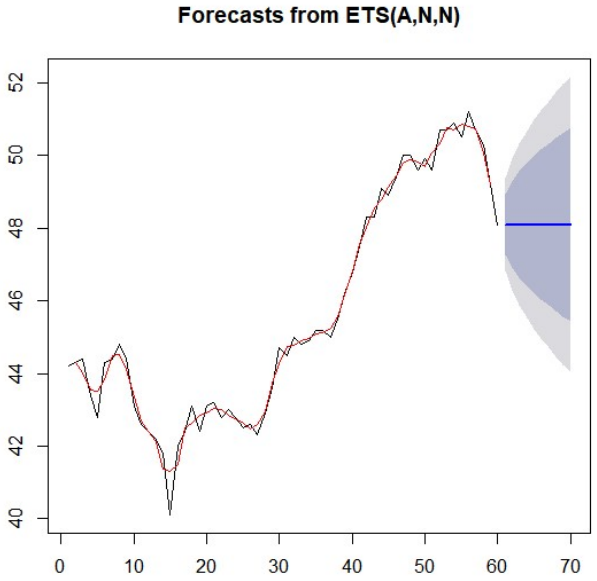
نرسم هذه المشاهدات:

```
> mt <- ts(Metals)
> plot.ts(mt)
```




نطبق الآن تمهيدا لهذه المشاهدات بإستخدام المتوسط المتحرك من الدرجة $m=3$ ونوجد تنبؤات لـ 6 قيم مستقبليه:

```
> mt <- ts(Metals)
> plot.ts(mt)
> library(forecast)
> m3 <- ma(mt, order = 3)
> lines(m3)
> forecast(mt)
   Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
61       48.10011 47.25925 48.94097 46.81412 49.38610
62       48.10011 46.91101 49.28921 46.28154 49.91868
63       48.10011 46.64379 49.55643 45.87286 50.32736
64       48.10011 46.41851 49.78171 45.52833 50.67189
65       48.10011 46.22004 49.98018 45.22478 50.97544
66       48.10011 46.04060 50.15962 44.95036 51.24986
> plot(forecast(mt))
> lines(m3)
> plot(forecast(mt))
> lines(m3, col = "red")
```




المتسلسلة الأصلية باللون الأسود والقيم الممهدة بالمتوسط المتحرك باللون الأحمر مع التنبؤات.

ثانيا: مناقشة النتائج

في المثال الحالي

$$\hat{z}_{59} = \frac{50.3 + 49.2 + 48.1}{3} = \frac{147.6}{3} = 49.2$$

تؤخذ التنبؤات للقيم الـ 6 المستقبلية أي للقيم $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+6}$ أو في هذا المثال $z_{61}, z_{62}, \ldots, z_{66}$ كالتالي:

$$z_{60}(1) = z_{60}(2) = \cdots = z_{60}(6) = 49.2$$

لحساب فترات تنبؤ 95% نحسب الكميات $\left[z_n(\ell) \pm 1.96\hat{\sigma}\right],\ \ell > 0$ أي $\left[49.2 \pm 1.96\hat{\sigma}\right]$ لجميع قيم التنبؤات المستقبلية ، نأخذ القيمة $MSD = 0.76433$ كمقدر لـ $\sigma^2$ أي $\hat{\sigma}^2 = 0.76433$ فيكون $\hat{\sigma} = 0.8743$ وعليه تكون فترة تنبؤ 95% لجميع القيم المستقبلية هي:

$$\left[49.2 \pm 1.96(0.8743)\right] = \left[49.2 \pm 1.7135\right] = \left[47.4865, 50.9135\right]$$

أي:

$$z_{60+\ell} \in \left[47.4865, 50.9135\right],\quad \ell > 0 \quad \textit{with probability } 0.95$$

ملاحظة: تحسب MSD كالآتي

$$MSD = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=2}^{n-1}(z_i - \hat{z}_i)}{n-2}$$

تمرين:

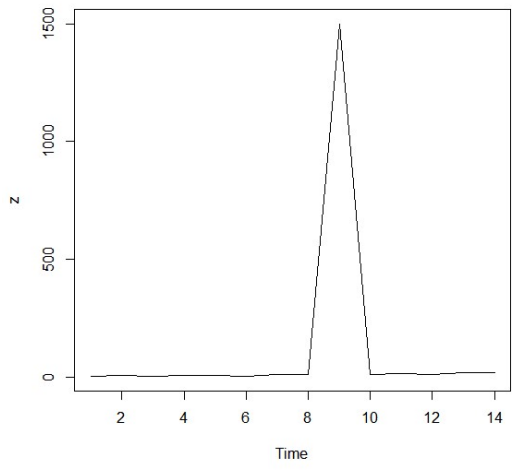
طبق متوسطات متحركة من الدرجات 5 و 7 علي المشاهدات السابقة وقرر ايها افضل للتنبؤ عن القيم المستقبلية؟.

## الوسيط الجارى Running Median

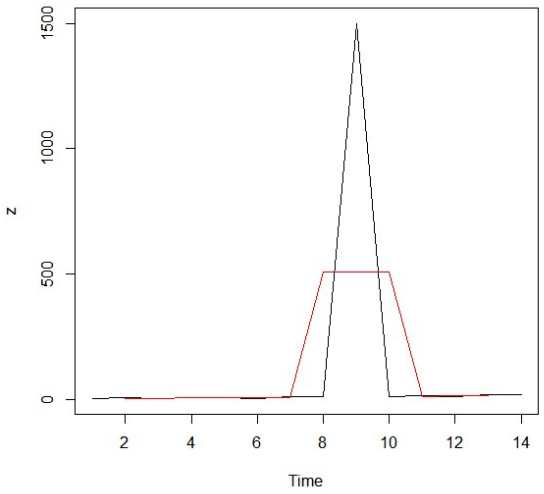
المتوسط المتحرك يتأثر كثيرا بالمشاهدات الخارجة Outliers او المتطرفة فالقيمة المتطرفة الواحدة تؤثر علي $m$ من المتوسطات المتحركة المتتالية فمثلا لوكانت لدين المشاهدات

```
z(t)
5     7     3     8     9     6     10    12    1500     11     15
13      18      20
```

ولها الشكل




بأخذ متوسط متحرك من الدرجة 3 نجد




لاحظ ان المتوسط المتحرك الناتج تأثرت فية ثلاثة قيم بالقيمة المتطرفة.

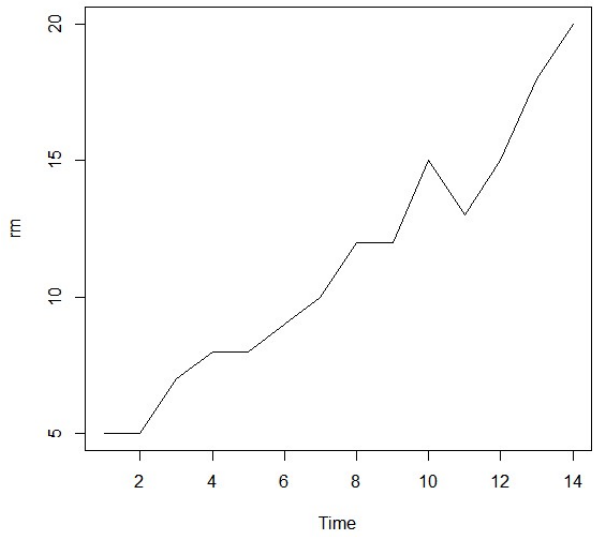
للتغلب على مثل هذه الصعوبات يستخدم الوسيط الجاري ذا الطول الفردي كممهد غير خطي والذي لايتأثر باقيم المتطرفة.

الوسيط الجاري ذا الطول الفردي $j=2i+1$ لمشاهدات $z_1,z_2,z_3,\ldots,z_{n-2},z_{n-1},z_n$ يحسب من العلاقة

$$\tilde{z}_t = med\left(z_{t-i},\ldots,z_t,\ldots,z_{t+i}\right),\ j=2i+1$$

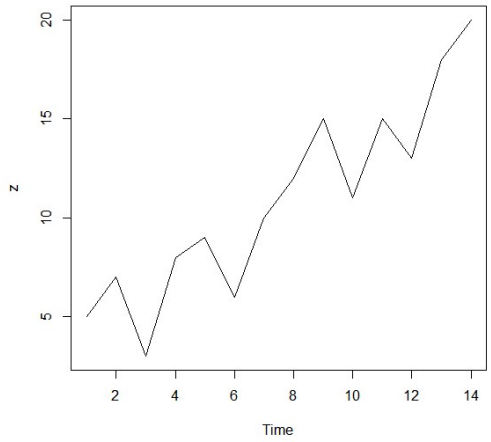
فمثلا لقيمة $j=3$ تصبح العلاقة $\tilde{z}_t = med\left(z_{t-1},z_t,z_{t+1}\right)$ وبأخذ وسيط جاري ذا الطول 3 للمشاهدات السابقة نجد

```
> rm <- runmed(z, 3)
> lines(rm, col = "blue")
> plot(rm)
> plot.ts(rm)
```




واذا كانت القيمة الحقيقية لـ $z_9$ هي 15 وليس 1500 فإن المشاهدات الحقيقية لها الشكل التالي

```
> z[9] <- 15
> plot.ts(z)
```




قارن بين النتيجتين.

## التمهيد و التنبؤ بواسطة التمهيد الاسي البسيط Using Single Exponential Smoothing for Forecasting :

التمهيد بواسطة المتوسط المتحرك يعطي جميع البيانات نفس الأهمية وبالتالي فإن القيم القديمة نوعا تؤثر نفس التأثير كالقيم الحديثة وهذا قد لايكون من الناحية العملية صحيحا، التمهيد الاسي على العكس يعطي القيم الأكثر حداثة أهمية أكبر والقيم الاخري تعطى اهمية تتناقص اسيا مع قدمها. فمثلا لو كان لدينا مشاهدات من متسلسلة زمنية $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ فالمتوسط المتحرك من الدرجة $m$ للمشاهدات يحسب من العلاقة

$$\hat{z}_t = \frac{1}{m}\left(z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \cdots + z_{t-m+1}\right),\ t = m, m+1, \ldots, n$$

والتي يمكن كتابتها

$$\hat{z}_t = \frac{1}{m}z_t + \frac{1}{m}z_{t-1} + \frac{1}{m}z_{t-2} + \cdots + \frac{1}{m}z_{t-m+1},\ t = m, m+1, \ldots, n$$

$$\hat{z}_t = \beta z_t + \beta z_{t-1} + \beta z_{t-2} + \cdots + \beta z_{t-m+1},\ t = m, m+1, \ldots, n,\quad \beta = \frac{1}{m}$$

أي ان المتوسط المتحرك يعطي جميع البيانات نفس الوزن $\beta$

الآن لو أعطينا البيانات اوزان تتناقص اسيا مع بُعد المشاهدات عن القيمة الحاضرة $z_n$ كالتالي

$$s_t = \alpha z_t + \alpha(1-\alpha) z_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 z_{t-2} + \cdots,\quad t = 1, 2, \ldots, n,\quad 0 < \alpha < 1$$

القيمة $s_t$ هي متوسط موزون بأوزان تتناقص اسيا لجميع القيم السابقة وهذا مايسمى بالتمهيد الاسي البسيط ويكتب بشكل تكراري

$$s_t = \alpha z_t + (1-\alpha) s_{t-1},\quad t = 1, 2, \ldots, n,\quad s_0 = \bar{z}$$

وتؤخذ التنبؤات

$$z_n(\ell) = s_n,\ \ell \geq 1$$

**مثال:**

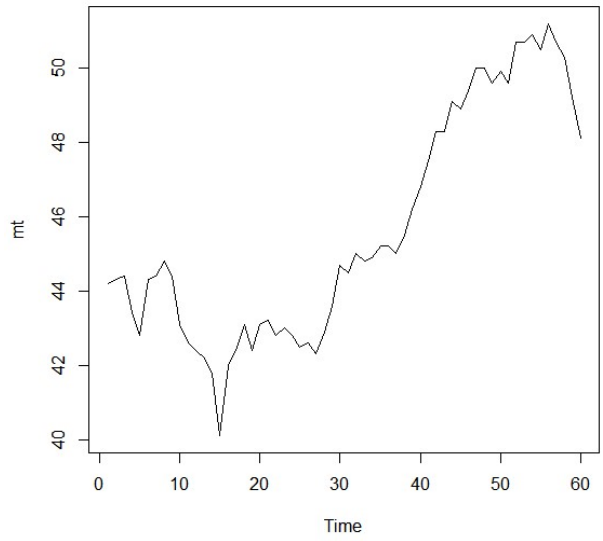
سوف نستخدم المشاهدات في التغير Metals

| Metals | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 44.2 | 44.3 | 44.4 | 43.4 | 42.8 | 44.3 | 44.4 |
| 44.8 | 44.4 | 43.1 | 42.6 | 42.4 | 42.2 | 41.8 |
| 40.1 | 42.0 | 42.4 | 43.1 | 42.4 | 43.1 | 43.2 |

```
42.8    43.0    42.8    42.5    42.6    42.3    42.9
43.6    44.7    44.5    45.0    44.8    44.9    45.2
45.2    45.0    45.5    46.2    46.8    47.5    48.3
48.3    49.1    48.9    49.4    50.0    50.0    49.6
49.9    49.6    50.7    50.7    50.9    50.5    51.2
50.7    50.3    49.2    48.1
```

نرسم هذه المشاهدات:

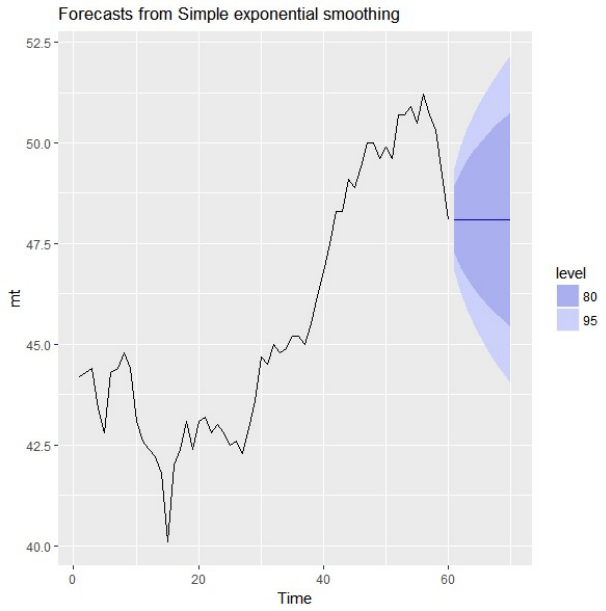
```
> mt <- ts(Metals)
> plot.ts(mt)
> library(forecast)
```




نطبق الآن تمهيدا لهذه المشاهدات بإستخدام التمهيد الاسي البسيط ونوجد تنبؤات لـ 10 قيم مستقبليه:

```
> library(forecast)
> mt <- ts(Metals)
> library(ggplot2)
> mt.ets = ses(mt,model="ANA")
> mt.ets
   Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
61       48.10011 47.25925 48.94097 46.81412 49.38610
62       48.10011 46.91101 49.28921 46.28154 49.91868
63       48.10011 46.64379 49.55643 45.87286 50.32736
```

```
64       48.10011 46.41851 49.78171 45.52833 50.67189
65       48.10011 46.22004 49.98019 45.22478 50.97544
66       48.10011 46.04060 50.15962 44.95036 51.24986
67       48.10011 45.87559 50.32463 44.69800 51.50222
68       48.10011 45.72200 50.47822 44.46311 51.73712
69       48.10011 45.57775 50.62247 44.24249 51.95773
70       48.10011 45.44131 50.75891 44.03382 52.16640
> autoplot(mt.ets)
```




ثانيا: مناقشة النتائج

1- يحسب التمهيد الاسي البسيط لمشاهدات $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_{n-2}$ بثابت تمهيد $\alpha = 0.2$ من العلاقة التكرارية:

$$s_i = \alpha z_i + (1-\alpha) s_{i-1}, \quad i = 1,2,...,n$$

لكي نبدأ العلاقة التكرارية لحساب القيم الممهدة اسيا نحتاج الي القيمة الاولية $s_0$ والتي تحسب بعدة طرق، أحد هذه الطرق والتي سنستخدمها هي وضع $s_0$ مساوية للمتوسط

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} z_i}{m}, m = 6 \left(\text{or n, if n<6}\right)$$

ففي مثالنا

$$s_0 = \frac{44.2 + 44.3 + 44.4 + 43.4 + 42.8 + 44.3}{6} = 43.9$$

وبالتالي يكون

$$s_1 = \alpha z_1 + (1-\alpha) s_0 = 0.2(44.2) + 0.8(43.9) = 8.84 + 35.12 = 43.96$$

$$s_2 = \alpha z_2 + (1-\alpha) s_1 = 0.2(44.3) + 0.8(43.96) = 8.86 + 35.168 = 44.028$$

وهكذا نستمر حتي آخر مشاهدة .

2- يؤخذ كمتنبئ للقيم المستقبلية آخر قيمة ممهدة أي:

$$z_n(\ell) = s_n, \quad \ell > 0$$

ففي المثال الحالي

$$z_{60}(\ell) = 49.7216, \quad \ell > 0$$

تؤخذ التنبؤات للقيم الـ 6 المستقبلية أي للقيم $z_{n+1}, z_{n+2}, ..., z_{n+6}$ أو في هذا المثال $z_{61}, z_{62}, ..., z_{66}$ كالتالي:

$$z_{60}(1) = z_{60}(2) = \cdots = z_{60}(6) = 49.7216$$

3- لحساب فترات تنبؤ 95% نحسب الكميات $\left[z_n(\ell) \pm 1.96\hat{\sigma}\right], \quad \ell > 0$ أي $\left[49.7216 \pm 1.96\hat{\sigma}\right]$ لجميع قيم التنبؤات المستقبلية ، نأخذ القيمة $MSD = 1.45392$ كمقدر لـ $\sigma^2$ أي $\hat{\sigma}^2 = 1.45392$ فيكون $\hat{\sigma} = 1.205786$ وعليه تكون فترة تنبؤ 95% لجميع القيم المستقبلية هي:

$$\left[49.7216 \pm 1.96(1.205786)\right] = \left[49.7216 \pm 2.3633\right] = \left[47.35826, 52.08494\right]$$

أي:

$$z_{60+\ell} \in \left[47.3582, 50.0849\right], \quad \ell > 0 \quad \textit{with probability } 0.95$$

ملاحظة: تحسب MSD كالآتي

$$MSD = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (z_i - \hat{z}_i)}{n-1}$$

```
> accuracy(mt.ets)
                     ME       RMSE        MAE        MPE
MAPE       MASE       ACF1
```

**Training set 0.06500805 0.6561284 0.505012 0.1300051 1.1188 0.9833566 0.03962642**

تمرين:

طبق تمهيد اسي بسيط علي المشاهدات السابقة مستخدما $\alpha = 0.3, 0.4, 0.5$ وقرر ايها افضل للتنبؤ عن القيم المستقبلية؟.

## الفصل الثاني عشر

**التمهيد و التنبؤ بواسطة التمهيد الاسي المزدوج Using Double Exponential Smoothing for Forecasting :**

أولا: طريقة براون Brown's Method:

لمشاهدات $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_{n-2}$ ولثابت تمهيد $0 < \alpha < 1$ نوجد التالي:

$$s_t^{(1)} = \alpha z_t + (1-\alpha) s_{t-1}^{(1)}, \ t = 1,2,...,n$$

حيث $s_t^{(1)}$ تمهيد اسي بسيط $s_t^{(1)} = s_t$ (انظر التمهيد الاسي البسيط) و $(1)$ ترمز الي درجة هذا التمهيد

$$s_t^{(2)} = \alpha s_t^{(1)} + (1-\alpha) s_{t-1}^{(2)}, \ t = 1,2,...,n$$

حيث $s_t^{(2)}$ تمهيد اسي مزدوج و $(2)$ ترمز الي درجة هذا التمهيد

$$a_t = 2s_t^{(1)} - s_t^{(2)}, \ t = 1,2,...,n$$

$$b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(s_t^{(1)} - s_t^{(2)}\right), \ t = 1,2,...,n$$

تحسب القيم المطبقة من المعادلة

$$\hat{z}_t = a_t + b_t t, \quad t = 1,2,...,n$$

وتحسب التنبؤات للقيم المستقبلية $\ell > 0$, $z_{n+\ell}$ من

$$z_n(\ell) = a_n + b_n \ell, \quad \ell > 0$$

حساب القيم الاولية $s_0^{(1)}$ و $s_0^{(2)}$ : من العلاقات السابقة نجد

$$s_0^{(1)} = a_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_0$$

$$s_0^{(2)} = a_0 - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} b_0$$

نوجد $a_0$ و $b_0$ بإنحدار المشاهدات علي الزمن $t = 1,2,...,n$ $z_t = \alpha + \beta t + e_t,$ ويكون

$b_0 = \hat{\beta}$ و $a_0 = \hat{\alpha}$

ثانيا: طريقة هولت Holt's Method:

لمشاهدات $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_{n-2}$ ولثابتي تمهيد $0 < \alpha < 1$ و $0 < \gamma < 1$ نوجد التالي:

$$s_t = \alpha z_t + (1-\alpha)(s_{t-1} + b_{t-1}), \quad t = 1,2,...,n$$
$$b_t = \gamma (s_t - s_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1}, \quad t = 1,2,...,n$$

نحسب القيم المطبقة من

$$\hat{z}_t = s_t + b_t t, \quad t = 1,2,...,n$$

والتنبؤات للقيم المستقبلية من

$$z_n(\ell) = s_n + b_n \ell, \quad \ell > 0$$

نحسب القيم الاولية $s_0$ و $b_0$ من

$$s_0 = z_1$$
$$b_0 = z_2 - z_1 \quad \text{or}$$
$$b_0 = \frac{(z_2 - z_1) + (z_3 - z_2)}{2} = \frac{(z_3 - z_1)}{2} \quad \text{or}$$
$$b_0 = \frac{(z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + (z_4 - z_3)}{3} = \frac{(z_4 - z_1)}{3}$$

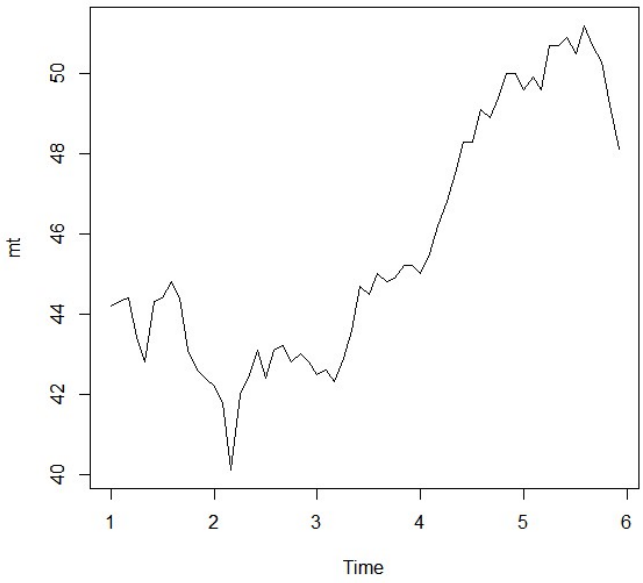
**مثال:**

سوف نستخدم المشاهدات في المتغير Metals

```
> library(fpp2)
Loading required package: forecast
Loading required package: fma
Loading required package: expsmooth
Loading required package: ggplot2
```

نرسم هذه المشاهدات:

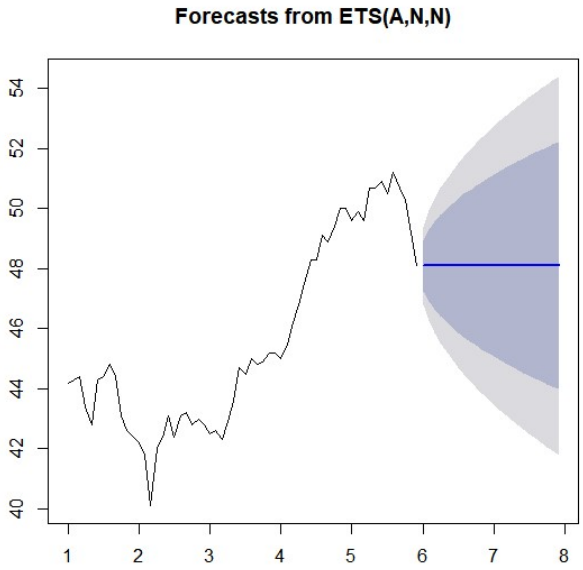
```
> mt = ts(Metals, frequency = 12)
> plot.ts(mt)
```




نطبق الآن تمهيدا لهذه المشاهدات بإستخدام التمهيد الاسي المزدوج بطريقة براون.

```
> mt.ets = ets(mt)
> mt.ets
ETS(A,N,N)

Call:
 ets(y = mt)

  Smoothing parameters:
    alpha = 0.9999

  Initial states:
    l = 44.2007

  sigma:  0.6561

     AIC     AICc      BIC
201.0928 201.5214 207.3759
> accuracy(mt.ets)
```

```
                     ME       RMSE        MAE         MPE
MAPE     MASE       ACF1
Training set  0.06499685  0.6561284  0.5050232  0.1299798
1.118825 0.209517 0.03962626
> mt.fcast <- forecast(mt.ets)
> mt.fcast
      Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
Jan 6       48.10011 47.25925 48.94097 46.81412 49.38610
Feb 6       48.10011 46.91101 49.28921 46.28154 49.91868
Mar 6       48.10011 46.64379 49.55643 45.87286 50.32736
Apr 6       48.10011 46.41851 49.78171 45.52833 50.67189
May 6       48.10011 46.22004 49.98018 45.22478 50.97544
Jun 6       48.10011 46.04060 50.15962 44.95036 51.24986
Jul 6       48.10011 45.87559 50.32463 44.69800 51.50222
Aug 6       48.10011 45.72200 50.47822 44.46311 51.73711
Sep 6       48.10011 45.57775 50.62247 44.24249 51.95773
Oct 6       48.10011 45.44131 50.75891 44.03383 52.16639
Nov 6       48.10011 45.31154 50.88868 43.83536 52.36486
Dec 6       48.10011 45.18755 51.01268 43.64573 52.55449
Jan 7       48.10011 45.06862 51.13160 43.46384 52.73638
Feb 7       48.10011 44.95418 51.24604 43.28883 52.91139
Mar 7       48.10011 44.84377 51.35645 43.11997 53.08025
Apr 7       48.10011 44.73698 51.46324 42.95664 53.24358
May 7       48.10011 44.63347 51.56675 42.79835 53.40187
Jun 7       48.10011 44.53297 51.66725 42.64464 53.55558
Jul 7       48.10011 44.43522 51.76500 42.49515 53.70507
Aug 7       48.10011 44.34002 51.86020 42.34955 53.85068
Sep 7       48.10011 44.24716 51.95306 42.20754 53.99268
Oct 7       48.10011 44.15649 52.04373 42.06887 54.13135
Nov 7       48.10011 44.06786 52.13236 41.93332 54.26690
Dec 7       48.10011 43.98114 52.21908 41.80069 54.39953
> plot(mt.fcast)
```



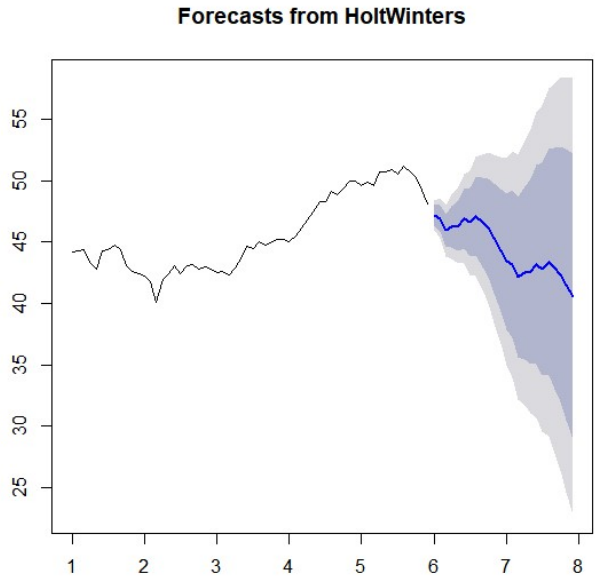

**مثال:**

تطبيق طريقة هولت

```
> mt.hw = HoltWinters(mt)
> mt.hw
Holt-Winters exponential smoothing with trend and
additive seasonal component.

Call:
HoltWinters(x = mt)

Smoothing parameters:
 alpha: 0.7169118
 beta : 0.2405206
 gamma: 1

Coefficients:
          [,1]
a   48.3718678
b   -0.3138727
s1  -0.8677548
```

```
s2  -0.7982475
s3  -1.4982683
s4  -0.8699901
s5  -0.4451344
s6   0.4151617
s7   0.4272938
s8   1.2483201
s9   1.0705231
s10  0.9036051
s11  0.3672388
s12 -0.2718678
> mthw.fcast = forecast(mt.hw)
> mthw.fcast
      Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
Jan 6       47.19024 46.38693 47.99355 45.96169 48.41879
Feb 6       46.94587 45.87084 48.02091 45.30176 48.58999
Mar 6       45.93198 44.55969 47.30427 43.83324 48.03072
Apr 6       46.24639 44.55341 47.93936 43.65721 48.83557
May 6       46.35737 44.32194 48.39280 43.24445 49.47029
Jun 6       46.90379 44.50546 49.30213 43.23585 50.57173
Jul 6       46.60205 43.82147 49.38264 42.34951 50.85459
Aug 6       47.10921 43.92797 50.29044 42.24393 51.97449
Sep 6       46.61754 43.01806 50.21701 41.11262 52.12246
Oct 6       46.13675 42.10216 50.17133 39.96638 52.30711
Nov 6       45.28651 40.80057 49.77244 38.42586 52.14716
Dec 6       44.33353 39.38056 49.28649 36.75862 51.90843
Jan 7       43.42377 37.89109 48.95645 34.96226 51.88527
Feb 7       43.17940 37.15787 49.20093 33.97027 52.38854
Mar 7       42.16551 35.63982 48.69120 32.18532 52.14569
Apr 7       42.47991 35.43531 49.52452 31.70612 53.25371
May 7       42.59090 35.01313 50.16867 31.00170 54.18010
Jun 7       43.13732 35.01258 51.26206 30.71160 55.56304
Jul 7       42.83558 34.15046 51.52070 29.55283 56.11833
Aug 7       43.34273 34.08419 52.60128 29.18301 57.50246
```

```
Sep 7       42.85106 33.00638 52.69575 27.79491 57.90721
Oct 7       42.37027 31.92703 52.81351 26.39872 58.34183
Nov 7       41.52003 30.46611 52.57396 24.61452 58.42555
Dec 7       40.56705 28.89058 52.24353 22.70942 58.42468
> plot(mthw.fcast)
```




تمرين: تحقق من صحة الحسابات السابقة بتتبع بعض القيم يدويا ( ملاحظة: يتوقع عدم تطابق الحسابات تماما وذلك لإختلاف طريق تمثيل الأعداد بين الحاسب والآلة الحاسبة وكذلك في تخزين الأرقام في ذاكرت كل منهما)

## الفصل الثالث عشر

## التمهيد الاسي الثلاثي و التنبؤ بواسطة طريقة ونترز للمتسلسلات الموسمية المنجرفة

## Triple Exponential Smoothing: Winters' Three-Parameter Trend and Seasonality Smoothing Method

جميع الطرق السابقة التي درسناها في هذا الفصل لا تنفع لتحليل الظواهر الموسمية ماعدى طريقة التفكيك Decomposition Method وطريقة ونترز Winters' trend and seasonal smoothing التي سوف نستعرضها هنا

طريقة ونترز للمتسلسلات الموسمية المنجرفة

أولا: تمهد المشاهدات تمهيدا كليا بالعلاقة

$$s_t = \alpha \frac{z_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)(s_{t-1} + b_{t-1}), \quad t = 1,2,...,n$$

ثانيا: تمهيد الإنجراف

$$b_t = \gamma (s_t - s_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1}, \quad t = 1,2,...,n$$

ثالثا: تمهيد الموسمية

$$S_t = \beta \frac{z_t}{s_t} + (1-\beta) S_{t-s}, \quad t = 1,2,...,n$$

حيث $S_i$ هي المركبة الموسمية عند الزمن $i$ و $s$ هي دورة الموسمية

القيم المطبقة تعطي بالعلاقة

$$\hat{z}_t = (s_t + b_t t) S_{t-s}, \quad t = 1,2,...,n$$

والتنبؤات من العلاقة

$$z_n(\ell) = (s_n + b_n \ell) S_{n-s+\ell}, \quad \ell > 0$$

من الصعب جدا تتبع طريقة ونترز بالحسابات اليدوية حيث ان القيم الاولية تحسب بخوارزمات غير خطية بإستخدام الحاسب ولهذا لن نستعرضها هنا ونكتفي بالنتائج المخرجة من الحاسب.

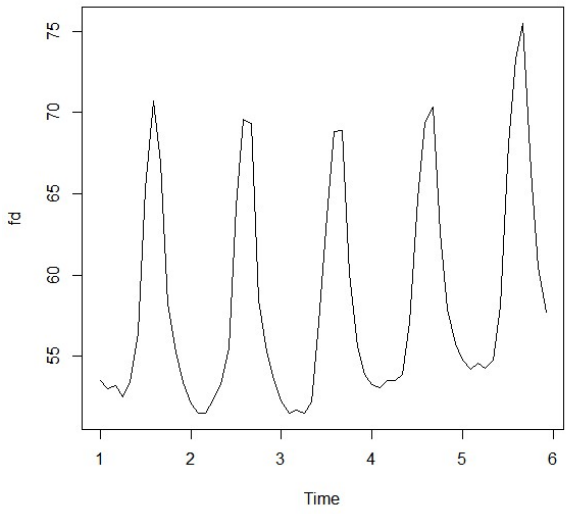
**مثال:**

سوف نستخدم مشاهدات في المتغير Food

```
Food
53.5  53.0  53.2  52.5  53.4  56.5  65.3  70.7  66.9  58.2  55.3  53.4
52.1  51.5  51.5  52.4  53.3  55.5  64.2  69.6  69.3  58.5  55.3  53.6
52.3  51.5  51.7  51.5  52.2  57.1  63.6  68.8  68.9  60.1  55.6  53.9
53.3  53.1  53.5  53.5  53.9  57.1  64.7  69.4  70.3  62.6  57.9  55.8
54.8  54.2  54.6  54.3  54.8  58.1  68.1  73.3  75.5  66.4  60.5  57.7
```

ونرسم المشاهدات

```
> fd <- ts(food, frequency = 12)
> plot(fd)
```




نلاحظ ان الظاهرة موسمية بدورة 12 نطبق الآن طريقة ونترز كالتالي:

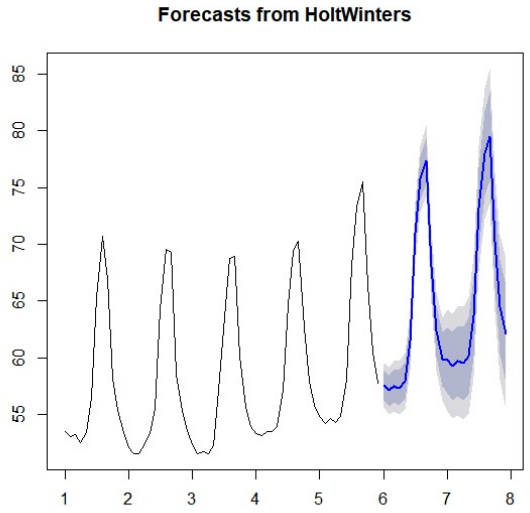
أولا: للنموذج الإضافي Additive Model

$$z_t = b_t + S_t + e_t, \quad t = 1,2,...,n$$

```
> fd.hw <-HoltWinters(fd, seasonal = c("additive"),
optim.start = c(alpha = 0.3, beta = 0.1, gamma = 0.1))
> fd.hw
Holt-Winters exponential smoothing with trend and
additive seasonal component.

Call:
```

```
HoltWinters(x = fd)

Smoothing parameters:
 alpha: 0.3115394
 beta : 0.07599714
 gamma: 1

Coefficients:
          [,1]
a   61.9208719
b    0.1814075
s1  -4.5353101
s2  -5.2033181
s3  -4.9498151
s4  -5.3175252
s5  -4.8730207
s6  -1.5158184
s7   7.8010319
s8  12.4403294
s9  13.8076072
s10  4.3438583
s11 -1.5730961
s12 -4.2208719
> fd.fcast <- forecast(fd.hw)
> fd.fcast
      Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
Jan 6       57.56697 56.26230 58.87164 55.57165 59.56229
Feb 6       57.08037 55.70435 58.45639 54.97593 59.18481
Mar 6       57.51528 56.06178 58.96878 55.29234 59.73822
Apr 6       57.32898 55.79216 58.86579 54.97862 59.67933
May 6       57.95489 56.32925 59.58053 55.46869 60.44109
Jun 6       61.49350 59.77381 63.21318 58.86347 64.12353
Jul 6       70.99176 69.17309 72.81042 68.21035 73.77316
Aug 6       75.81246 73.89015 77.73477 72.87254 78.75238
```

```
Sep 6       77.36115 75.33077 79.39152 74.25596 80.46634
Oct 6       68.07881 65.93616 70.22145 64.80192 71.35569
Nov 6       62.34326 60.08436 64.60216 58.88857 65.79795
Dec 6       59.87689 57.49792 62.25586 56.23857 63.51521
Jan 7       59.74386 56.83417 62.65354 55.29388 64.19384
Feb 7       59.25726 56.23746 62.27705 54.63888 63.87564
Mar 7       59.69217 56.55801 62.82632 54.89889 64.48545
Apr 7       59.50587 56.25326 62.75848 54.53143 64.48030
May 7       60.13178 56.75677 63.50679 54.97014 65.29341
Jun 7       63.67039 60.16917 67.17161 58.31573 69.02504
Jul 7       73.16865 69.53755 76.79975 67.61536 78.72193
Aug 7       77.98935 74.22483 81.75387 72.23201 83.74669
Sep 7       79.53804 75.63666 83.43941 73.57140 85.50467
Oct 7       70.25570 66.21416 74.29723 64.07470 76.43669
Nov 7       64.52015 60.33524 68.70506 58.11988 70.92041
Dec 7       62.05378 57.72239 66.38517 55.42949 68.67807
> plot(fd.fcast)
```

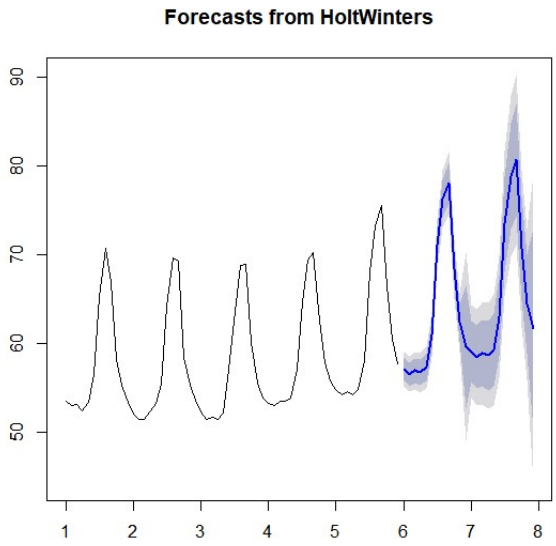



ثانيا: للنموذج التضاعفي Multiplicative Model

$$z_t = b_t S_t + e_t, \quad t = 1,2,...,n$$

```
> fd.hwm <-HoltWinters(fd, seasonal = c("multiplicative"), optim.start = c(alpha = 0.3, beta = 0.1, gamma = 0.1))
> fd.hwm
Holt-Winters exponential smoothing with trend and multiplicative seasonal component.

Call:
HoltWinters(x = fd, seasonal = c("multiplicative"), optim.start = c(alpha = 0.3, beta = 0.1, gamma = 0.1))

Smoothing parameters:
 alpha: 0.2967092
 beta : 0.08107868
 gamma: 1

Coefficients:
          [,1]
a   61.7341864
b    0.1762431
s1   0.9232411
s2   0.9114690
s3   0.9153468
s4   0.9087051
s5   0.9156775
s6   0.9716133
s7   1.1288416
s8   1.2077838
s9   1.2324774
s10  1.0774547
s11  0.9796223
s12  0.9346523
> fd.fcastm <- forecast(fd.hwm)
```

```
> fd.fcastm
      Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
Jan 6       57.15826 55.90323 58.41328 55.23886 59.07765
Feb 6       56.59008 55.27362 57.90653 54.57673 58.60342
Mar 6       56.99216 55.60557 58.37875 54.87156 59.11277
Apr 6       56.73878 55.27981 58.19775 54.50748 58.97008
May 6       57.33552 55.79195 58.87909 54.97483 59.69620
Jun 6       61.00920 59.33802 62.68038 58.45335 63.56505
Jul 6       71.08077 69.16838 72.99317 68.15602 74.00552
Aug 6       76.26446 74.15485 78.37407 73.03809 79.49083
Sep 6       78.04093 75.78118 80.30069 74.58494 81.49693
Oct 6       68.41473 66.24307 70.58639 65.09347 71.73599
Nov 6       62.37536 60.23073 64.51999 59.09543 65.65529
Dec 6       59.67671 52.78473 66.56870 49.13633 70.21710
Jan 7       59.11083 55.71171 62.50996 53.91232 64.30935
Feb 7       58.51776 54.97849 62.05702 53.10492 63.93060
Mar 7       58.92805 55.20250 62.65359 53.23031 64.62578
Apr 7       58.66062 54.77712 62.54411 52.72132 64.59991
May 7       59.27210 55.18241 63.36179 53.01746 65.52674
Jun 7       63.06408 58.57732 67.55084 56.20217 69.92599
Jul 7       73.46818 68.13963 78.79673 65.31887 81.61749
Aug 7       78.81882 72.90793 84.72972 69.77889 87.85876
Sep 7       80.64752 74.36562 86.92942 71.04019 90.25485
Oct 7       70.69346 64.89583 76.49108 61.82676 79.56016
Nov 7       64.44718 58.90646 69.98790 55.97337 72.92098
Dec 7       61.65343 50.27319 73.03366 44.24886 79.05799
> plot(fd.fcastm)
```




ملاحظات:

لتطبيق طريقة ونترز نحتاج الي إختيار قيم ثلاثة معالم هي $\alpha$ ثابت التمهيد الكلي و $\gamma$ ثابت تمهيد الإنجراف و $\beta$ ثابت تمهيد الموسمية وهذه عملية أفضلية Optimization في ثلاثة ابعاد ( فضاء المعالم ) إما أن نترك للبرنامج الإحصائي المستخدم حسابها تلقائيا بإستخدام خوارزمات غير خطية مبنية داخل البرنامج أو نقوم نحن بإمداد البرنامج بتلك القيم.

تمرين: في الأمثلة السابقة اخذنا $\alpha = \gamma = \beta = 0.2$ . ثبت في كل مرة معلمين وغير الثالث حتي تحصل علي أقل MSD

```
> accuracy(fd.fcastm)
                     ME        RMSE         MAE          MPE       MAPE
MASE       ACF1
Training  set  0.1883733  0.9871876  0.6979998  0.2857943  1.147907
0.5234998 0.1832898
```

**<u>مثال عملي لبناء نموذج تنبؤ:</u>**

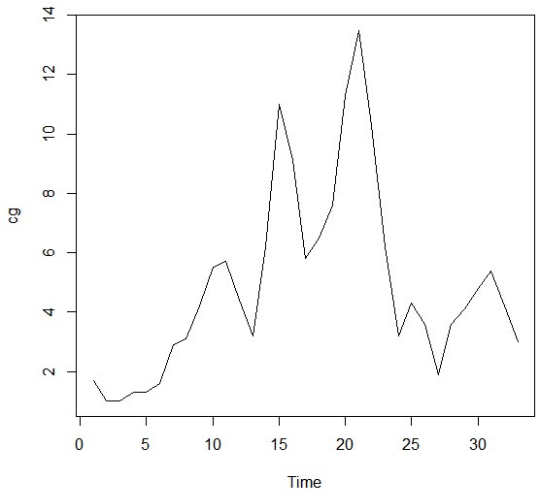
سوف نستخدم البيانات change

```
change
1.7       1.0       1.0       1.3       1.3       1.6       2.9
3.1       4.2       5.5       5.7       4.4       3.2       6.2
11.0       9.1       5.8       6.5       7.6      11.3      13.5
10.3       6.2       3.2       4.3       3.6       1.9       3.6
```

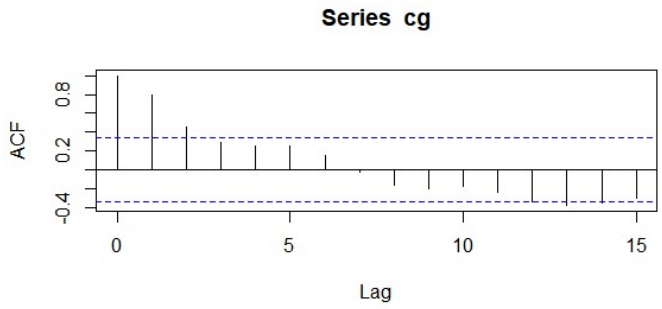
```
4.1       4.8       5.4       4.2       3.0
```

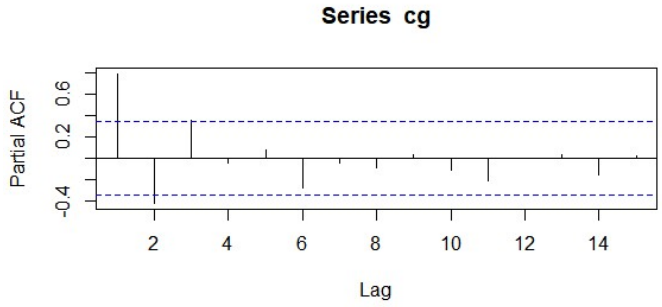
نرسم المتسلسلة ونوجد التربطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية العينية

```
> cg <- ts(change)
> plot.ts(cg)
```




```
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(cg)
> pacf(cg)
```



```
> acf(cg, plot = F)

Autocorrelations of series 'cg', by lag

0      1      2      3      4      5      6      7      8
9     10     11     12     13     14     15
 1.000  0.788  0.460  0.291  0.258  0.257  0.159 -0.019 -
0.159 -0.193 -0.177 -0.234 -0.342 -0.376 -0.349 -0.302
> pacf(cg, plot = F)

Partial autocorrelations of series 'cg', by lag

1      2      3      4      5      6      7      8      9
10     11     12     13     14     15
 0.788 -0.424  0.350 -0.042  0.076 -0.281 -0.051 -0.090
0.037 -0.109 -0.207 -0.006  0.036 -0.155  0.018
```

من انماط التربطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية العينية قد يكون النموذج ARMA(1,1) ينطبق على المتسلسلة، الأوامر التالية تطبق النموذج المقترح وتولد 5 تنبؤات للقيم المستقبلية

```
> cg.fit <- arima(cg, order = c(1,0,1))
> cg.fit

Call:
arima(x = cg, order = c(1, 0, 1))

Coefficients:
         ar1     ma1  intercept
      0.6236  0.9149     4.6776
s.e.  0.1339  0.0961     1.1596

sigma^2 estimated as 1.917:  log likelihood = -59.17,
aic = 126.33
```

أي ان النموذج المقترح هو

$$z_t = 1.54 + 0.65 z_{t-1} + a_t - 0.99 a_{t-1}, \quad a_t \sim N(0, 2.06)$$

مقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيمة إختبار $t$ هي

$$\hat{\phi}_1 = 0.6513, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.1434, \quad t = 4.54$$

$$\hat{\theta}_1 = -0.9857, \quad s.e.\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.0516, \quad t = -19.11$$

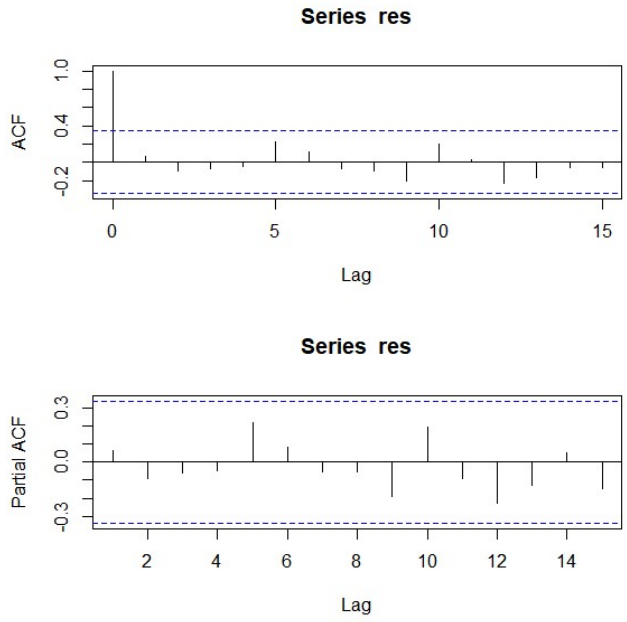
$$\hat{\delta} = 1.5385, \quad s.e.\left(\hat{\delta}\right) = 0.4894, \quad t = 3.14$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2.0613, \quad with \quad d.f. = 30$$

نلاحظ ان جميع المعالم معنوية.

الآن نفحص البواقي:

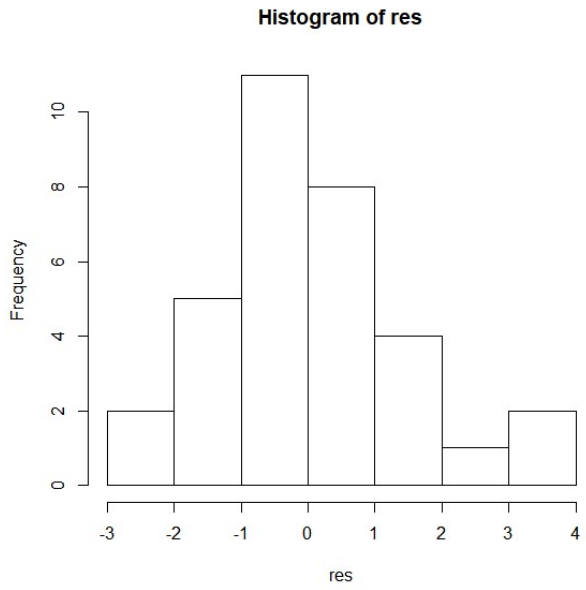
```
> res <- cg.fit$residuals
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(res)
> pacf(res)
```




أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للبواقي تدل على أن البواقي تتبع توزيع ضجة بيضاء أي غير مترابطة، لنفحص طبيعية البواقي:

رسم المدرج التكراري

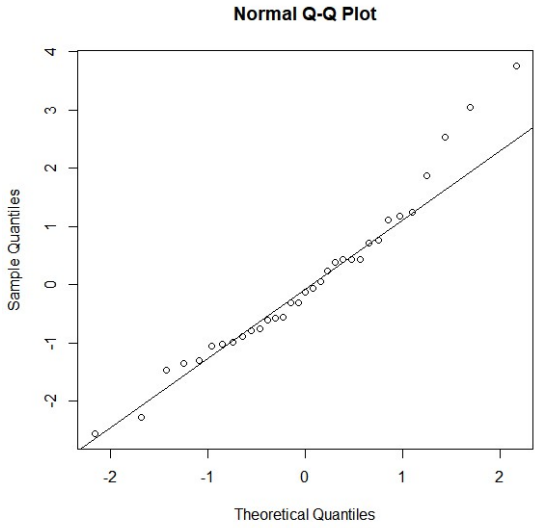
```
> hist(res)
```




يبدو متناظر بعض الشيئ.

لننظر إلى مخطط الإحتمال الطبيعي للبواقي:

```
> qqnorm(res)
> qqline(res)
```

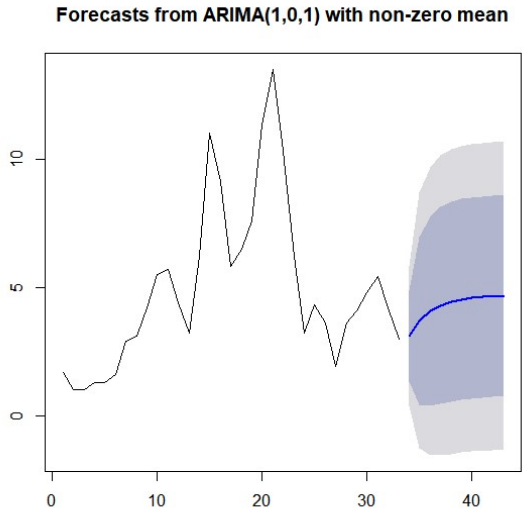



نستطيع أن نقول ان البواقي طبيعية تقريبا.

الرسم التالي للمتسلسة مع 5 تنبؤات للقيم المستقبلية.

```
> cg.fcast <- forecast(cg.fit)
> cg.fcast
   Point Forecast     Lo 80     Hi 80      Lo 95     Hi 95
```

```
34       3.105091 1.3303014 4.879880  0.3907848  5.819396
35       3.696926 0.4409252 6.952926 -1.2826973  8.676549
36       4.066019 0.3918232 7.740216 -1.5531789  9.685218
37       4.296202 0.4716880 8.120717 -1.5528876 10.145292
38       4.439754 0.5583487 8.321160 -1.4963433 10.375852
39       4.529279 0.6259711 8.432588 -1.4403155 10.498874
40       4.585111 0.6733173 8.496905 -1.3974613 10.567683
41       4.619930 0.7048410 8.535019 -1.3676820 10.607542
42       4.641645 0.7252748 8.558015 -1.3479263 10.631216
43       4.655187 0.7383189 8.572055 -1.3351458 10.645520
> plot(cg.fcast)
```




دعنا نحاول تطبيق نموذج AR(2) على المتسلسلة كالتالي:

```
> cg.fit <- arima(cg, order = c(2,0,0))
> cg.fit

Call:
arima(x = cg, order = c(2, 0, 0))

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      1.1524  -0.4384     4.7602
s.e.  0.1522   0.1543     0.9873
```

```
sigma^2 estimated as 2.731:  log likelihood = -64.13,
aic = 136.26
```

أي ان النموذج المقترح هو

$$z_t = 1.33 + 1.187 z_{t-1} - 0.4657 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim N(0, 2.95)$$

مقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيمة إختبار $t$ هي

$$\hat{\phi}_1 = 1.1872, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.1625, \quad t = 7.31$$

$$\hat{\phi}_2 = -0.4657, \quad s.e.\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.1624, \quad t = -2.87$$

$$\hat{\delta} = 1.327, \quad s.e.\left(\hat{\delta}\right) = 0.2996, \quad t = 4.43$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2.954, \quad with \quad d.f. = 30$$

لننظر إلى الإختبار

$$H_0 : \phi_2 = 0$$
$$H_1 : \phi_2 \pm 0$$

الإحصائة

$$t_0 = \frac{\hat{\phi}_2}{s.e.\left(\hat{\phi}_2\right)} = \frac{-0.4657}{0.1624} = -2.8676$$

نوجد الـ P-value لها بالأمر

```
> t <- -0.4384/0.1543
> t
[1] -2.841218
> dt(t, length(cg)-3)
[1] 0.009844429
```

أي الـ P-value لها تساوي 0.0098 وهي أقل من 0.05 أي لانرفض ان $\phi_2 = 0$ وبالتالي نرفض النموذج AR(2) .

**<u>تمرين:</u>**

حاول تطبيق نماذج اخرى مناسبة على المتسلسلة السابقة وإختار أفضل نموذج، أجري الإختبارات المناسبة واستخدم ايضا المعيار AIC .

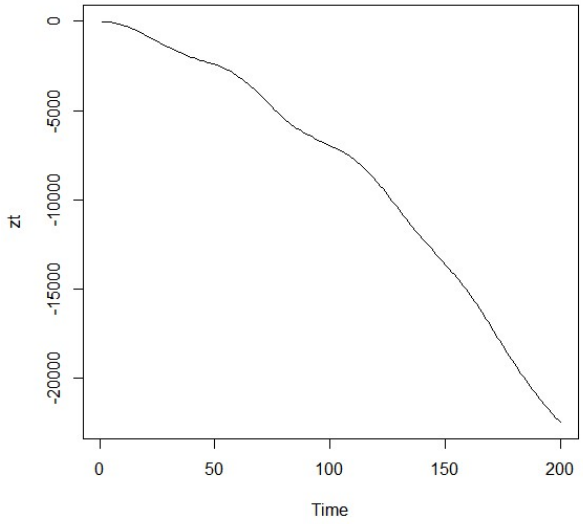
**مثال عملي آخر لبناء نموذج تنبؤ:**

سوف نحاول بناء نموذج للمتسلسلة

```
z(t)
-2.5      -9.1     -19.2     -33.1     -52.8     -76.7    -103.2
-132.4    -165.9    -204.0    -246.0    -291.3    -339.9    -391.4
-446.4    -504.8    -566.7    -631.6    -698.2    -766.7    -836.1
-905.3    -975.1   -1044.2   -1111.3   -1177.4   -1242.9   -1307.3
-1371.8   -1436.5   -1500.0   -1561.5   -1620.8   -1679.0   -1736.9
-1794.5   -1851.1   -1906.9   -1960.6   -2010.0   -2055.4   -2097.5
-2136.4   -2173.3   -2210.8   -2250.5   -2290.6   -2328.5   -2363.4
-2398.7   -2437.6   -2482.0   -2533.0   -2589.5   -2651.9   -2721.4
-2797.6   -2880.4   -2968.6   -3060.8   -3156.1   -3253.4   -3353.3
-3456.9   -3564.3   -3675.0   -3788.7   -3906.6   -4028.2   -4153.0
-4281.7   -4412.0   -4542.3   -4673.3   -4805.0   -4937.2   -5068.7
-5197.8   -5323.6   -5444.4   -5558.0   -5663.8   -5760.6   -5848.8
-5931.6   -6011.8   -6090.4   -6167.9   -6244.3   -6317.8   -6387.3
-6453.5   -6518.9   -6584.6   -6649.0   -6711.8   -6773.3   -6834.5
-6896.0   -6957.1   -7015.6   -7073.1   -7131.7   -7193.3   -7259.9
-7332.9   -7411.2   -7495.3   -7586.4   -7683.2   -7784.7   -7891.4
-8004.6   -8124.0   -8249.2   -8379.1   -8512.3   -8649.8   -8791.2
-8936.4   -9086.3   -9239.6   -9394.6   -9552.0   -9713.3   -9878.4
-10047.2  -10219.0  -10392.1  -10564.0  -10734.0  -10903.2  -11071.9
-11238.9  -11402.0  -11560.2  -11713.8  -11863.9  -12011.7  -12157.5
-12302.5  -12447.5  -12593.4  -12740.8  -12889.7  -13039.8  -13190.3
-13339.6  -13486.3  -13629.3  -13769.9  -13910.1  -14051.7  -14196.3
-14345.9  -14499.7  -14657.5  -14819.8  -14986.4  -15158.3  -15335.9
-15518.4  -15705.0  -15895.8  -16091.5  -16290.9  -16492.7  -16697.1
-16904.2  -17113.5  -17324.4  -17535.7  -17745.2  -17951.5  -18155.6
-18360.1  -18564.2  -18766.2  -18965.1  -19161.7  -19356.3  -19547.0
-19733.5  -19919.5  -20107.3  -20294.5  -20478.0  -20655.7  -20827.7
-20993.7  -21154.4  -21310.9  -21463.7  -21614.0  -21762.1  -21908.3
-22053.2  -22195.6  -22335.1  -22474.4
```

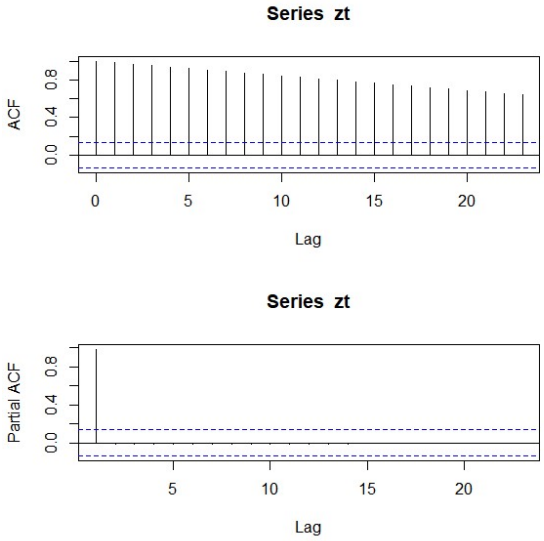
ولها الرسم الزمني التالي:

```
> zt <- ts(z270)
> plot.ts(zt)
```




الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية هي:

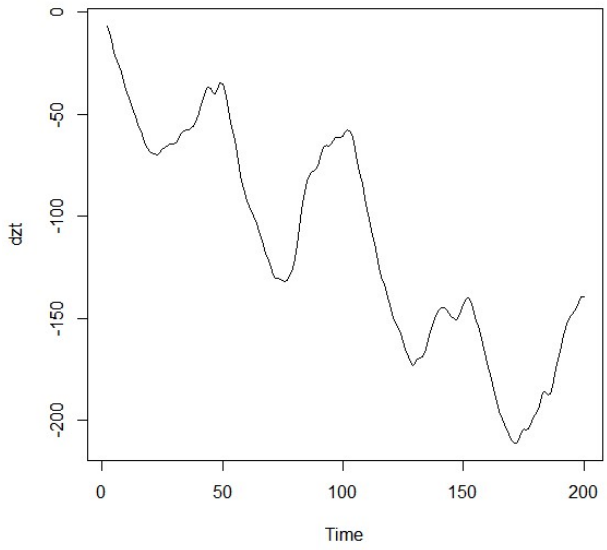
```
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(zt)
> pacf(zt)
```




واضح جدا ان المتسلسلة $z_t$ غير مستقرة في المتوسط.

نأخذ الفروق الاولى $w_t = z_t - z_{t-1}$ ونرسمها

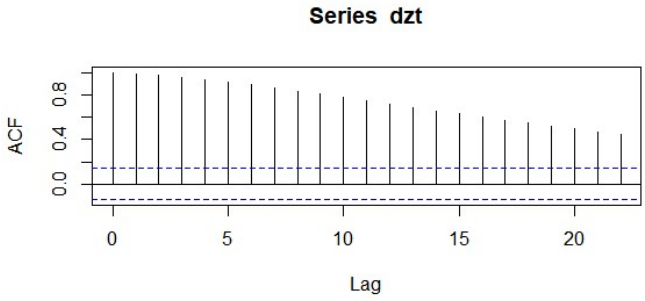
```
> dzt <- diff(zt)
> par(mfrow=c(1,1))
> plot.ts(dzt)
```

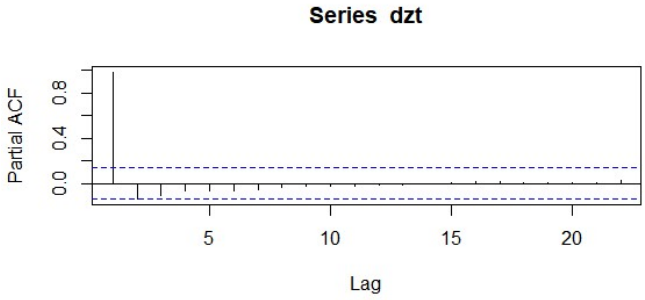



الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية للمتسلسلة المفرقة هي:

> acf(dzt)

> pacf(dzt)

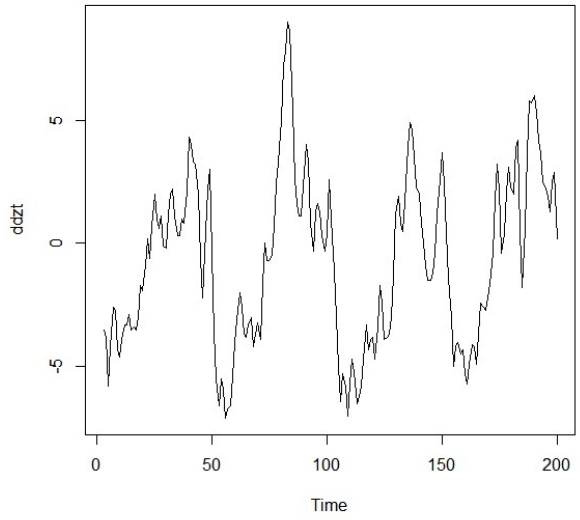


واضح جدا ان المتسلسلة $w_t$ لاتزال غير مستقرة في المتوسط.

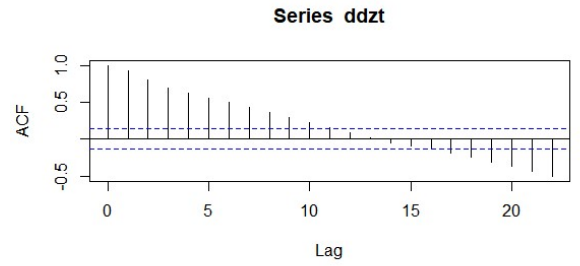
نأخذ الفروق الاولى $y_t = w_t - w_{t-1}$ (لاحظ ان هذا الفرق الثاني للمتسلسلة الأصلية) ونرسمها

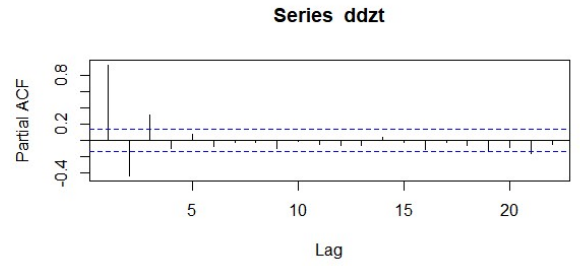
```
> plot.ts(ddzt)
```




الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية لهذه المتسلسلة المفرقة هي:

```
> acf(ddzt)
> pacf(ddzt)
```



نلاحظ من شكل المتسلسلة و الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية انها اصبحت مستقرة في المتوسط اي ان $d$=2 .

من انماط الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية نرى انها تتخامد من التخلف الأول مما يرشح نموذج ARIMA(1,2,1) للمتسلسلة الأصلية $z_t$ وسوف نطبق هذا النموذج بالأمر

```
> zt.fit2 <-arima(zt, order = c(1,2,1))
> zt.fit2

Call:
arima(x = zt, order = c(1, 2, 1))

Coefficients:
         ar1     ma1
      0.8709  0.7225
s.e.  0.0350  0.0478

sigma^2 estimated as 1.077:  log likelihood = -289.86,
aic = 585.73
```

النموذج المقترح هو

$$z_t = 0.875_{t-1} z + a_t - 0.859 a_{t-1}, \quad a_t \sim N(0, 0.937)$$

ومقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيمة إختبار $t$ هي

$$\hat{\phi}_1 = 0.8749, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.0353, \quad t = 24.75$$

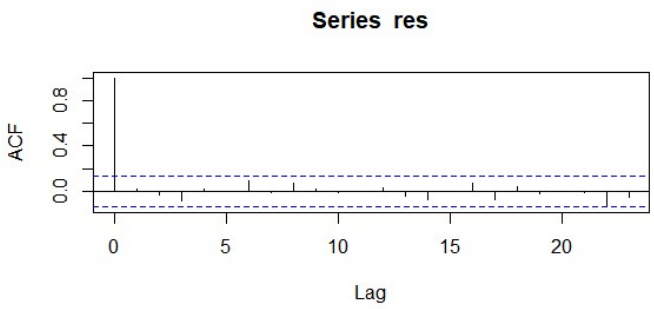
$$\hat{\theta}_1 = -0.8599, \quad s.e.\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.0357, \quad t = -24.12$$

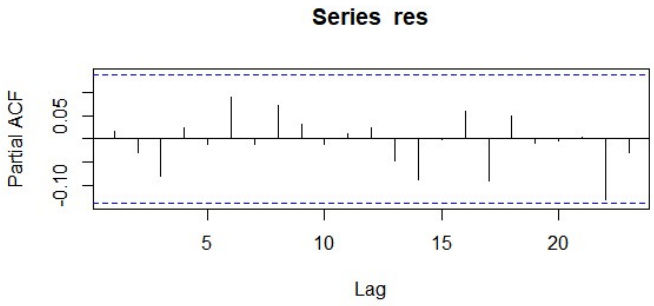
$$\hat{\sigma}^2 = 0.937, \quad with \quad d.f. = 196$$

نلاحظ ان المعالم معنوية.

الآن نفحص البواقي:

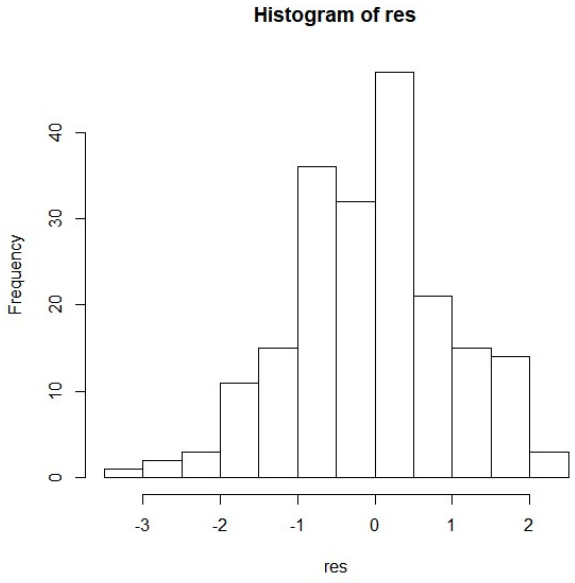
```
> res <- zt.fit2$residuals
>  par(mfrow=c(2,1))
> acf(res)
> pacf(res)
```




أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للبواقي تدل على أن البواقي تتبع توزيع ضجة بيضاء أي غير مترابطة، لنفحص طبيعية البواقي:

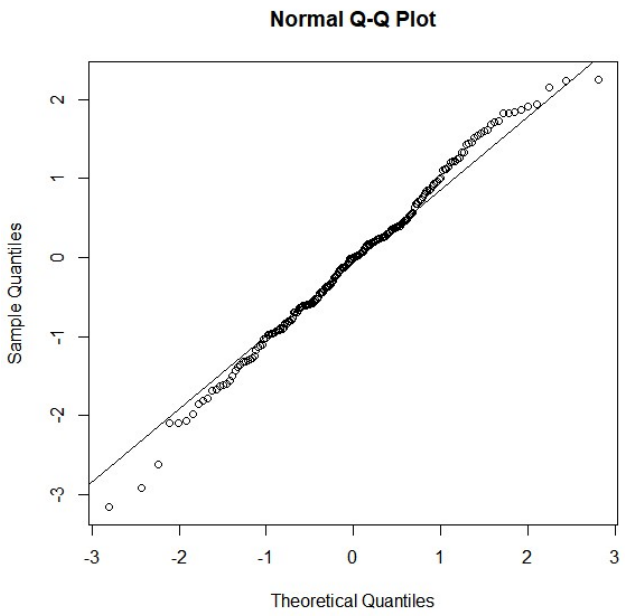
رسم المدرج التكراري




يبدو متناظر بعض الشيئ.

لننظر إلى مخطط الإحتمال الطبيعي للبواقي:

```
> qqnorm(res)
> qqline(res)
```

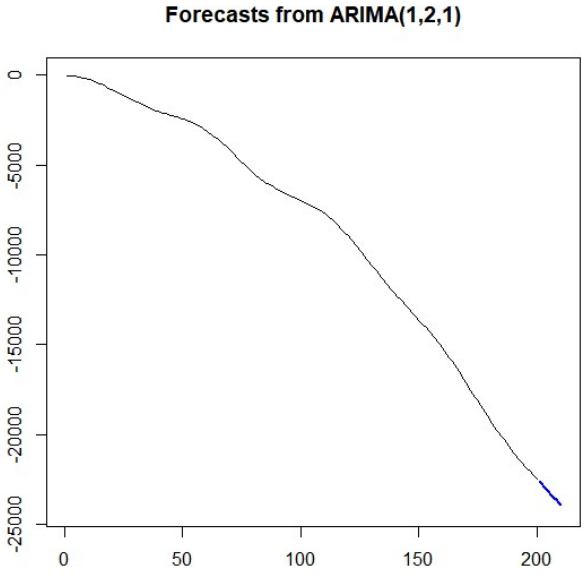



نستطيع أن نقول ان البواقي طبيعية تقريبا.

الرسم التالي لـ 10 تنبؤات للقيم المستقبلية مع 95% فترات تنبؤ.

```
> zt.fcast <- forecast(zt.fit2)
> zt.fcast
    Point Forecast     Lo 80     Hi 80     Lo 95     Hi 95
201      -22615.04 -22616.37 -22613.71 -22617.08 -22613.01
202      -22756.85 -22761.81 -22751.89 -22764.44 -22749.27
203      -22899.68 -22910.91 -22888.45 -22916.86 -22882.51
204      -23043.40 -23063.75 -23023.05 -23074.53 -23012.27
205      -23187.89 -23220.34 -23155.44 -23237.52 -23138.26
206      -23333.05 -23380.63 -23285.47 -23405.82 -23260.28
207      -23478.80 -23544.55 -23413.04 -23579.36 -23378.24
208      -23625.05 -23712.00 -23538.11 -23758.02 -23492.08
209      -23771.75 -23882.87 -23660.63 -23941.70 -23601.81
210      -23918.84 -24057.07 -23780.62 -24130.24 -23707.45
```

> plot(zt.fcast)


Forecasts from ARIMA(1,2,1)
0
-5000
-10000
-15000
-20000
-25000
0
50
100
150
200

# ملحق (1)

# أسئلة بعض الإختبارات السابقة وبعض الإجابات المحتملة عليها

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الاحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم جامعة الملك سعود

الاختبار النهائى للفصل الاول 1420/1419 هـ

المادة 221 بحث طرق التنبؤ الاحصائى

اجب على جميع الاسئلة التالية:

السؤال الاول:

البيانات التالية تمثل عدد السيارات المباعة اسبوعيا لدي موزع ما

| الاسبوع | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| العدد | 75 | 75 | 79 | 83 | 69 | 78 | 71 | 80 | 77 | 85 |

اوجد تنبؤات لعدد السيارات التى ستباع فى الاسبوعين التاليين واوجد فترات تنبؤ 95% لهذه التنبؤات كلما امكن ذلك باستخدام:

ا) نموذج انحدار خطى للعدد المباع مع الزمن بالاسابيع.

ب) التمهيد بواسطة متوسط متحرك من الدرجة الثالثة.

ج) التمهيد الاسى البسيط مستخدما $\alpha = 0.3$.

السؤال الثاني:

للنموذج $\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)z_t = \delta + (1-\theta B)a_t$ حيث $a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$ و $\phi_1,\phi_2,\delta,\theta$ هى معالم النموذج و $B$ هو عامل الازاحة الخلفى اوجد:

ا) $E\left(z_t\right)\ \forall t$

ب) دالة الترابط الذاتى $\rho_k\ \forall k \geq 0$

ج) دالة الترابط الذاتى الجزئى $\phi_{kk}\ \forall k \geq 0$

د) دالة الاوزان $\psi_j\ \forall j \geq 0$

السؤال الثالث:

للنموذج $z_t = 38.5 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t - 0.4a_{t-1}$ حيث $a_t \sim WN(0,4)$ واذا كانت $t = 10$ و $z_9 = 77$ و $z_{10} = 85$ و $a_{10} = -1.6$ اوجد:

ا) دالة التنبؤ التى لها ادنى متوسط مربع اخطاء

ب) تباين دالة اخطاء التنبؤ حتى زمن التقدم $\ell = 3$

ج) تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{11}$ و $z_{12}$

د) فترات تنبؤ 95% للتنبؤات السابقة

هـ) اذا علمت ان $z_{11} = 81$ فجدد التنبؤ للقيمه $z_{12}$ ولفترة تنبؤها.

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الاحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم جامعة الملك سعود

الاختبار النهائى للفصل الاول 1420/1419 هـ

المادة 221 بحث طرق التنبؤ الاحصائى

اجب على جميع الاسئلة التالية:

السؤال الاول:

البيانات التالية تمثل عدد السيارات المباعة اسبوعيا لدي موزع ما

| Week | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of cars | 75 | 75 | 79 | 83 | 69 | 78 | 71 | 80 | 77 | 85 |

اوجد تنبؤات لعدد السيارات التى ستباع فى الاسبوعين التاليين واوجد فترات تنبؤ 95% لهذه التنبؤات كلما امكن ذلك باستخدام:

ا) نموذج انحدار خطى للعدد المباع مع الزمن بالاسابيع.

ب) التمهيد بواسطة متوسط متحرك من الدرجة الثالثة.

ج) التمهيد الاسى البسيط مستخدما $\alpha = 0.3$.

السؤال الثاني:

للنموذج $\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)z_t = \delta + (1-\theta B)a_t$ حيث $a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$ و $\phi_1,\phi_2,\delta,\theta$ هى معالم النموذج و $B$ هو عامل الازاحة الخلفى اوجد:

ا) $E\left(z_t\right)\ \forall t$

ب) دالة الترابط الذاتى $\rho_k\ \forall k \geq 0$

ج) دالة الترابط الذاتى الجزئى $\phi_{kk}\ \forall k \geq 0$

د) دالة الاوزان $\psi_j\ \forall j \geq 0$

السؤال الثالث:

للنموذج $z_t = 38.5 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t - 0.4a_{t-1}$ حيث $a_t \sim WN(0,4)$ واذا كانت $t = 10$ و $z_9 = 77$ و $z_{10} = 85$ و $a_{10} = -1.6$ اوجد:

ا) دالة التنبؤ التى لها ادنى متوسط مربع اخطاء

ب) تباين دالة اخطاء التنبؤ حتى زمن التقدم $\ell = 3$

ج) تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{11}$ و $z_{12}$

د) فترات تنبؤ 95% للتنبؤات السابقة

هـ) اذا علمت ان $z_{11} = 81$ فجدد التنبؤ للقيمه $z_{12}$ ولفترة التنبؤ

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الأول 1420-1421 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: لمتسلسة زمنية $\{z_t\}$

1- أذكر شروط الإستقرار

2- عرف دالة الترابط الذاتي

السؤال الثاني: للمتسلسة التالية

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_t$ | 53 | 43 | 66 | 48 | 52 | 42 | 44 | 56 | 44 | 58 | 41 | 54 | 51 | 56 | 38 |

1- طبق خط إنحدار بين $(t, z_t)$ ومن ثم أوجد $z_{16}, z_{17}$

2- طبق متوسط متحرك من الدرجة الثالثة ومن ثم أوجد $z_{16}, z_{17}$

3- طبق تمهيد اسي بسيط $\alpha = 0.5$ ومن ثم أوجد $z_{16}, z_{17}$

4- إذا كانت $z_{16} = 56$ و $z_{17} = 49$ فأي من الطرق السابقة أكثر دقة وذلك بإستخدام معيار خطأ مناسب

السؤال الثالث:

للنموذج $z_t = 20 - 0.9z_{t-1} + a_t \quad , a_t \sim WN(0,4)$

1- هل النموذج مستقر؟

2- أوجد $\mu$

3- أوجد $\rho_k$ و $\phi_{kk}$ لقيم $k = 0,1,2,...,5$

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار النهائي للفصل الثاني1420-1421 هـ

الزمن : أربع ساعات

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: ( 20 علامة )

أكمل الفراغات التالية:

1) لمتسلسلة زمنية $\{Z_t\}$ دالة التغاير الذاتي تعطى بالعلاقة $\gamma_k = Cov\left(Z_t, Z_{\square}\right)$ ودالة الترابط الذاتي بالعلاقة $\rho_k = \gamma_k / \square$ ولها الخواص $\rho_0 = \square$ و $\left|\rho_k\right| \square 1$ و $\rho_k = \rho_{\square}$ ( 5 علامات )

2) لمتسلسلة زمنية مشاهدة $z_1, z_2, \cdots, z_n$ دالة الترابط الذاتي للعينة تقدر من العلاقة $r_k = \sum_{i=1}^{\square}\left(z_t - \bar{z}\right)\left(z_{t+k} - \bar{z}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(z_t - \bar{z}\right)^{\square}, k = 0,1,\cdots$ و الإنحراف المعياري لدالة الترابط الذاتي للعينة تقدر من العلاقة $s.e\left(r_k\right) \simeq 1/\sqrt{\square}$ كما ان دالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة تقدر من العلاقة $r_{k+1,k+1} = \dfrac{r_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} r_{kj} r_{\square}}{1 - \sum_{j=1}^{k} r_{\square} r_j}$ و العلاقة المساعدة $r_{k+1,j} = r_{kj} - r_{k+1,k+1} r_{k,\square}, j = 1,...,\square$ ولها حدود حرجة $\pm \dfrac{\square}{\sqrt{n}}$ ( 8 علامات )

3) نموذج $AR(\square)$ يعطى بالعلاقة

$\left(1-\phi_1\square-\phi_2\square^2\right)Z_t=a_t, a_t\sim WN(\square,\square)$ و الذي يكتب علي الشكل

$Z_t=\delta+\phi_1\square+\phi_2\square+a_t$ ( 7 علامات )

السؤال الثاني: ( 40 علامة )

البيانات التالية هي حجم المبيعات اليومية لشركة ما بآلاف الريالات: (إقرأ من اليسار لليمين)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 29.3 | 20.0 | 25.8 | 29.0 | 31.0 | 32.7 | 33.6 |
| | | | | 27.5 | 26.8 | 30.6 |
| 28.9 | 28.5 | 28.2 | 26.1 | 27.8 | 27.6 | 29.9 |
| | | | | 28.2 | 26.7 | 30.0 |
| 30.8 | 30.5 | 36.6 | 31.4 | 30.8 | 33.2 | 30.2 |
| | | | | 27.1 | 33.7 | 36.6 |
| 29.0 | 28.1 | 30.3 | 29.4 | 33.6 | 30.3 | 20.1 |
| | | | | 17.5 | 23.7 | 24.2 |
| 32.4 | 32.4 | 29.4 | 23.5 | 23.6 | 28.1 | 29.9 |
| | | | | 30.6 | 32.3 | 31.6 |
| 28.0 | 24.1 | 29.2 | 34.3 | 26.4 | 28.8 | 21.3 |
| | | | | 21.7 | 21.5 | 24.7 |
| 33.6 | 36.5 | 35.7 | 33.7 | 29.3 | 25.1 | 27.2 |
| | | | | 30.6 | 29.1 | 28.5 |
| 32.0 | 31.9 | 31.7 | 29.0 | 31.9 | 24.3 | 22.7 |
| | | | | 26.6 | 28.9 | 28.3 |
| 28.2 | 28.6 | 30.7 | 30.6 | 20.8 | 16.6 | 25.2 |
| | | | | 31.8 | 32.5 | 30.3 |
| 26.1 | 19.0 | 24.3 | 31.5 | 32.0 | 31.7 | 29.1 |
| | | | | | | 23.2 |

1) بإستخدام الأمرين acf% و pacf% في *Minitab* تعرف علي النموذج من عائلة النماذج $ARIMA(p,d,q)$ والذي تتبعه البيانات ( 7 علامات )

2) أوجد مقدرات أولية لمعالم النموذج المتعرف عليه بطريقة العزوم وطريقة المربعات الدنيا الشرطية ( 9 علامات )

3) بإستخدام مقدرات المعالم بطريقة المربعات الدنيا الشرطية أو العزوم أكتب النموذج علي الشكل $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$ حيث $a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$ ( 4 علامات )

4) أوجد دالة التنبؤ للنموذج ومن ثم أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $Z_{99}$ و $Z_{100}$ وإذا علمت أن $\sigma^2 = 10.83$ فاوجد فترات تنبؤ 95% للقيم المستقبلية $Z_{99}$ و $Z_{100}$ (10 علامات )

5) إذا علمت أن $z_{99} = 26.7$ فجدد التنبؤ للقيمة المستقبلية $Z_{100}$ وإذا كانت $z_{100} = 32.4$ فهل التنبؤ أفضل قبل ام بعد التجديد ؟ ( 5 علامات )

6) بإستخدام الأمر arima p d q C1 والأوامر الفرعية forecast 5 C2 C3 C4 و gseries و gacf و gpacf و ghist و gnormal و gfit تحقق و قارن مع نتائجك في الفقرات السابقة. ( 5 علامات )

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

إختبار الفصل الأول 1421هـ/1422هـ

لمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي )

الزمن 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

1- عرف التالي بإختصار: الضجة البيضاء، الترابط الذاتي، التمهيد، الإستقرار

2- اكتب المعادلات المعرفة للنماذج التالية: AR(2), MA(1), ARMA(1,2)

ج) لنموذج AR(2) أي من المعالم التالية تحقق الإستقرار:

1) $\phi_1 = 1.2, \phi_2 = -0.8$

2) $\phi_1 = -1.2, \phi_2 = -0.8$

3) $\phi_1 = 0.8, \phi_2 = -0.8$

4) $\phi_1 = -0.8, \phi_2 = 1.2$

السؤال الثاني:

البيانات التالية تمثل مبيعات أجهزة الحاسب في أحد الشركات شهريا ( إقرأ من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **19** | **27** | **28** | **16** | **21** | **26** |
| **25** | **20** | **16** | **25** | **26** | **21** |
| **23** | **21** | **26** | **23** | **21** | **25** |
| **25** | **17** | | | | |

1- أدخل البيانات في ورقة عمل للبرنامج Minitab و أرسمها كمتسلسة زمنية.

2- طبق على البيانات النماذج التالية:

i) Linear Trend Model

ii) Simple Moving Average Model of order 3

iii) Simple Exponential Smoothing Model with $\alpha$=0.3

ج) طبق على البيانات نموذج من عائلة $ARMA(p,q)$ وذلك بالتعرف على $p,q$ المناسبة ومن ثم قدر المعالم للنموذج المقترح.

د) أي نموذج من النماذج السابقة ( في الفقرتين ب و ج ) يصف المشاهدات بشكل أفضل؟

هـ) بإستخدام النموذج الأفضل ولد تنبؤات للشهرين التاليين بفترات تنبؤ 95%

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الثاني 1422/1421 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: شوهدت المتسلسة الزمنية التالية: (إقرا من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 38 | 71 | 23 | 64 | 47 |
| 55 | 64 | | | |
| 35 | 71 | 48 | 59 | 41 |
| 40 | 57 | | | |
| 37 | 55 | 80 | 44 | 58 |
| 51 | 74 | | | |
| 57 | 45 | 60 | 50 | 57 |
| 45 | 50 | | | |
| 56 | 71 | 50 | 59 | 25 |
| 50 | 74 | | | |
| 54 | 36 | 54 | 45 | 58 |
| 55 | 48 | | | |
| 44 | 62 | 50 | 57 | 45 |
| 43 | 64 | | | |
| 41 | 55 | 59 | 38 | 52 |
| 49 | 53 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 34 | 35 | 54 | 45 | 68 |
| | | | 38 | 50 |
| 60 | 39 | 59 | 40 | 57 |
| | | | 54 | 23 |

أدخل المشاهدات في صحيفة عمل Worksheet في برنامج Minitab وأجب على التالي:

(أ) إفحص المشاهدات بواسطة Tsplot هل تبدو المتسلسلة مستقرة؟ لماذا؟ (علامة واحدة)

(ب) هل نستخدم طريقة تحليل الإنجراف Trend Analysis لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(ج) هل نستخدم طريقة التفكيك Decomposition Method لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(د) هل نستخدم طريقة التمهيد بالمتوسط المتحرك Moving Average Smoothing لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(هـ) هل نستخدم طريقة التمهيد الاسي البسيط Simple Exponential Smoothing لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

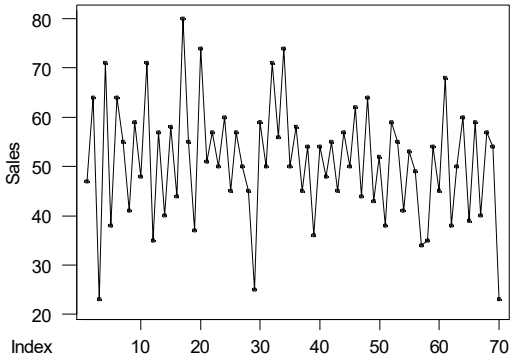
(و) هل نستخدم طريقة التمهيد الاسي الثنائي Double Exponential Smoothing لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(ز) هل نستخدم طريقة ونترز Winters' Method لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

السؤال الثاني: من السؤال السابق توجد طريقة واحدة فقط هي الأنسب لتحليل المتسلسلة الزمنية المشاهدة! بإستخدام الطريقة المناسبة أوجد تنبؤات لخمسة قيم مستقبلية مع فترات تنبؤ 95% . (8 علامات)

إجابة السؤال الأول:

(أ)




المتسلسلة تبدو مستقرة حيث انها تتغير حول مستوى ثابت

(ب) يمكن إستخدام طريقة تحليل الإنجرف ولكنها غير مناسبة هنا لعدم وجود إتجاه معين تتجه له المتسلسلة

(ج) يمكن إستخدام طريقة التفكيك ولكنها تناسب أكثر المتسلسلات التي فيها مركبات إنجراف و موسمية

(د) يناسب التمهيد بالمتوسط المتحرك هذا النوع من المتسلسلات الزمنية أكثر من غيره من الطرق لأنه كما نرى هذه المتسلسلة تحتاج إلى تمهيد بسيط إذ ليس بها أي إنجراف أو موسمية

(هـ) التمهيد الاسي البسيط ينفع لمثل هذه المتسلسلات أيضا وخاصة إذا كانت تحوي إنجرافا بسيط

(و) التمهيد الاسي الثنائي يفيد أكثر في حالة المتسلسلات التي تحوي إنجرافا غير خطي والذي لايبدو من تصرف المتسلسة المشاهدة

(ز) طريقة ونترز تنفع للمتسلسلات الموسمية التي تحوي على مركبة إنجراف غير خطي

إجابة السؤال الثاني:

يبدو أن طريقة التمهيد بالمتوسط المتحرك هي الأكثر مناسبة لتحليل المتسلسلة المشاهدة. لنجرب عدة متوسطات متحركة لتمهيد المتسلسلة وإيجاد تنبؤات لها.

(1) لنجرب متوسط متحرك من الدرجة الثانية (ممركز):

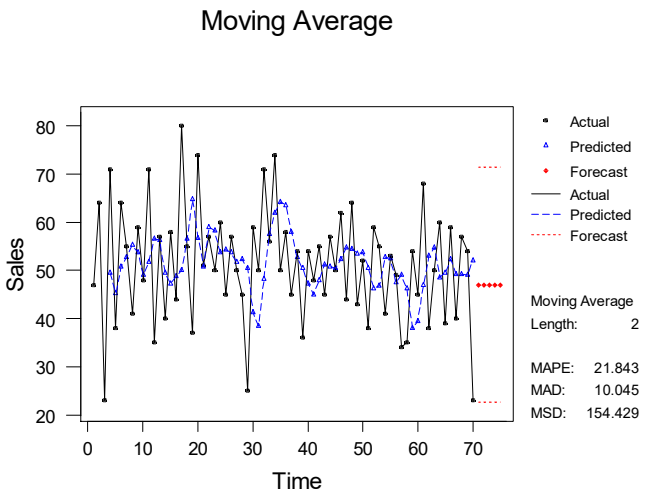
```
MTB > %MA 'Sales' 2;
```

```
SUBC>  Center;
SUBC>   Forecasts 5.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

```
Data         Sales
Length      70.0000
NMissing    0

Moving Average
Length: 2

Accuracy Measures
MAPE:  21.843
MAD:   10.045
MSD:  154.429
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 2 | 72 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 3 | 73 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 4 | 74 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 5 | 75 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |




(2) لنجرب متوسط متحرك من الدرجة الثالثة:

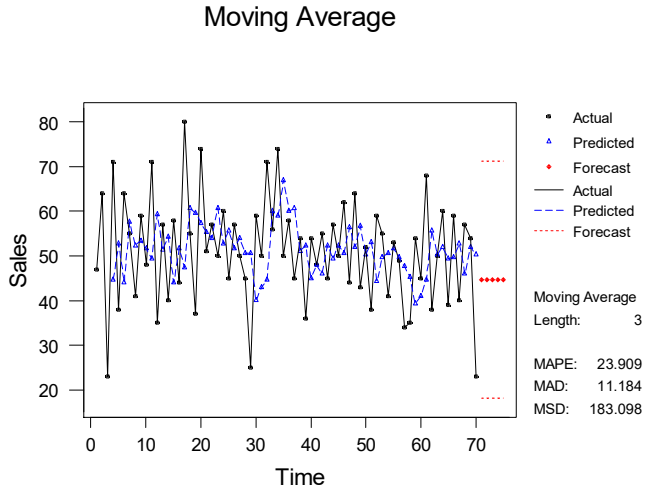
```
MTB > %MA 'Sales' 3;
SUBC>   Forecasts 5.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

```
Data         Sales
Length       70.0000
NMissing     0

Moving Average
Length: 3

Accuracy Measures
```

```
MAPE:  23.909
MAD:   11.184
MSD:  183.098
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 2 | 72 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 3 | 73 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 4 | 74 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 5 | 75 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |




(3) لنجرب متوسط متحرك من الدرجة الرابعة (ممركز):

```
MTB > %MA 'Sales' 4;
SUBC>  Center;
SUBC>  Forecasts 5.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC
```

Macro is running ... please wait

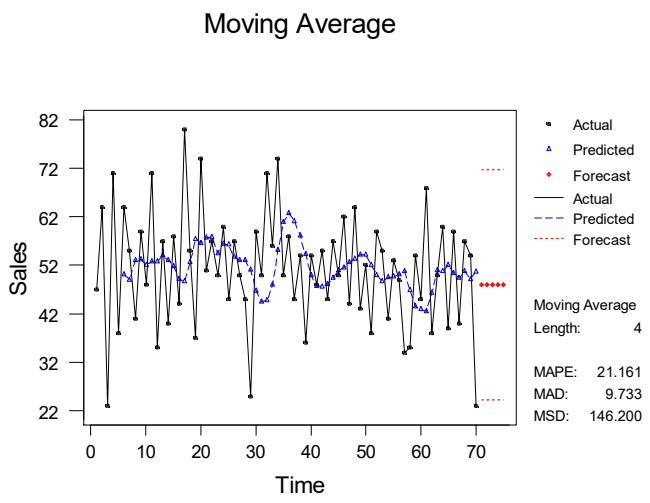
**Moving average**

| | |
|---|---|
| Data | Sales |
| Length | 70.0000 |
| NMissing | 0 |

Moving Average
Length: 4

Accuracy Measures
MAPE: 21.161
MAD: 9.733
MSD: 146.200

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 2 | 72 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 3 | 73 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 4 | 74 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 5 | 75 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |



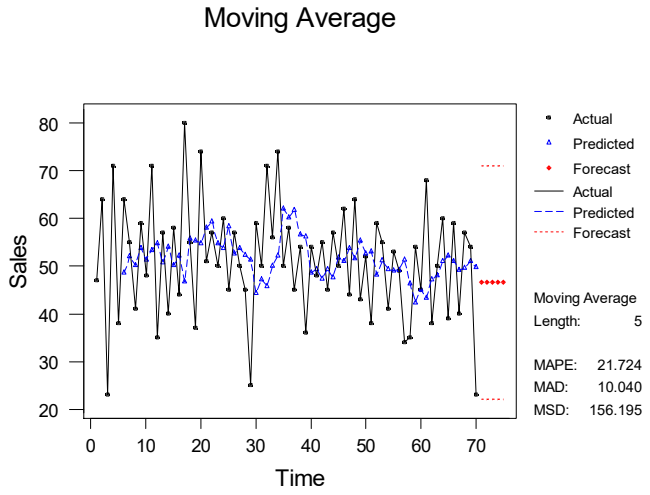

(4) أخيرا نجرب متوسط متحرك من الدرجة الخامسة:

```
MTB > %MA 'Sales' 5;
SUBC>   Forecasts 5.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

```
Data         Sales
Length       70.0000
NMissing     0

Moving Average
Length: 5

Accuracy Measures
MAPE:  21.724
MAD:   10.040
MSD:  156.195
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 2 | 72 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 3 | 73 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 4 | 74 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 5 | 75 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |




من النتائج السابقة نجد أن المتوسط المتحرك من الدرجة الرابعة الممركز يعطي أقل قيمة لـ MSD (Mean Square Deviation) تساوي 146.2

التنبؤات للخمسة قيم المستقبلية مع فترات تنبؤ 95% هي

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 2 | 72 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 3 | 73 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 4 | 74 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 5 | 75 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات
كلية العلوم
جامعة الملك سعود

الإختبار الثاني لأعمال الفصل الثاني 1422/1421 هـ
لمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي )
الزمن: 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$\left(1-1.2B+0.6B^2\right)\left(z_t-65\right)=\left(1-0.4B\right)a_t, a_t \sim WN\left(0,1\right)$$

(أ) تحقق من ان النموذج مستقر وقابل للإنقلاب.

(ب) أوجد كل من $\rho_k$ و $\phi_{kk}$ لقيم $k=1,2,...,5$.

(ج) أوجد دالة الأوزان $\psi_j$ لقيم $j=1,2,...,5$.

السؤال الثاني:

للنموذج السابق إذا علمت أن $z_{76}=60.4, z_{77}=58.9, z_{78}=64.7, z_{79}=70.4, z_{80}=62.6$.

(أ) أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{81}, z_{82}, z_{83}, z_{84}$.

(ب) أوجد فترات تنبؤ 95% للتنبؤات في الفقرة السابقة.

السؤال الثالث:

للنموذج

$$(1-0.43B)(1-B)z_t = a_t,\ a_t \sim WN(0,1)$$

(أ) هل النموذج مستقر؟ ولماذا؟

(ب) إذا كانت $z_{49} = 33.4, z_{50} = 33.9$ فأحسب التنبؤات $z_{50}(\ell)$ لقيم $\ell = 1,2,...,5$.

(ج) أوجد فترات تنبؤ 95% للتنبؤات في الفقرة السابقة.

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات
كلية العلوم
جامعة الملك سعود

الإختبار النهائي للفصل الثاني 1422/1421 هـ
للمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي)
الزمن 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

طبقنا على متسلسلة مبيعات نموذج $ARIMA(1,1,0)$ التالي:

$$(1-0.7B)(1-B)z_t = a_t,\ a_t \sim WN(0,25)$$

المشاهدتين الأخيرة هي $z_{143} = 770, z_{144} = 800$

)أ) هل النموذج مستقر أم لا ولماذا؟

(ب) أوجد دالة الأوزان $\psi_j$ لقيم $j = 1,2,...,5$ .

(ج) احسب التنبؤات للثلاث (3) القيم المستقبلية التالية.

(د) اوجد فترات تنبؤ 95% للتنبؤات السابقة.

السؤال الثاني:

للمتسلسلة الزمنية التالية : (إقرأ من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.49 | 5.74 | 5.51 | 3.99 | 3.45 | 4.77 | 4.14 |
| | | | | 4.60 | 3.80 | 5.43 |
| 3.96 | 2.54 | 4.05 | 6.16 | 3.78 | 5.07 | 5.42 |
| | | | | 3.91 | 4.30 | 3.88 |
| 2.89 | 4.61 | 4.08 | 4.05 | 3.28 | 2.65 | 1.22 |
| | | | | 3.98 | 3.45 | 3.57 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.52 | 1.58 | 4.00 | 5.14 | 3.84 | 4.40 | 3.08 |
| | | | | 5.43 | 4.80 | 2.75 |
| 5.77 | 4.99 | 4.31 | 6.46 | 6.11 | 4.79 | 5.65 |
| | | | | 5.52 | 6.12 | 6.06 |
| 3.20 | 5.05 | 6.23 | 6.12 | 4.99 | 4.89 | 4.78 |
| | | | | 5.67 | 6.08 | 5.80 |
| 5.13 | 7.07 | 8.02 | 6.36 | 5.75 | 5.70 | 5.61 |
| | | | | 5.63 | 5.71 | 5.16 |
| 7.20 | 6.87 | 7.56 | 6.57 | 6.08 | 4.72 | 6.09 |
| | | | | 6.64 | 7.49 | 6.64 |
| 7.26 | 7.22 | 6.69 | 7.49 | 9.01 | 7.27 | 5.62 |
| | | | | 7.59 | 7.53 | 6.43 |
| 6.42 | 8.22 | 7.67 | 7.53 | 7.23 | 8.50 | 8.27 |
| | | | | 8.75 | 7.50 | 7.86 |

بإستخدام MINITAB أوجد التالي:

(أ) أرسم المتسلسلة الزمنية بإستخدام Time Series Plot.

(ب) أقترح طريقة لتمهيد المتسلسلة بعد فحص الرسم.

(ج) لكل طريقة مقترحة قم بفحص البواقي Residuals وأختبر الفرضية فيما إذا كانت البواقي موزعة توزيع طبيعي وذلك بإستخدام إختبار Kolmogorov-Smirnov Test.

(د) قارن معايير الدقة للأخطاء Mean Absolute Percentage Error (MAPE) و Mean Absolute Deviation (MAD) و Mean Squared Deviation (MSD) لكل طريقة مقترحة ومن ثم أستخدم الطريقة الأكثر دقة لتوليد تنبؤات للخمسة القيم المستقبلية مع إيجاد فترات تنبؤ 95% .

السؤال الثالث:

للمتسلسلة الزمنية التالية: (إقرأ من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.20 | 1.50 | 1.54 | 2.70 | 1.95 | 2.40 |
| | | | | 3.44 | 2.83 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.76 | 2.00 | 2.09 | 1.89 | 1.80 | 1.25 |
| | | | | 1.58 | 2.25 |
| 2.50 | 2.05 | 1.46 | 1.54 | 1.42 | 1.57 |
| | | | | 1.40 | 1.51 |
| 1.08 | 1.27 | 1.18 | 1.39 | 1.42 | 2.08 |
| | | | | 1.85 | 1.82 |
| 2.07 | 2.32 | 1.23 | 2.91 | 1.77 | 1.61 |
| | | | | 1.25 | 1.15 |
| | 1.37 | 1.79 | 1.68 | 1.78 | 1.84 |

بإستخدام MINITAB أوجد التالي:

(أ) أرسم المتسلسلة الزمنية بإستخدام Time Series Plot.

(ب) أوجد كل من SACF و SPACF ومنها أقترح نموذج مناسب من عائلة $ARIMA(p,d,q)$ وذلك بتعيين كل من $p$ و $d$ و $q$.

(ج) قدر المعالم للنموذج المقترح وأختبر الفرضيات فيما إذا كان أحد أو كل هذة المعالم مساويا للصفر.

(د) قم بفحص البواقي Residuals وأختبر الفرضية فيما إذا كانت البواقي موزعة توزيع طبيعي وذلك بإستخدام إختبار Kolmogorov-Smirnov Test.

(هـ) أحسب تنبؤات للخمسة القيم المستقبلية التالية مع إيجاد فترات تنبؤ 95%.

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات محتملة للإختبار النهائي للفصل الثاني 1422/1421 هـ

لمادة 221 بحث

إجابة السؤال الأول:

(أ) النموذج غير مستقر لأنه يحوى عامل التفريق $(1-B)$

(ب)

$$(1-0.7B)(1-B)z_t = a_t$$
$$(1-1.7B+0.7B^2)z_t = a_t$$
$$\therefore z_t = \frac{1}{1-1.7B+0.7B^2}a_t$$
$$= \psi(B)a_t$$
$$\therefore \psi(B) = \frac{1}{1-1.7B+0.7B^2}$$
$$\therefore (1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots)(1-1.7B+0.7B^2) \equiv 0$$
$$B: \psi_1 - 1.7 = 0 \Rightarrow \psi_1 = 1.7$$
$$B^2: \psi_2 - 1.7\psi_1 + 0.7 = 0 \Rightarrow \psi_2 = 1.7\psi_1 - 0.7 = 2.19$$
$$B^3: \psi_3 - 1.7\psi_2 + 0.7\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_3 = 1.7\psi_2 - 0.7\psi_1 = 2.53$$
$$\vdots$$
$$B^j: \psi_j - 1.7\psi_{j-1} + 0.7\psi_{j-2} = 0 \Rightarrow \psi_j = 1.7\psi_{j-1} + 0.7\psi_{j-2},\ j = 2,3,...$$
$$\therefore \psi_4 = 1.7\psi_3 - 0.7\psi_2 = 2.768$$
$$\psi_5 = 1.7\psi_4 - 0.7\psi_3 = 2.9346$$

إذا الأوزان المطلوبة هي: $\psi_1 = 1.7, \psi_2 = 2.19, \psi_3 = 2.53, \psi_4 = 2.77, \psi_5 = 2.93$

(ج) نحسب التنبؤات كالتالي:

$$\because \left(1-1.7B+0.7B^2\right)z_t = a_t$$

$$\therefore z_t = 1.7z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t$$

$$\therefore z_t(\ell) = E\left[z_{t+\ell}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right], \ell \geq 0$$

$$= E\left[1.7z_{t+\ell-1} - 0.7z_{t+\ell-2} + a_{t+\ell}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right], \ell \geq 0$$

$$= 1.7E\left[z_{t+\ell-1}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] - 0.7E\left[z_{t+\ell-2}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] + E\left[a_{t+\ell}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right], \ell \geq 0$$

$$\therefore \ell = 1 : z_t(1) = 1.7E\left[z_t\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] - 0.7E\left[z_{t-1}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] + E\left[a_{t+1}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right]$$

$$= 1.7z_t - 0.7z_{t-1}$$

$$\ell = 2 : z_t(2) = 1.7E\left[z_{t+1}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] - 0.7E\left[z_t\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] + E\left[a_{t+2}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right]$$

$$= 1.7z_t(1) - 0.7z_t$$

$$\ell = 3 : z_t(3) = 1.7E\left[z_{t+2}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] - 0.7E\left[z_{t+1}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right] + E\left[a_{t+3}\middle|z_t, z_{t-1}, \cdots\right]$$

$$= 1.7z_t(2) - 0.7z_t(1)$$

$$\therefore \ell \geq 3 : z_t(\ell) = 1.7z_t(\ell-1) - 0.7z_t(\ell-2)$$

$$\because t = 144$$

$$\therefore z_{144}(1) = 1.7z_{144} - 0.7z_{143} = 1.7(800) - 0.7(770) = 821$$

$$z_{144}(2) = 1.7z_{144}(1) - 0.7z_{144} = 1.7(821) - 0.7(800) = 835.7$$

$$z_{144}(3) = 1.7z_{144}(2) - 0.7z_{144}(1) = 1.7(835.7) - 0.7(821) = 845.99$$

إذا التنبؤات للثلاث قيم المستقبلية هي:

$$z_{144}(1) = 821, \quad z_{144}(2) = 835.7, \quad z_{144}(3) = 845.99$$

(د) فترات $(1-\alpha)100\%$ تنبؤ تعطى بالعلاقة

$$\left[z_t(\ell) \pm u_{\alpha/2}\sqrt{V\left[e_t(\ell)\right]}\right], \ell \geq 0$$

حيث $u_{\alpha/2}$ هو المئين 95 للتوزيع الطبيعي القياسي وحيث ان $\alpha = 0.05$ فإن $u_{\alpha/2} = 1.96$ أي أن

$$z_{t+\ell} \in \left[z_t(\ell) \pm 1.96\sqrt{V\left[e_t(\ell)\right]}\right] \text{ w.p. } 0.95, \ell \geq 0$$

أولا نحسب تباينات أخطاء التنبؤ من العلاقة: $V\left[e_t(\ell)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2+\psi_2^2+\cdots+\psi_{\ell-1}^2\right), \ell \geq 0$

$$V\left[e_t(1)\right] = \sigma^2 = 25$$

$$V\left[e_t(2)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2\right) = 25\left(1+(1.7)^2\right) = 97.25$$

$$V\left[e_t(3)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2+\psi_2^2\right) = 25\left(1+(1.7)^2+(2.19)^2\right) = 217.1525$$

ومنها نجد فترات التنبؤ المطلوبة:

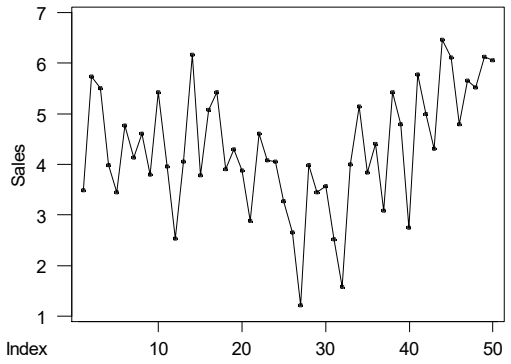
$$z_{145} \in \left[ 821 \pm 1.96\sqrt{25} \right] = [811.2, 830.8], w.p.\ 0.95$$

$$z_{146} \in \left[ 835.7 \pm 1.96\sqrt{97.25} \right] = [816.37, 855.03], w.p.\ 0.95$$

$$z_{145} \in \left[ 845.99 \pm 1.96\sqrt{217.1525} \right] = [817.11, 874.87], w.p.\ 0.95$$

إجابة للسؤال الثاني:

(أ)



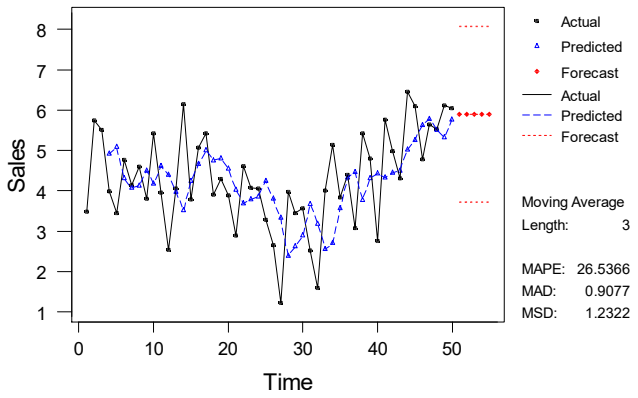

(ب) من الرسم السابق نجد أن المتسلسلة غير موسمية ولذلك نستخدم في تمهيدها أحد الطرق التالية:

1- المتوسط المتحرك Moving Average Smoothing

2- التمهيد الأسي البسيط Single Exponential Smoothing

3- التمهيد الأسي الثنائي Double Exponential Smoothing

أولا المتوسط المتحرك




```
MTB > %MA 'Sales' 3;
SUBC>   Forecasts 5;
SUBC>   Title "Smoothing Sales Series by Moving
                Avg. of Order 3";
SUBC>   Residuals 'RESI1'.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

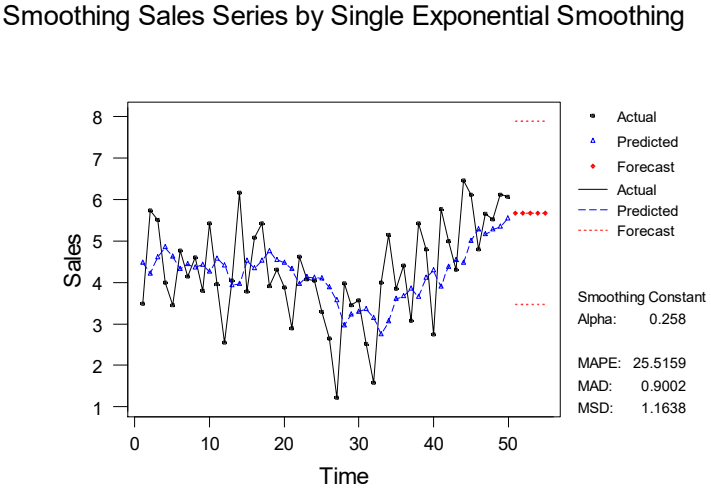
**Moving average**

```
Data          Sales
Length       50.0000
NMissing      0

Moving Average
Length: 3

Accuracy Measures
```

```
MAPE: 26.5366
MAD:   0.9077
MSD:   1.2322
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 2 | 52 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 3 | 53 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 4 | 54 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 5 | 55 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |

ثانيا التمهيد الأسي البسيط




```
MTB > %SES 'Sales';
SUBC>   Forecasts 5;
SUBC>    Title "Smoothing Sales Series by Single
                Exponential Smoothing";
```

```
SUBC>   Residuals 'RESI2'.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\SES.MAC

Macro is running ... please wait
```

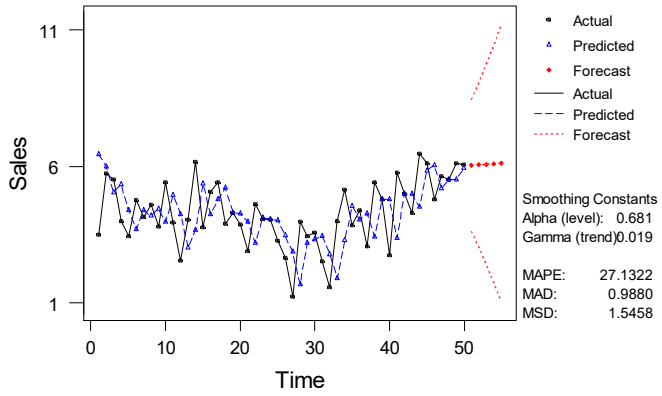
**Single Exponential Smoothing**

```
        Data        Sales
      Length      50.0000
     NMissing     0

Smoothing Constant
Alpha: 0.257773

Accuracy Measures
MAPE: 25.5159
MAD:   0.9002
MSD:   1.1638
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 2 | 52 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 3 | 53 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 4 | 54 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 5 | 55 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |

ثالثا التمهيد الأسي الثنائي

Smoothing Sales Series by Double Exponential Smoothing




```
MTB > %DES 'Sales';
SUBC>   Forecasts 5;
SUBC>   Title "Smoothing Sales Series by Double
                Exponential Smoothing";
SUBC>   Residuals 'RESI3'.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\DES.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Double Exponential Smoothing**

```
Data          Sales
Length      50.0000
NMissing     0
```

Smoothing Constants

Alpha (level): 0.680728

Gamma (trend): 0.019421

Accuracy Measures

MAPE: 27.1322

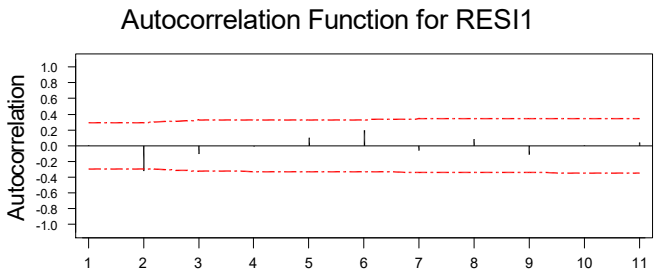
MAD: 0.9880

MSD: 1.5458

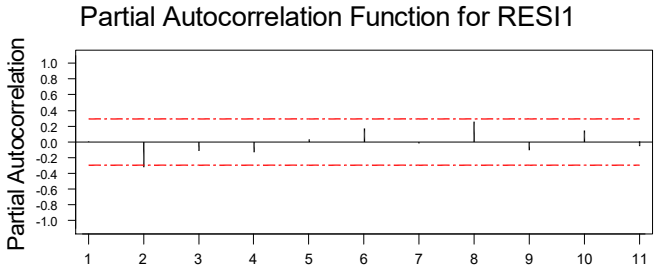
| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 6.04349 | 3.62298 | 8.4640 |
| 2 | 52 | 6.06254 | 3.04085 | 9.0842 |
| 3 | 53 | 6.08160 | 2.40519 | 9.7580 |
| 4 | 54 | 6.10065 | 1.74005 | 10.4613 |
| 5 | 55 | 6.11971 | 1.05736 | 11.1821 |

(ج) فحص البواقي:

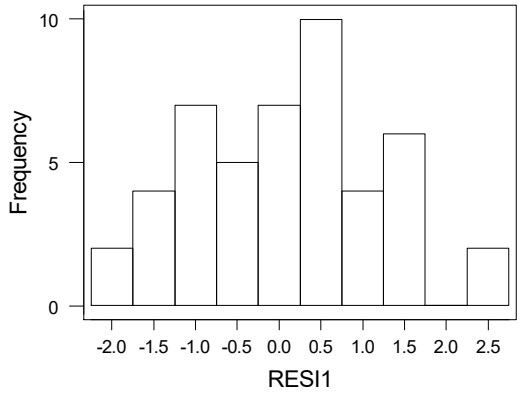
للمتوسط المتحرك

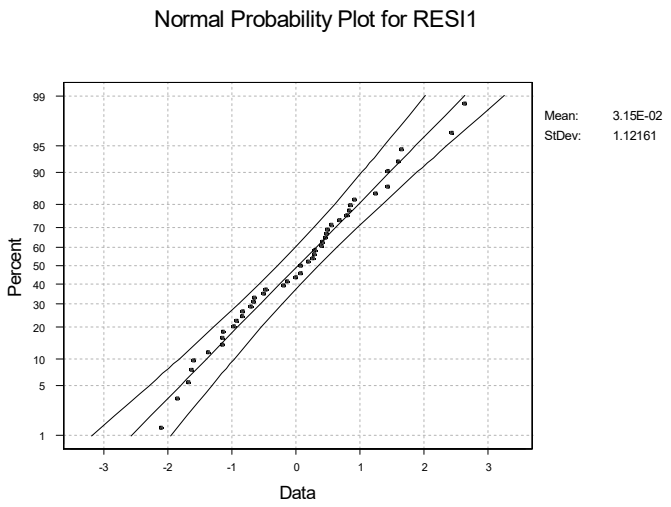



| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01 | 0.05 | 0.00 | 8 | 0.08 | 0.47 | 9.66 |
| 2 | -0.33 | -2.26 | 5.55 | 9 | -0.11 | -0.66 | 10.43 |
| 3 | -0.11 | -0.69 | 6.19 | 10 | 0.00 | 0.02 | 10.43 |
| 4 | -0.01 | -0.06 | 6.19 | 11 | 0.04 | 0.25 | 10.55 |
| 5 | 0.10 | 0.64 | 6.79 | | | | |
| 6 | 0.20 | 1.22 | 9.03 | | | | |
| 7 | -0.07 | -0.39 | 9.28 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01 | 0.05 | 8 | 0.25 | 1.74 |
| 2 | -0.33 | -2.26 | 9 | -0.11 | -0.76 |
| 3 | -0.12 | -0.81 | 10 | 0.15 | 1.01 |
| 4 | -0.14 | -0.93 | 11 | -0.06 | -0.39 |
| 5 | 0.03 | 0.19 | | | |
| 6 | 0.17 | 1.14 | | | |
| 7 | -0.02 | -0.16 | | | |





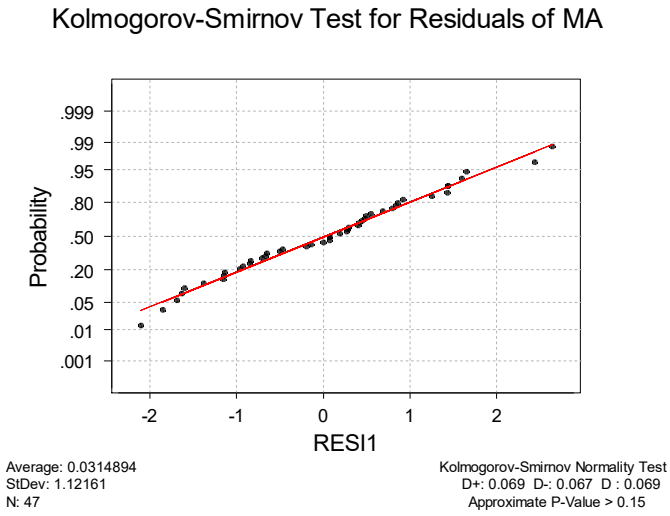

```
MTB > %Qqplot 'RESI1';
SUBC>   Table;
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

## Distribution Function Analysis

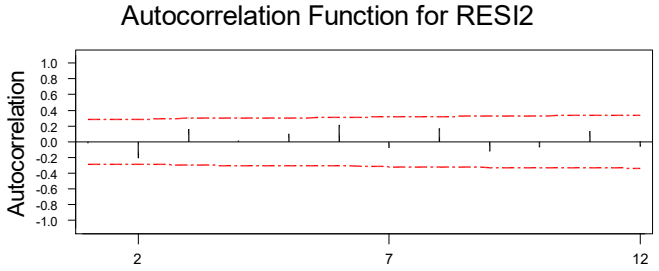
```
Normal Dist. Parameter Estimates

Data    : RESI1

Mean:     3.15E-02
StDev:    1.12161


Percentile Estimates
```

| P | Percentile | 95% CI Approximate Lower Limit | 95% CI Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -2.57777 | -3.19506 | -1.96047 |
| 0.02 | -2.27202 | -2.83741 | -1.70663 |
| 0.03 | -2.07803 | -2.61158 | -1.54447 |
| 0.04 | -1.93210 | -2.44238 | -1.42181 |
| 0.05 | -1.81339 | -2.30524 | -1.32155 |
| 0.06 | -1.71236 | -2.18891 | -1.23581 |
| 0.07 | -1.62377 | -2.08723 | -1.16032 |
| 0.08 | -1.54445 | -1.99647 | -1.09244 |
| 0.09 | -1.47231 | -1.91417 | -1.03046 |
| 0.10 | -1.40591 | -1.83864 | -0.97318 |
| 0.20 | -0.91248 | -1.28563 | -0.53934 |
| 0.30 | -0.55668 | -0.89868 | -0.21469 |
| 0.40 | -0.25267 | -0.57843 | 0.07309 |
| 0.50 | 0.03149 | -0.28917 | 0.35215 |
| 0.60 | 0.31565 | -0.01012 | 0.64141 |
| 0.70 | 0.61966 | 0.27767 | 0.96165 |
| 0.80 | 0.97546 | 0.60232 | 1.34860 |
| 0.90 | 1.46889 | 1.03616 | 1.90162 |
| 0.91 | 1.53529 | 1.09344 | 1.97715 |
| 0.92 | 1.60743 | 1.15542 | 2.05945 |
| 0.93 | 1.68675 | 1.22330 | 2.15021 |
| 0.94 | 1.77534 | 1.29879 | 2.25189 |
| 0.95 | 1.87637 | 1.38453 | 2.36822 |
| 0.96 | 1.99508 | 1.48479 | 2.50536 |
| 0.97 | 2.14101 | 1.60745 | 2.67456 |

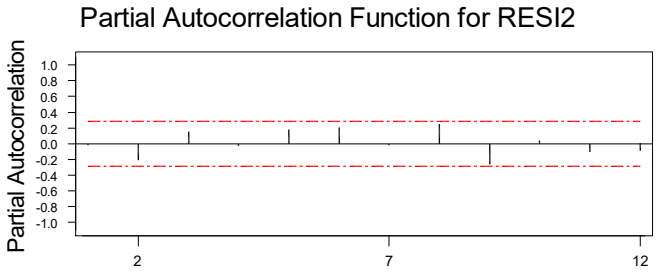
| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.98 | 2.33499 | 1.76961 | 2.90038 |
| 0.99 | 2.64074 | 2.02345 | 3.25804 |



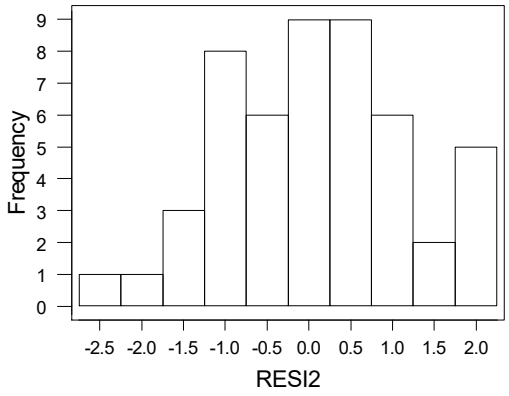

للتمهيد الأسي البسيط

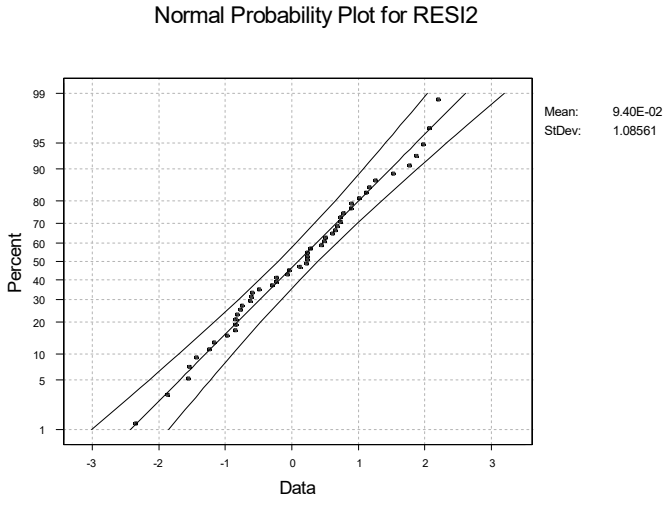



| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.02 | -0.16 | 0.03 | 8 | 0.17 | 1.05 | 9.33 |
| 2 | -0.21 | -1.51 | 2.48 | 9 | -0.13 | -0.79 | 10.37 |
| 3 | 0.16 | 1.07 | 3.87 | 10 | -0.08 | -0.47 | 10.76 |
| 4 | 0.01 | 0.07 | 3.87 | 11 | 0.13 | 0.81 | 11.95 |
| 5 | 0.10 | 0.68 | 4.47 | 12 | -0.06 | -0.38 | 12.24 |
| 6 | 0.21 | 1.40 | 7.18 | | | | |
| 7 | -0.08 | -0.53 | 7.61 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.02 | -0.16 | 8 | 0.25 | 1.76 |
| 2 | -0.21 | -1.51 | 9 | -0.27 | -1.89 |
| 3 | 0.15 | 1.09 | 10 | 0.04 | 0.26 |
| 4 | -0.03 | -0.24 | 11 | -0.11 | -0.75 |
| 5 | 0.18 | 1.28 | 12 | -0.09 | -0.62 |
| 6 | 0.20 | 1.42 | | | |
| 7 | -0.02 | -0.14 | | | |




```
MTB > %Qqplot  'RESI2';
```

```
SUBC>   Table;
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

**Distribution Function Analysis**

Normal Dist. Parameter Estimates

Data : RESI2

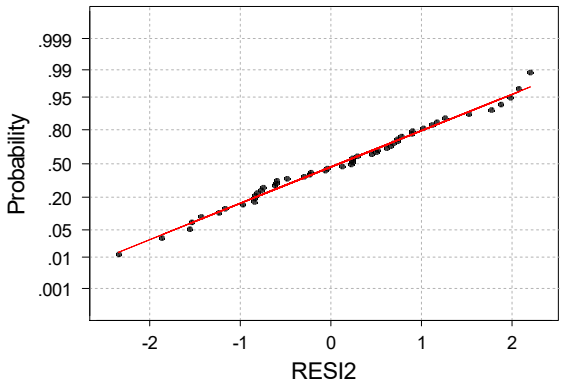
Mean: 9.40E-02
StDev: 1.08561

Percentile Estimates

| P | Percentile | 95% CI Approximate Lower Limit | 95% CI Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -2.43146 | -3.01074 | -1.85218 |
| 0.02 | -2.13552 | -2.66609 | -1.60495 |
| 0.03 | -1.94776 | -2.44846 | -1.44706 |
| 0.04 | -1.80651 | -2.28537 | -1.32766 |
| 0.05 | -1.69162 | -2.15318 | -1.23006 |
| 0.06 | -1.59383 | -2.04103 | -1.14663 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.07 | -1.50809 | -1.94300 | -1.07317 |
| 0.08 | -1.43131 | -1.85549 | -1.00713 |
| 0.09 | -1.36149 | -1.77614 | -0.94684 |
| 0.10 | -1.29722 | -1.70330 | -0.89113 |
| 0.20 | -0.81962 | -1.16979 | -0.46946 |
| 0.30 | -0.47525 | -0.79618 | -0.15431 |
| 0.40 | -0.18099 | -0.48669 | 0.12471 |
| 0.50 | 0.09405 | -0.20686 | 0.39496 |
| 0.60 | 0.36908 | 0.06338 | 0.67479 |
| 0.70 | 0.66334 | 0.34241 | 0.98427 |
| 0.80 | 1.00772 | 0.65756 | 1.35789 |
| 0.90 | 1.48531 | 1.07923 | 1.89140 |
| 0.91 | 1.54959 | 1.13494 | 1.96423 |
| 0.92 | 1.61941 | 1.19523 | 2.04359 |
| 0.93 | 1.69618 | 1.26127 | 2.13110 |
| 0.94 | 1.78193 | 1.33473 | 2.22913 |
| 0.95 | 1.87972 | 1.41816 | 2.34128 |
| 0.96 | 1.99461 | 1.51575 | 2.47347 |
| 0.97 | 2.13586 | 1.63516 | 2.63655 |
| 0.98 | 2.32362 | 1.79305 | 2.85419 |
| 0.99 | 2.61955 | 2.04028 | 3.19883 |

Kolmogorov-Smirnov Test for Residuals of SES

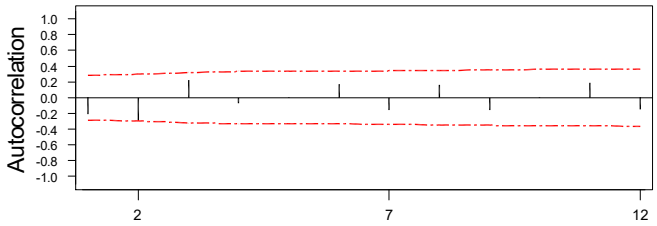



Average: 0.0940483
StDev: 1.08561
N: 50

Kolmogorov-Smirnov Normality Test
D+: 0.077 D-: 0.068 D : 0.077
Approximate P-Value > 0.15

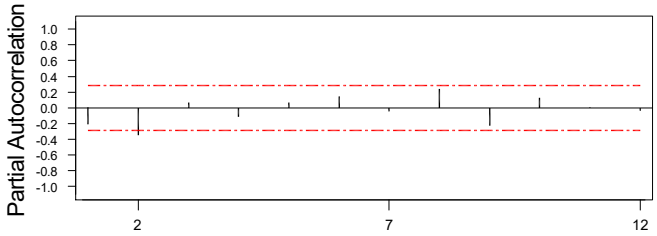
التمهيد الأسي الثنائي

Autocorrelation Function for RESI3

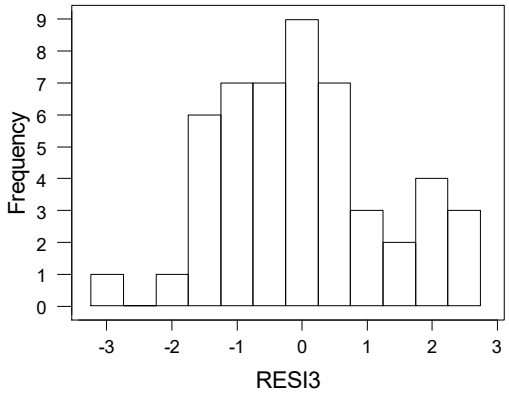


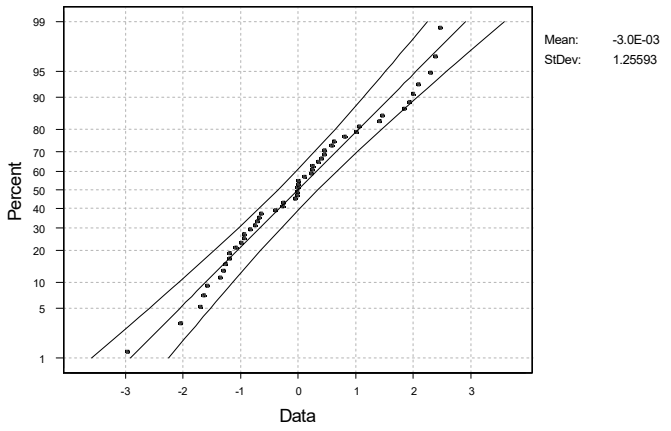

| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.22 | -1.53 | 2.50 | 8 | 0.16 | 0.96 | 15.06 |
| 2 | -0.29 | -1.98 | 7.12 | 9 | -0.16 | -0.89 | 16.62 |
| 3 | 0.22 | 1.39 | 9.81 | 10 | 0.01 | 0.04 | 16.62 |
| 4 | -0.07 | -0.43 | 10.10 | 11 | 0.19 | 1.06 | 18.99 |
| 5 | 0.00 | 0.03 | 10.10 | 12 | -0.15 | -0.82 | 20.53 |
| 6 | 0.17 | 1.03 | 11.82 | | | | |
| 7 | -0.16 | -0.95 | 13.38 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for RESI3




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.22 | -1.53 | 8 | 0.24 | 1.69 |
| 2 | -0.36 | -2.52 | 9 | -0.23 | -1.61 |
| 3 | 0.07 | 0.49 | 10 | 0.13 | 0.92 |
| 4 | -0.11 | -0.81 | 11 | 0.01 | 0.04 |
| 5 | 0.07 | 0.47 | 12 | -0.03 | -0.25 |
| 6 | 0.14 | 1.02 | | | |
| 7 | -0.05 | -0.34 | | | |




```
MTB > %Qqplot  'RESI3';
SUBC>   Table;
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

## Distribution Function Analysis

```
Normal Dist. Parameter Estimates
```

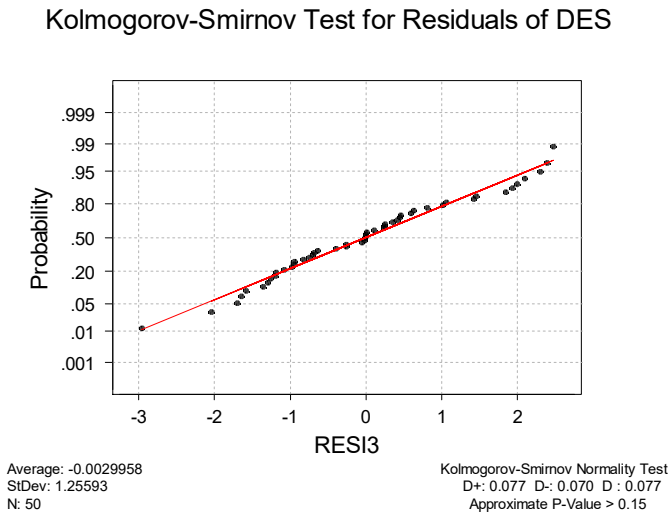
Data : RESI3

Mean: -3.0E-03
StDev: 1.25593

Percentile Estimates

| P | Percentile | 95% CI Approximate Lower Limit | 95% CI Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -2.92473 | -3.59489 | -2.25457 |
| 0.02 | -2.58237 | -3.19618 | -1.96855 |
| 0.03 | -2.36515 | -2.94440 | -1.78589 |
| 0.04 | -2.20174 | -2.75573 | -1.64775 |
| 0.05 | -2.06882 | -2.60279 | -1.53485 |
| 0.06 | -1.95569 | -2.47305 | -1.43832 |
| 0.07 | -1.85649 | -2.35964 | -1.35334 |
| 0.08 | -1.76767 | -2.25840 | -1.27694 |
| 0.09 | -1.68689 | -2.16659 | -1.20719 |
| 0.10 | -1.61254 | -2.08233 | -1.14274 |
| 0.20 | -1.06001 | -1.46512 | -0.65491 |
| 0.30 | -0.66161 | -1.03289 | -0.29032 |
| 0.40 | -0.32118 | -0.67484 | 0.03248 |
| 0.50 | -0.00300 | -0.35112 | 0.34512 |
| 0.60 | 0.31519 | -0.03847 | 0.66885 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.70 | 0.65562 | 0.28433 | 1.02690 |
| 0.80 | 1.05402 | 0.64892 | 1.45913 |
| 0.90 | 1.60655 | 1.13675 | 2.07634 |
| 0.91 | 1.68090 | 1.20120 | 2.16060 |
| 0.92 | 1.76168 | 1.27095 | 2.25241 |
| 0.93 | 1.85050 | 1.34735 | 2.35365 |
| 0.94 | 1.94969 | 1.43233 | 2.46706 |
| 0.95 | 2.06283 | 1.52886 | 2.59680 |
| 0.96 | 2.19575 | 1.64176 | 2.74973 |
| 0.97 | 2.35915 | 1.77990 | 2.93840 |
| 0.98 | 2.57637 | 1.96256 | 3.19019 |
| 0.99 | 2.91874 | 2.24858 | 3.58890 |




في كل الحالات السابقة نجد ان البواقي تحقق الفرضيات

1- غير مترابطة

2- لها تقريبا توزيع طبيعي بمتوسط صفري وتباين وحدة

(د) الجدول التالي يلخص مقاييس الدقة للأخطاء

| | MAPE | MAD | MSD |
|---|---|---|---|
| MA | 26.5366 | 0.9077 | 1.2322 |
| SES | 25.5159 | 0.9002 | 1.1638 |
| DES | 27.1322 | 0.9880 | 1.5458 |

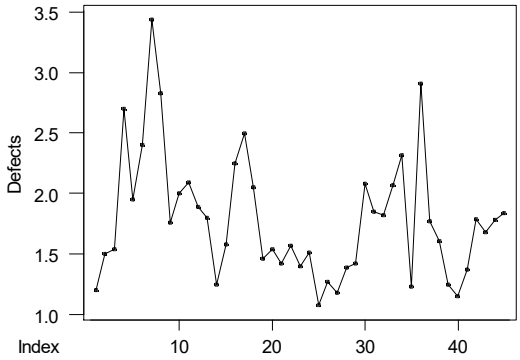
ويلاحظ أن التمهيد الأسي البسيط يعطي أفضل نتيجة.

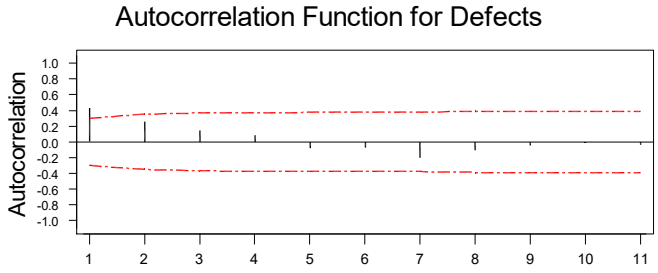
التنبؤات بإستخدام التمهيد الأسي البسيط وفترات 95% للتنبؤ

| Period of Forecast | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|
| 51 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 52 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 53 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 54 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 55 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |

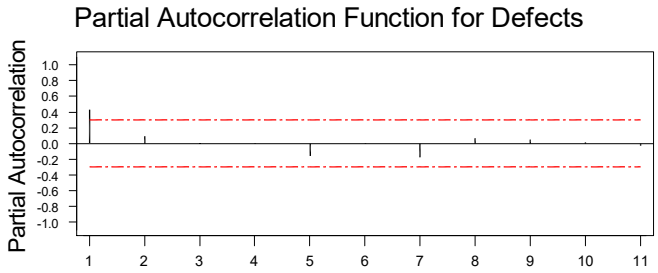
إجابة للسؤال الثالث:

(أ)




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.43 | 2.88 | 8.84 | 8 | -0.11 | -0.57 | 17.25 |
| 2 | 0.26 | 1.49 | 12.18 | 9 | -0.05 | -0.27 | 17.41 |
| 3 | 0.14 | 0.77 | 13.18 | 10 | -0.01 | -0.04 | 17.41 |
| 4 | 0.08 | 0.43 | 13.50 | 11 | -0.04 | -0.19 | 17.50 |
| 5 | -0.09 | -0.46 | 13.89 | | | | |
| 6 | -0.07 | -0.39 | 14.18 | | | | |
| 7 | -0.21 | -1.10 | 16.57 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.43 | 2.88 | 8 | 0.07 | 0.44 |
| 2 | 0.09 | 0.63 | 9 | 0.05 | 0.35 |
| 3 | -0.00 | -0.01 | 10 | 0.01 | 0.09 |
| 4 | 0.00 | 0.00 | 11 | -0.03 | -0.23 |
| 5 | -0.16 | -1.07 | | | |
| 6 | 0.00 | 0.02 | | | |
| 7 | -0.18 | -1.19 | | | |

واضح من الشكل أن SACF تتخامد أسيا و SPACF لها قطع بعد $r_{1,1}$ وهذا يقترح نموذج $ARIMA(1,0,0)$ أي أن $p=1$ و $d=0$ و $q=0$

(ج) تقدير المعالم:

```
MTB > ARIMA 1 0 0 'Defects' 'RESI1' 'FITS1';
SUBC>   Constant;
SUBC>   Forecast 5 c3 c4 c5;
SUBC>   GACF;
SUBC>   GPACF;
SUBC>   GHistogram;
SUBC>   GNormalplot;
SUBC>   GFits;
SUBC>   GOrder.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
0          11.2419    0.100    1.700
1          10.0858    0.250    1.393
2           9.5649    0.400    1.086
3           9.5316    0.436    1.006
4           9.5309    0.441    0.995
5           9.5309    0.442    0.993
6           9.5309    0.442    0.993
Relative change in each estimate less than
0.0010
```

Final Estimates of Parameters

| Type | | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|---|
| AR | 1 | 0.4421 | 0.1365 | 3.24 |
| Constant | | 0.99280 | 0.06999 | 14.19 |
| Mean | | 1.7795 | 0.1254 | |

Number of observations: 45

Residuals: SS = 9.47811 (backforecasts excluded)

MS = 0.22042 DF = 43

| Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic | | |
|---|---|---|
| Lag | 12 | 24 |
| | 36 | 48 |
| Chi-Square | 4.9(DF=11) | 8.9(DF=23) |
| | 30.9(DF=35) | * (DF= *) |

Forecasts from period 45

| | | 95 Percent Limits | |
|---|---|---|---|
| Period | Forecast | Lower | Upper |
| | | | Actual |
| 46 | 1.80627 | 0.88588 | 2.72665 |
| 47 | 1.79135 | 0.78503 | 2.79767 |
| 48 | 1.78476 | 0.76248 | 2.80703 |
| 49 | 1.78184 | 0.75648 | 2.80721 |
| 50 | 1.78055 | 0.75459 | 2.80652 |

من المخرجات السابقة نجد أن النموذج المقترح هو

$$z_t = 0.9928 - 0.4421 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, 0.22042\right)$$
$$or \quad \left(z_t - 1.7795\right) = -0.4421\left(z_{t-1} - 1.7795\right) + a_t$$

حيث

$$\hat{\phi}_1 = 0.4421, s.e\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.1365, \text{ with t-value} = 3.24$$

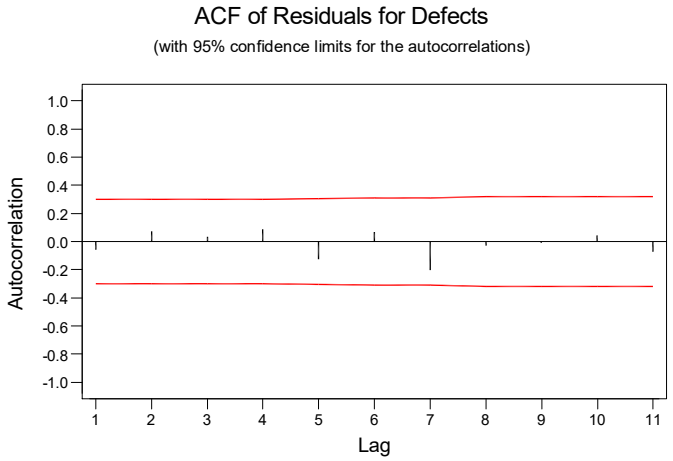
أي أن معامل الإنحدار الذاتي معنوي

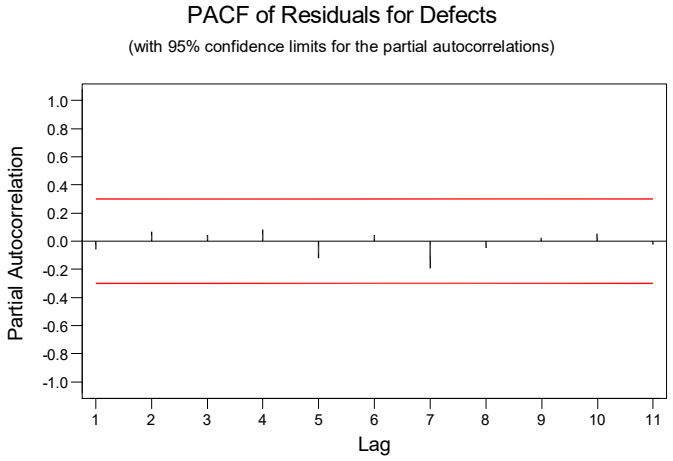
$$\hat{\delta} = 0.9928, s.e\left(\hat{\delta}\right) = 0.06999, \text{ with t-value} = 14.19$$

وأيضا المستوى $\delta$ معنوي

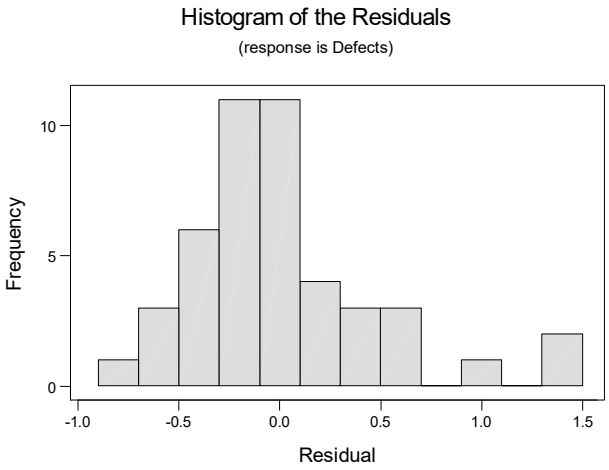
(د) فحص البواقي:

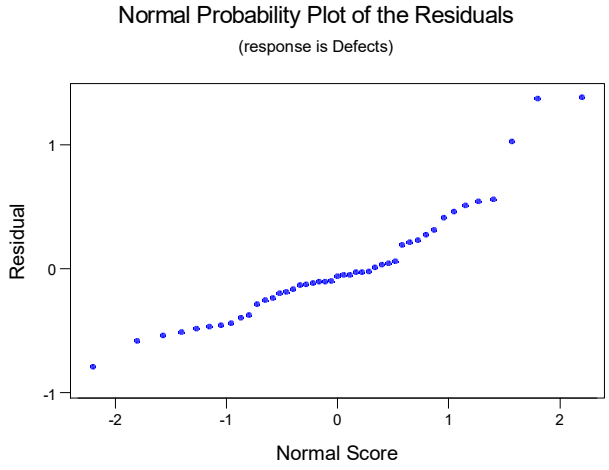
1- عدم الترابط

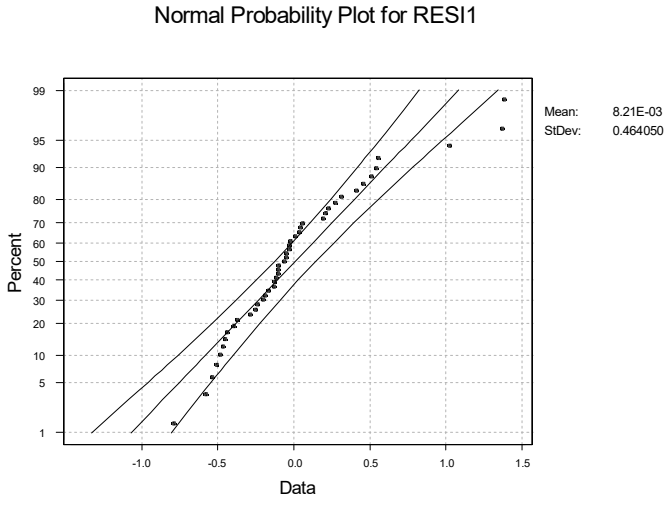



التوزيع الطبيعي:




```
MTB > %Qqplot 'RESI1';
SUBC>   Table;
```

```
                                   SUBC>   Conf 95;
                                        SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

**Distribution Function Analysis**

Normal Dist. Parameter Estimates

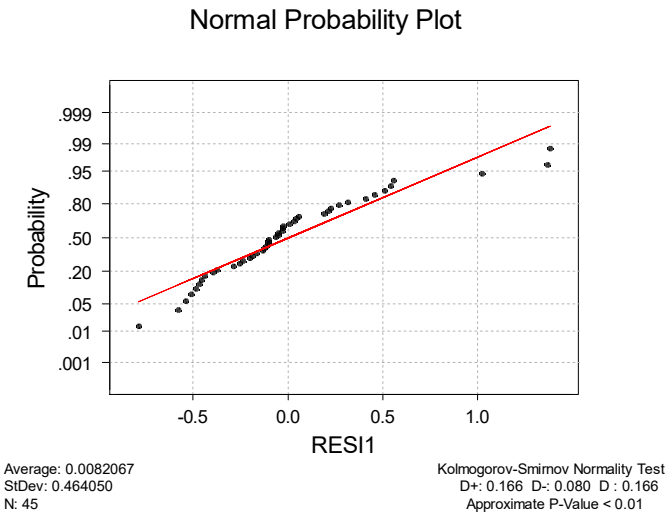
Data : RESI1

Mean: 8.21E-03
StDev: 0.464050

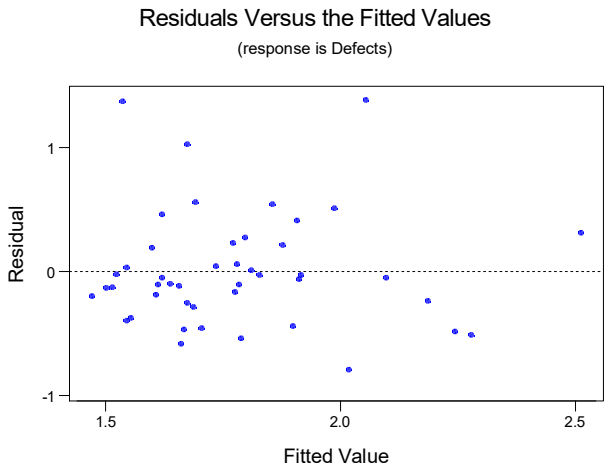
Percentile Estimates

| P | Percentile | 95% CI Approximate Lower Limit | 95% CI Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -1.07134 | -1.33235 | -0.81033 |
| 0.02 | -0.94484 | -1.18390 | -0.70577 |
| 0.03 | -0.86458 | -1.09018 | -0.63897 |
| 0.04 | -0.80420 | -1.01996 | -0.58844 |
| 0.05 | -0.75509 | -0.96306 | -0.54712 |
| 0.06 | -0.71329 | -0.91478 | -0.51179 |
| 0.07 | -0.67663 | -0.87260 | -0.48067 |

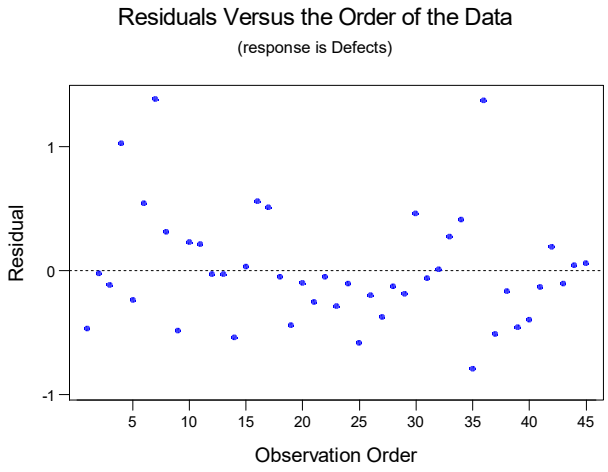
| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.08 | -0.64382 | -0.83494 | -0.45269 |
| 0.09 | -0.61397 | -0.80080 | -0.42714 |
| 0.10 | -0.58650 | -0.76947 | -0.40353 |
| 0.20 | -0.38235 | -0.54012 | -0.22457 |
| 0.30 | -0.23514 | -0.37975 | -0.09054 |
| 0.40 | -0.10936 | -0.24710 | 0.02838 |
| 0.50 | 0.00821 | -0.12738 | 0.14379 |
| 0.60 | 0.12577 | -0.01197 | 0.26351 |
| 0.70 | 0.25155 | 0.10695 | 0.39616 |
| 0.80 | 0.39876 | 0.24098 | 0.55654 |
| 0.90 | 0.60291 | 0.41994 | 0.78588 |
| 0.91 | 0.63038 | 0.44355 | 0.81721 |
| 0.92 | 0.66023 | 0.46911 | 0.85136 |
| 0.93 | 0.69305 | 0.49708 | 0.88901 |
| 0.94 | 0.72970 | 0.52820 | 0.93120 |
| 0.95 | 0.77150 | 0.56353 | 0.97947 |
| 0.96 | 0.82061 | 0.60485 | 1.03638 |
| 0.97 | 0.88099 | 0.65539 | 1.10659 |
| 0.98 | 0.96125 | 0.72219 | 1.20031 |
| 0.99 | 1.08775 | 0.82674 | 1.34876 |




نفحص أنماط البواقي مع القيم المطبقة




والبواقي مع ترتيب البيانات




من الفحوصات السابقة نستنتج أن النموذج المقترح مناسب للتطبيق علي البيانات المعطاة (هـ)

التنبؤات للخمس القيم المستقبلية وفترات تنبؤ 95% Forecasts from period 45

| Period | Forecast | 95 Percent Limits Lower | Upper |
|---|---|---|---|
| 46 | 1.80627 | 0.88588 | 2.72665 |
| 47 | 1.79135 | 0.78503 | 2.79767 |
| 48 | 1.78476 | 0.76248 | 2.80703 |
| 49 | 1.78184 | 0.75648 | 2.80721 |
| 50 | 1.78055 | 0.75459 | 2.80652 |

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الأول 1420-1421 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

ا- ضع النموذج التالي $z_{n+j} = \beta_0 + \beta_1 j + \varepsilon_{n+j}, j = 0,\pm 1,...$ علي الشكل $z_{n+j} = \mathbf{f}'(j)\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+j}, j = 0,\pm 1,...$ وذلك بتحديد كل من $\boldsymbol{\beta}$ و $\mathbf{f}'(j)$ أوجد $\mathbf{L}$ وبرهن ان $\mathbf{f}'(j+1) = \mathbf{L}\mathbf{f}'(j)$

ب- بوضع $\mathbf{y}' = (z_1,...,z_n)$ و $\mathbf{X}' = [\mathbf{f}(-n+1), \mathbf{f}(-n+2),..., \mathbf{f}(1), \mathbf{f}(0)]$ برهن ان $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{f}(-j)\mathbf{f}'(-j)$ وان $\mathbf{X}'\mathbf{y} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{f}(-j) z_{n-j}$ ومن ثم اوجد مقدر للمعلم $\boldsymbol{\beta}$

السؤال الثاني:

للمتسلسلة الزمنية التالية:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_t$ | 7 | 8 | 12 | 13 | 17 | 15 | 19 | 22 | 25 | 24 | 26 | 28 |

ا- طبق وسط متحرك من الدرجة 3 للمتسلسلة المعطاه ومن ثم اوجد متنبئات لقيم المتسلسلة $z_{13}, z_{14}$

ب- بأخذ $\alpha = 0.5$ طبق تمهيد اسي بسيط للمتسلسلة المعطاه ومن ثم اوجد متنبئات لقيم المتسلسلة $z_{13}, z_{14}$

السؤال الثالث:

للنموذج التالي $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t$ حيث $0 < \delta < \infty$ مقدار ثابت و $|\phi_1| < 1$ و $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$

ا- اوجد دالة الترابط الذاتي $\rho_k, \forall k$ وارسمها لقيم $k = 0,1,...,5$

ب- اوجد دالة الترابط الذاتي الجزئي $\phi_{k,k}, \forall k$ و وارسمها لقيم $k = 0,1,...,5$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود – كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

إختبار أعمال فصل أول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي

الزمن: 2 ساعة

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$z = \beta_0 + \beta_1 t + x_t$$
$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t,\ a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

على إفتراض أن المعالم $\beta_0, \beta_1, \phi_1, \sigma^2$ معلومة.

برهن أن المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى بالعلاقة

$$z_t(\ell) = \beta_0 + \beta_1(t+\ell) + \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right), \quad \ell \geq 0$$

السؤال الثاني:

إعتمادا على متسلسلة طولها $n = 200$ مشاهدة طبق نموذج $AR(2)$ وحصلنا على الترابطات الذاتية للبواقي التالية $r_1 = 0.13, r_2 = 0.13, r_3 = 0.12$ إذا كانت $\hat{\phi}_1 = 1.1, \hat{\phi}_2 = -0.8$

فهل الترابطات الذاتية للبواقي تدعم أن النموذج هو $AR(2)$ كل على حدة أو مجتمعة؟

السؤال الثالث:

للمتسلسلة المستقرة التالية $6, 5, 4, 6, 4$ قدر $\mu, \gamma_0, \rho_1$

السؤال الرابع:

لمتسلسة زمنية طولها $n = 100$ مشاهدة حسبت الكميات التالية

$$r_1 = 0.8, r_2 = 0.5, r_3 = 0.4, \overline{z} = 2, s^2 = 5$$

إذا افترض ان المشاهدات من نموذج $AR(2)$ على الشكل

$$z = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t, a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

أوجد مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1, \phi_2, \delta, \sigma^2$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود – كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

الإختبار النهائي للفصل الأول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي)

الزمن: **3** ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$z = \beta_0 + \beta_1 t + x_t$$
$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t,\ a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

على إفتراض أن المعالم $\beta_0, \beta_1, \phi_1, \sigma^2$ معلومة.

برهن أن المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى بالعلاقة

$$z_t(\ell) = \beta_0 + \beta_1(t+\ell) + \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right), \quad \ell \geq 0$$

السؤال الثاني:

إعتمادا على متسلسلة طولها $n = 200$ مشاهدة طبق نموذج $AR(2)$ وحصلنا على الترابطات الذاتية للبواقي التالية $r_1 = 0.13, r_2 = 0.13, r_3 = 0.12$ إذا كانت $\hat{\phi}_1 = 1.1, \hat{\phi}_2 = -0.8$

فهل الترابطات الذاتية للبواقي تدعم أن النموذج هو $AR(2)$ كل على حدة أو مجتمعة؟

السؤال الثالث:

للمتسلسلة المستقرة التالية $6, 5, 4, 6, 4$ قدر $\mu, \gamma_0, \rho_1$

السؤال الرابع:

لمتسلسة زمنية طولها $n = 100$ مشاهدة حسبت الكميات التالية

$r_1 = 0.8, r_2 = 0.5, r_3 = 0.4, \overline{z} = 2, s^2 = 5$

إذا افترض ان المشاهدات من نموذج $AR(2)$ على الشكل

$z = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t, a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$

أوجد مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1, \phi_2, \delta, \sigma^2$

السؤال الخامس:

وجد أن المبيعات السنوية بملايين الريالات لشركة ما تتبع النموذج

$z_t = 5 + 1.1 z_{t-1} - 0.5 z_{t-2} + a_t, a_t \sim WN(0,2)$

إذا كانت المبيعات للسنوات 1419 و 1420 و 1421 هـ هي على التوالي 10 و 11 و 9 ملايين ريال

1- أوجد تنبؤات لمبيعات 1422 و 1423 و 1424 هـ

2- أحسب الأوزان $\psi_j, j = 1,2,3,4.$

ج) أحسب فترات تنبؤ 95% للمبيعات للسنوات 1422 و 1423 و 1424 هـ.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود – كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

الإختبار النهائي للفصل الأول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي)

الزمن: **3** ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 t + x_t$$
$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t,\ a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

على إفتراض أن المعالم $\beta_0, \beta_1, \phi_1, \sigma^2$ معلومة.

برهن أن المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى بالعلاقة

$$z_t(\ell) = \beta_0 + \beta_1(t+\ell) + \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right), \quad \ell \geq 0$$

السؤال الثاني:

إعتمادا على متسلسلة طولها $n = 200$ مشاهدة طبق نموذج $AR(2)$ وحصلنا على الترابطات الذاتية للبواقي التالية $r_1 = 0.13, r_2 = 0.13, r_3 = 0.12$ إذا كانت $\hat{\phi}_1 = 1.1, \hat{\phi}_2 = -0.8$

فهل الترابطات الذاتية للبواقي تدعم أن النموذج هو $AR(2)$ كل على حدة أو مجتمعة؟

السؤال الثالث:

لمتسلسلة زمنية طولها $n = 100$ مشاهدة حسبت الكميات التالية

$$r_1 = 0.8, r_2 = 0.5, r_3 = 0.4, \overline{z} = 2, s^2 = 5$$

إذا افترض ان المشاهدات من نموذج $AR(2)$ على الشكل

$$z = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t,\ a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

أوجد مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1, \phi_2, \delta, \sigma^2$

<u>السؤال الرابع:</u>

وجد أن المبيعات السنوية بملايين الريالات لشركة ما تتبع النموذج

$$z_t = 5 + 1.1 z_{t-1} - 0.5 z_{t-2} + a_t,\ a_t \sim WN\,(0,2)$$

إذا كانت المبيعات للسنوات 1419 و 1420 و 1421 هـ هي على التوالي 10 و 11 و 9 ملايين ريال

3- أوجد تنبؤات لمبيعات 1422 و 1423 و 1424 هـ

4- أحسب الأوزان $\psi_j, j = 1,2,3,4.$

ج) أحسب فترات تنبؤ 95% للمبيعات للسنوات 1422 و 1423 و 1424 هـ.

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات نموذجية للإختبار النهائي للفصل الأول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي )

إجابة للسؤال الأول:

نضع المعادلات المعرفة للنموذج على الشكل

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi_1 x_{t-1} + a_t,\ a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى من العلاقة

$$z_t(\ell) = E\left(z_{t+\ell} \mid z_t, z_{t-1},\ldots\right),\ \ell \geq 0$$

$$\because x_t = z_t - \beta_0 - \beta_1 t$$

$$\therefore z_t - \beta_0 - \beta_1 t = \phi_1\left[z_{t-1} - \beta_0 - \beta_1(t-1)\right] + a_t,\ a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

$$z_t(\ell) - \beta_0 - \beta_1(t+\ell) = E\left[\left(\phi_1\left[z_{t+\ell-1} - \beta_0 - \beta_1(t+\ell-1)\right] + a_{t+\ell}\right) \mid z_t, z_{t-1},\ldots\right],\ \ell \geq 0$$

$$= E\left(\phi_1\left[z_{t+\ell-1} - \beta_0 - \beta_1(t+\ell-1)\right] \mid z_t, z_{t-1},\ldots\right) + E\left(a_{t+\ell} \mid z_t, z_{t-1},\ldots\right),\ \ell \geq 0$$

$$\ell = 1 : z_t(1) - \beta_0 - \beta_1(t+1) = E\left(\phi_1\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right) \mid z_t, z_{t-1},\ldots\right) + 0$$

$$= \phi_1\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

$$\ell = 2 : z_t(2) - \beta_0 - \beta_1(t+2) = \phi_1\left[z_t(1) - \beta_0 - \beta_1(t+1)\right] = \phi_1^2\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

$$\ell = 3 : z_t(3) - \beta_0 - \beta_1(t+3) = \phi_1\left[z_t(2) - \beta_0 - \beta_1(t+2)\right] = \phi_1^3\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

$$\ell = 4 : z_t(4) - \beta_0 - \beta_1(t+4) = \phi_1\left[z_t(3) - \beta_0 - \beta_1(t+3)\right] = \phi_1^4\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

وهكذا بشكل عام

$$z_t(\ell) - \beta_0 - \beta_1(t+\ell) = \phi_1\left[z_t(\ell-1) - \beta_0 - \beta_1(t+\ell-1)\right] = \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

أو بعد ترتيب الحدود

$$z_t(\ell) = \beta_0 + \beta_1(t+\ell) + \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right),\ \ell \geq 0$$

وهو المطلوب.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

مادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي )

الإختبار النهائي للفصل الثاني 1423/1422 هـ

الزمن 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$z_t = 200 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t + 0.5a_{t-1},\ a_t \sim N(0,1)$$

1- أوجد دالة الترابط الذاتي $\rho_k$ لقيم $k = 1,2,...,5$ وارسمها.

2- أوجد دالة الترابط الذاتي الجزئي $\phi_{kk}$ لقيم $k = 1,2,...,5$ وارسمها.

3- أوجد دالة الأوزان $\psi_j$ لقيم $j = 1,2,...,5$ وارسمها.

4- أوجد دالة التنبؤ $z_n(\ell),\ \ell \geq 0$ .

السؤال الثاني:

المشاهدات التالية لمتسلسلة زمنية: ( إقرأ من اليسار سطرا بسطر )

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **201** | **202** | **203** | **202** | **200** | **198** | **197** | **197** |
| | | | | **198** | **200** | **201** | **199** |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 196 | 193 | 195 | 197 | 199 | 201 | 201 | 201 |
| | | | | 203 | 203 | 200 | 197 |
| 194 | 195 | 197 | 201 | 204 | 204 | 202 | 200 |
| | | | | 201 | 200 | 198 | 198 |
| 198 | 198 | 196 | 193 | 194 | 199 | 204 | 206 |
| | | | | 206 | 203 | 200 | 200 |
| 202 | 204 | 206 | 205 | 202 | 198 | 199 | 201 |
| | | | | 201 | 201 | 204 | 205 |
| | | | | 205 | 201 | 198 | 197 |

ادخل المشاهدات في برنامج MINITAB وأجب على التالي:

1- تعرف على نموذج مناسب من عائلة ARIMA يطبق على المشاهدات وذلك بإستخدام معيار المعلومات الذاتي $AIC$ والذي يعطى بالعلاقة: $AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$

2- للنموذج المقترح قم بفحص البواقي مجريا عليها جميع الإختبارات المناسبة.

3- من النموذج المقترح ولد تنبؤات للقيم المستقبلية حتى 8 أزمنة تقدم مع فترات تنبؤ 95% .

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات محتملة للإختبار النهائي للفصل الثاني 1423/1422 هـ

مادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي )

إجابة للسؤال الأول:

نضع النموذج $z_t = 200 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t + 0.5a_{t-1}, a_t \sim N(0,1)$ على شكل إنحرافات عن المتوسط $\mu = \frac{\delta}{(1-\phi_1-\phi_2)} = \frac{200}{1+0.7-1.2} = 400$ اي

$$z_t - 400 = 1.2(z_{t-1} - 400) - 0.7(z_{t-2} - 400) + a_t + 0.5a_{t-1}, a_t \sim N(0,1)$$

1- نوجد $\rho_k$ كالتالي:

$$E\{(z_t - 400)(z_{t-k} - 400)\} - 1.2E\{(z_{t-1} - 400)(z_{t-k} - 400)\} + 0.7E\{(z_{t-2} - 400)(z_{t-k} - 400)\} = E\{a_t(z_{t-k} - 400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-k} - 400)\}$$

$$\gamma_k - 1.2\gamma_{k-1} + 0.7\gamma_{k-2} = E\{a_t(z_{t-k} - 400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-k} - 400)\}$$

$$k = 0: \gamma_0 - 1.2\gamma_1 + 0.7\gamma_2 = E\{a_t(z_t - 400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_t - 400)\}$$

$$= \sigma^2 + 0.5(0.7\sigma^2) = 1.35\sigma^2$$

$$k = 1: \gamma_1 - 1.2\gamma_0 + 0.7\gamma_1 = E\{a_t(z_{t-1} - 400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-1} - 400)\}$$
$$= 0.5\sigma^2$$

$$k = 2: \gamma_2 - 1.2\gamma_1 + 0.7\gamma_0 = E\{a_t(z_{t-2} - 400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-2} - 400)\}$$
$$= 0$$

$$k \geq 2: \gamma_k - 1.2\gamma_{k-1} + 0.7\gamma_{k-2} = 0$$

من العلاقات السابقة نجد ان (بوضع $\sigma^2 = 1$)

$$\rho_1 = 0.74436$$

ومن العلاقة الأخيرة وبالقسمة على $\gamma_0$ نجد

$$\gamma_k = 1.2\gamma_{k-1} - 0.7\gamma_{k-2}, k = 2,3,...$$
$$\rho_k = 1.2\rho_{k-1} - 0.7\rho_{k-2}, k = 2,3,...$$

$$\therefore \rho_2 = 1.2\rho_1 - 0.7\rho_0 = 1.2(0.74436) - 0.7(1) = 0.193232$$

$\rho_3 = 1.2\rho_2 - 0.7\rho_1 = -0.289173$

$\rho_4 = -0.482271$

$\rho_5 = -0.376304$

$\rho_6 = -0.113975$

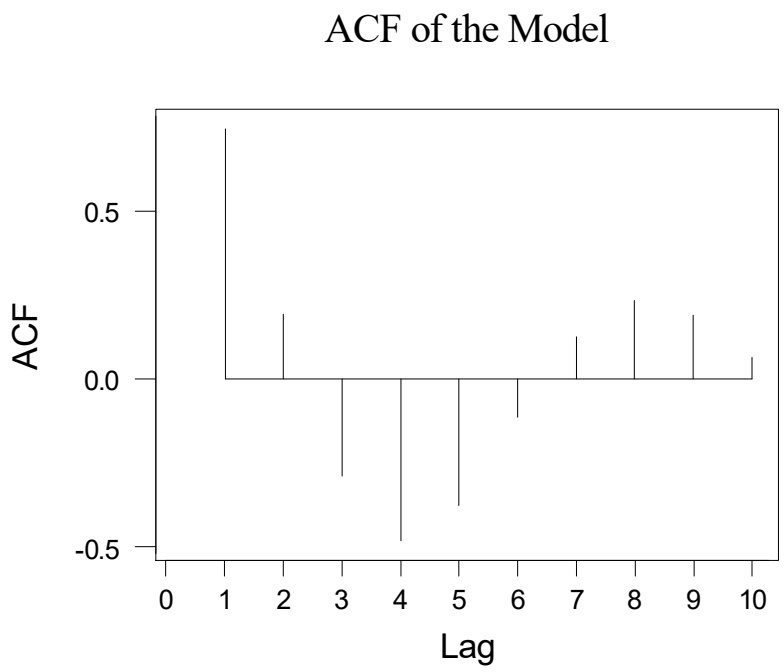
$\rho_7 = 0.126642$

$\rho_8 = 0.231754$

$\rho_9 = 0.189455$

$\rho_{10} = 0.651180$

وترسم كالتالي:




2- نوجد $\phi_{kk}$

$\phi_{00} = 1$, *by definition*

$\phi_{11} = \rho_1 = 0.744361$, *by definition*

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_j}, \quad k = 2,3,...$$

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,k-1}, \quad j = 1,2,...,k-1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \phi_{11}\rho_1}{1 - \phi_{11}\rho_1} = \frac{0.193233 - (0.744361)(0.744361)}{1 - (0.744361)(0.744361)} = \frac{-0.3608402}{0.4459268} = -0.8091915$$

$\phi_{33} = 0.343852$

$\phi_{44} = -0.165706$

$\phi_{55} = 0.821095$

$\phi_{66} = -0.409620$

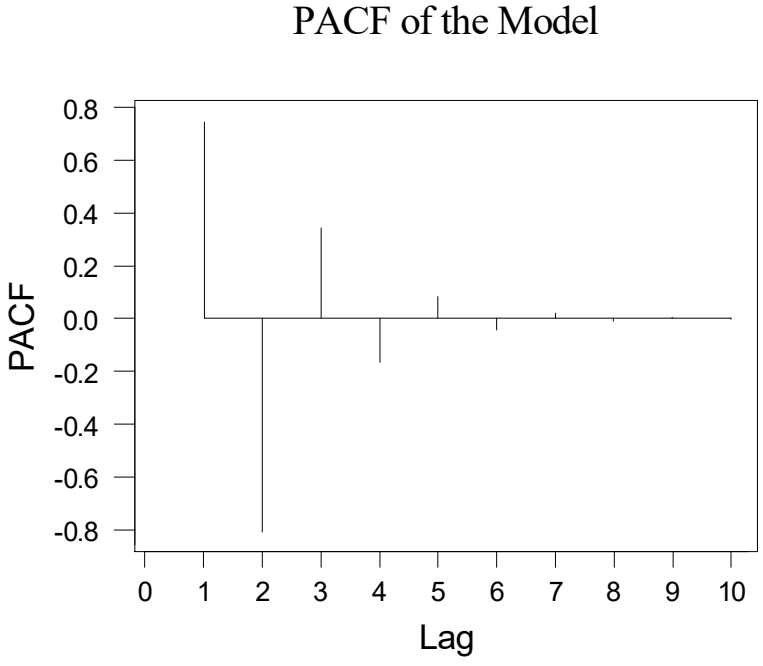
$\phi_{77} = 0.204689$

$\phi_{88} = -0.102327$

$\phi_{99} = 0.511617$

$\phi_{10,10} = -0.255822$

ونرسمها كالتالي:




3- دالة الأوزان $\psi_j$

نضع النموذج على الشكل:

$$z_t = 200 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t + 0.5a_{t-1}$$
$$z_t - 1.2z_{t-1} + 0.7z_{t-2} = 200 + a_t + 0.5a_{t-1}$$
$$\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right) z_t = 200 + \left(1 + 0.5B\right) a_t$$
$$z_t = \frac{200}{1 - 1.2 + 0.7} + \frac{\left(1 + 0.5B\right)}{\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right)} a_t$$
$$= 400 + \psi\left(B\right) a_t$$

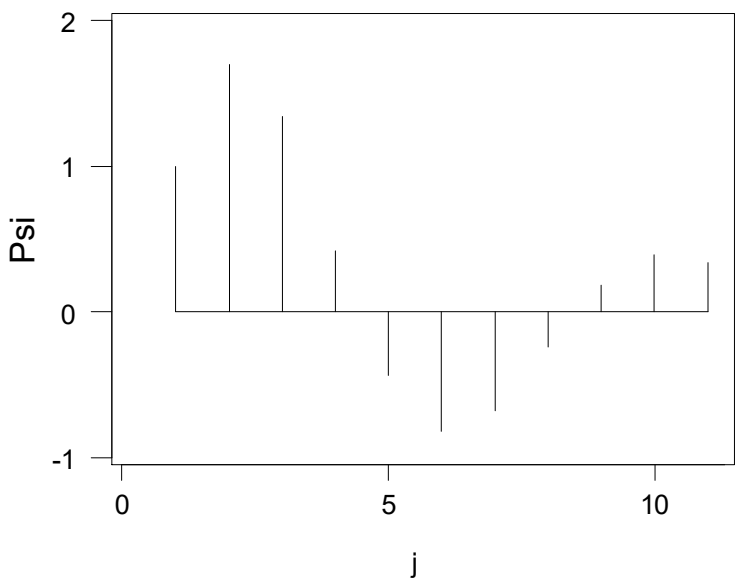
دالة الأوزان هي:

$$\psi\left(B\right) = \frac{\left(1 - 0.5B\right)}{\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots$$

نوجد الأوزان كالتالي:

$$\left(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots\right)\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right) \equiv \left(1 + 0.5B\right)$$
$$B : \psi_1 - 1.2 = 0.5 \Rightarrow \psi_1 = 1.7$$
$$B^2 : \psi_2 - 1.2\psi_1 + 0.7 = 0 \Rightarrow \psi_2 = 1.2\psi_1 - 0.7 = 1.34$$
$$B^3 : \psi_3 - 1.2\psi_2 + 0.7\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_3 = 1.2\psi_2 - 0.7\psi_1 = 0.418$$
$$\vdots$$
$$B^j : \psi_j = 1.2\psi_{j-1} - 0.7\psi_{j-2}$$
$$\psi_4 = 1.2\psi_3 - 0.7\psi_2 = \text{-}0.4364$$
$$\psi_5 = \text{-}0.81628$$
$$\psi_6 = \text{-}0.674056$$
$$\psi_7 = \text{-}0.237471$$
$$\psi_8 = 0.186874$$
$$\psi_9 = 0.390478$$
$$\psi_{10} = 0.337762$$

ولها الشكل التالي:




4- دالة التنبؤ $z_n(\ell), \ell \geq 0$ تعطى بالعلاقة:

$$z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1$$

مع

$$E\left(a_{n+j} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) = \begin{cases} a_{n+j}, & j \leq 0 \\ 0, & j > 0 \end{cases}$$

$$E\left(z_{n+j} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) = \begin{cases} z_{n+j}, & j \leq 0 \\ z_n(j), & j > 0 \end{cases}$$

إذا:

$$\begin{aligned} z_n(\ell) &= E\left(z_{n+\ell} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \\ &= E\left(200 + 1.2z_{n+\ell-1} - 0.7z_{n+\ell-2} + a_{n+\ell} + 0.5a_{n+\ell-1} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \\ &= 200 + 1.2E\left(z_{n+\ell-1} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - 0.7E\left(z_{n+\ell-2} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) \\ &\quad + E\left(a_{n+\ell} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + 0.5E\left(a_{n+\ell-1} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \end{aligned}$$

$$\ell = 1 : z_n(1) = 200 + 1.2z_n - 0.7z_{n-1} + 0.5a_n$$

$$\ell = 2 : z_n(2) = 200 + 1.2z_n(1) - 0.7z_n$$

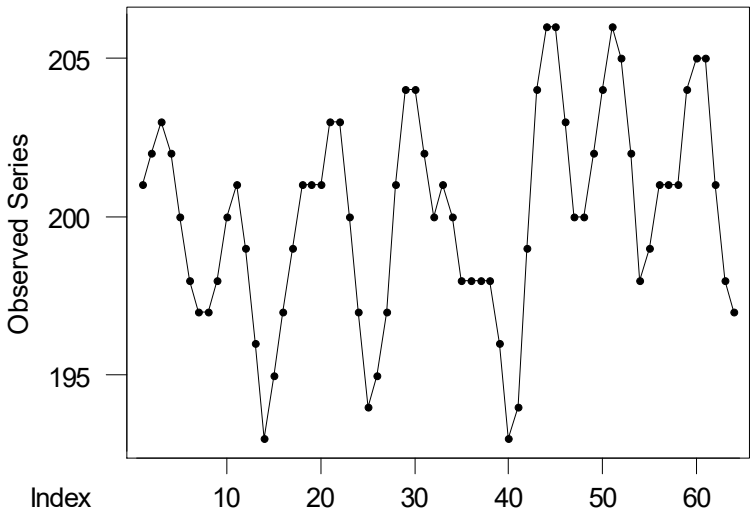
$$\ell \geq 3 : z_n(\ell) = 200 + 1.2z_n(\ell - 1) - 0.7z_n(\ell - 2)$$

وبشكل دالة:

$$z_n(\ell)=\begin{cases}200+1.2z_n-0.7z_{n-1}+0.5a_n, & \ell=1\\ 200+1.2z_n(1)-0.7z_n, & \ell=2\\ 200+1.2z_n(\ell-1)-0.7z_n(\ell-2), & \ell\geq 3\end{cases}$$

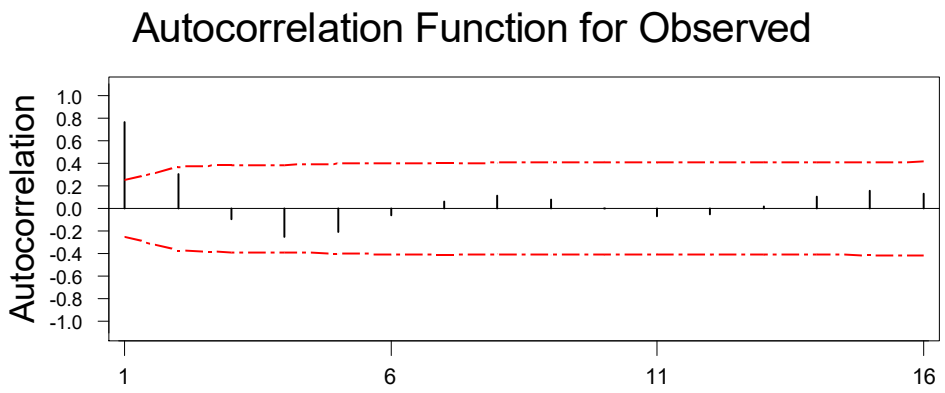
إجابة للسؤال الثاني:

نرسم المتسلسلة

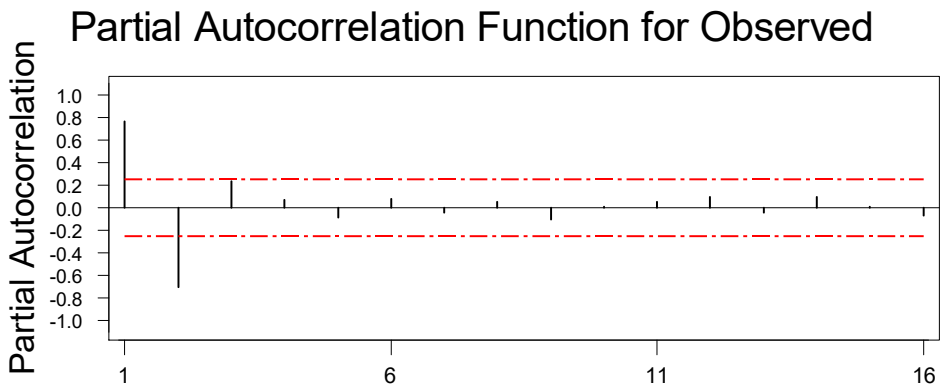



يبدو انها مستقرة في التوقع والتباين

نرسم كلا من دالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.77 | 6.18 | 39.96 | 8 | 0.11 | 0.55 | 56.38 | 15 | 0.16 | 0.75 | 60.52 |
| 2 | 0.31 | 1.67 | 46.47 | 9 | 0.08 | 0.38 | 56.84 | 16 | 0.13 | 0.63 | 62.00 |
| 3 | -0.09 | -0.48 | 47.06 | 10 | -0.00 | -0.01 | 56.84 | | | | |
| 4 | -0.26 | -1.33 | 51.72 | 11 | -0.07 | -0.33 | 57.21 | | | | |
| 5 | -0.21 | -1.06 | 54.89 | 12 | -0.06 | -0.27 | 57.47 | | | | |
| 6 | -0.06 | -0.32 | 55.19 | 13 | 0.02 | 0.08 | 57.49 | | | | |
| 7 | 0.06 | 0.29 | 55.45 | 14 | 0.11 | 0.52 | 58.44 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.77 | 6.18 | 8 | 0.05 | 0.44 | 15 | 0.01 | 0.04 |
| 2 | -0.71 | -5.68 | 9 | -0.11 | -0.87 | 16 | -0.07 | -0.56 |
| 3 | 0.24 | 1.91 | 10 | 0.01 | 0.06 | | | |
| 4 | 0.07 | 0.56 | 11 | 0.05 | 0.42 | | | |
| 5 | -0.08 | -0.67 | 12 | 0.10 | 0.77 | | | |
| 6 | 0.08 | 0.62 | 13 | -0.04 | -0.35 | | | |
| 7 | -0.04 | -0.34 | 14 | 0.09 | 0.74 | | | |

كلا من الدالتين تبين ان المتسلسلة مستقرة وهي على الشكل $ARMA(p,q)$ نطبق مجموعة من النماذج لقيم

$q=0,1,2$ $p=0,1,2$ ونأخذ اقل قيمة للمعيار $AIC(m)=n\ln\sigma_a^2+2m$ كالتالي:

1- $ARMA(1,0)$

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 0.7841 | 0.0803 | 9.77 |
| Constant | 43.1776 | 0.2587 | 166.90 |
| Mean | 199.954 | | 1.198 |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 264.844 (backforecasts excluded)

MS = 4.272 DF = 62

$= 64 \ln(4.272)+2(3) = 64(1.452)+6 = 98.928$ $AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$

2- $ARMA(2,0)$

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 1.3568 | 0.0870 | 15.60 |
| AR 2 | -0.7422 | 0.0872 | -8.51 |
| Constant | 77.0740 | 0.1768 | 435.96 |
| Mean | 200.013 | | 0.459 |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 121.868 (backforecasts excluded)

MS = 1.998 DF = 61

$= 64 \ln(1.998)+2(4) = 64(0.692)+8 = 52.288$ $AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$

3- $ARMA(0,1)$

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| MA 1 | -0.8772 | 0.0775 | -11.32 |
| Constant | 200.032 | 0.464 | 430.96 |
| Mean | 200.032 | | 0.464 |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 252.640 (backforecasts excluded)

MS = 4.075 DF = 62

$= 64\ln(4.075) + 2(3) = 64(1.40487) + 6 = 95.912$ $AIC(m) = n\ln\sigma_a^2 + 2m$

4- $ARMA(0,2)$

| Type | | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|---|
| MA | 1 | -1.3321 | 0.1042 | -12.78 |
| MA | 2 | -0.6491 | 0.1032 | -6.29 |
| Constant | | 200.038 | 0.580 | 344.69 |
| Mean | | 200.038 | 0.580 | |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 149.291 (backforecasts excluded)

MS = 2.447 DF = 61

$= 64\ln(2.447) + 2(4) = 64(0.89486) + 8 = 65.271$ $AIC(m) = n\ln\sigma_a^2 + 2m$

5- $ARMA(1,1)$

| Type | | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|---|
| AR | 1 | 0.6823 | 0.1023 | 6.67 |
| MA | 1 | -0.6832 | 0.1054 | -6.48 |
| Constant | | 63.5287 | 0.3342 | 190.09 |
| Mean | | 199.954 | 1.052 | |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 153.610 (backforecasts excluded)

MS = 2.518 DF = 61

$= 64 \ln(2.518) + 2(4) = 64(0.92346) + 8 = 67.101$ $AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$

6- $ARMA(2,1)$

Model cannot be estimated with these data

7- $ARMA(1,2)$

| Type | | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|---|
| AR | 1 | 0.5112 | 0.1492 | 3.43 |
| MA | 1 | -1.0134 | 0.1518 | -6.68 |
| MA | 2 | -0.4821 | 0.1482 | -3.25 |
| Constant | | 97.7668 | 0.4536 | 215.55 |
| Mean | | 200.014 | | 0.928 |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 126.688 (backforecasts excluded)

MS = 2.111 DF = 60

$= 64 \ln(2.111) + 2(5) = 64(0.74716) + 10 =$ $AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$

57.818

8- $ARMA(2,2)$

| Type | | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|---|
| AR | 1 | 1.1047 | 0.2011 | 5.49 |
| AR | 2 | -0.5789 | 0.1608 | -3.60 |
| MA | 1 | -0.4394 | 0.2275 | -1.93 |
| MA | 2 | -0.1918 | 0.1973 | -0.97 |
| Constant | | 94.8688 | 0.2824 | 335.90 |
| Mean | | 200.041 | | 0.596 |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 113.051 (backforecasts excluded)

MS = 1.916 DF = 59

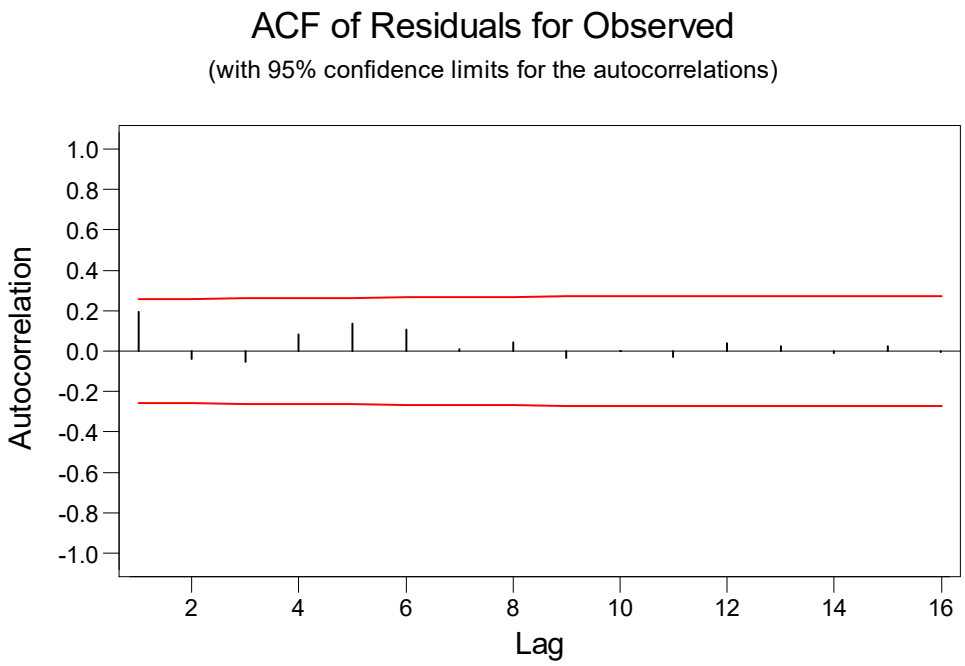
$= 64 \ln(1.916) + 2(6) = 64(0.65) + 12 = 53.6$ $AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$

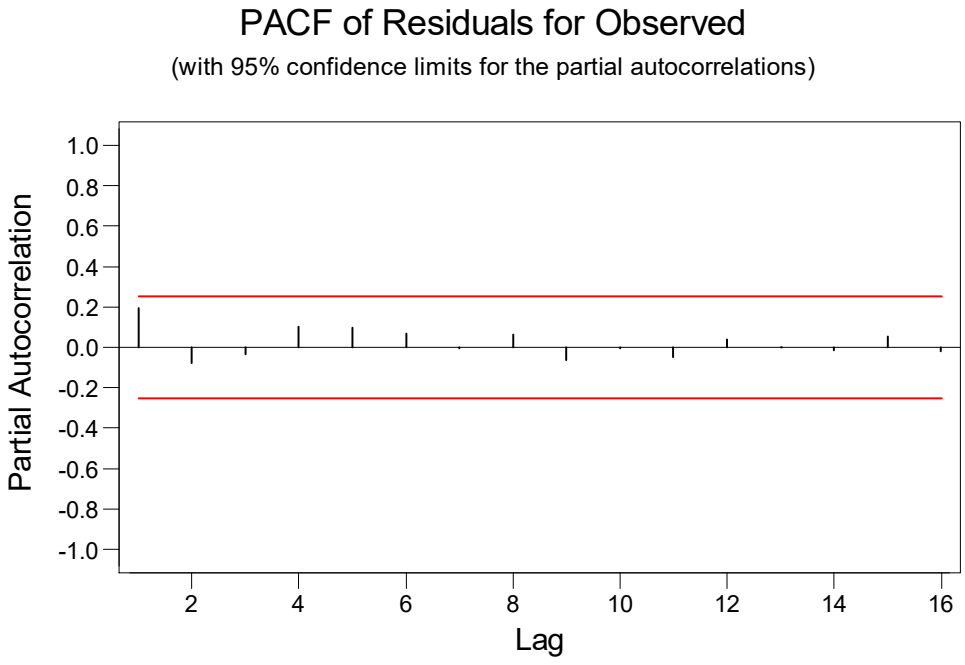
ونلخصها في الجدول التالي:

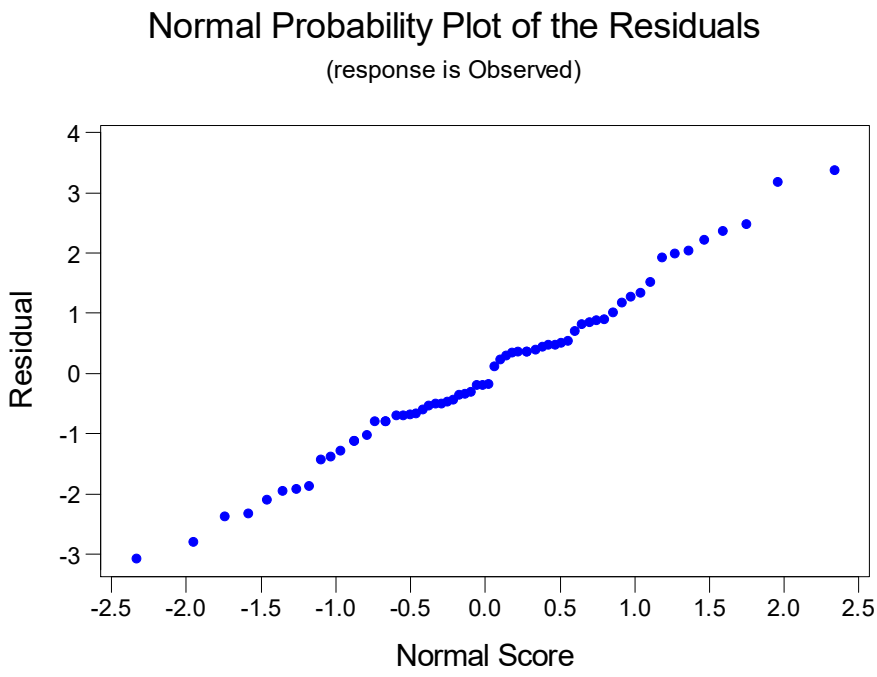
| $ARMA(p,q)$ | $AIC(m)$ | $\min AIC(m)$ |
|---|---|---|
| $ARMA(0,0)$ | NA | |
| $ARMA(1,0)$ | 98.928 | |
| $ARMA(2,0)$ | 52.288 | * |
| $ARMA(0,1)$ | 95.912 | |
| $ARMA(0,2)$ | 65.271 | |
| $ARMA(1,1)$ | 67.101 | |
| $ARMA(2,1)$ | NA | |
| $ARMA(1,2)$ | 57.818 | |
| $ARMA(2,2)$ | 53.6 | |

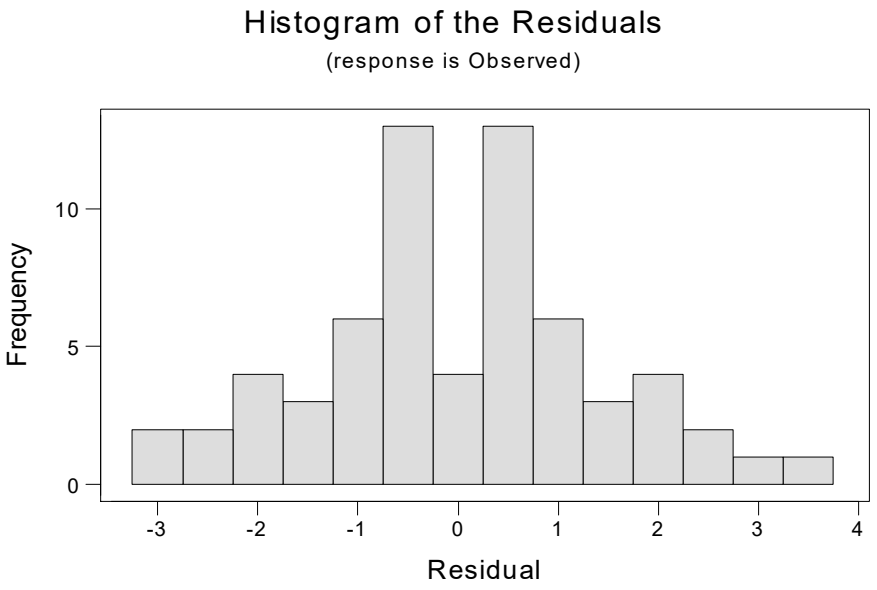
نلاحظ ان أقل قيمة لمعيار المعلومات الذاتي $AIC$ للنموذج $ARMA(2,0)$

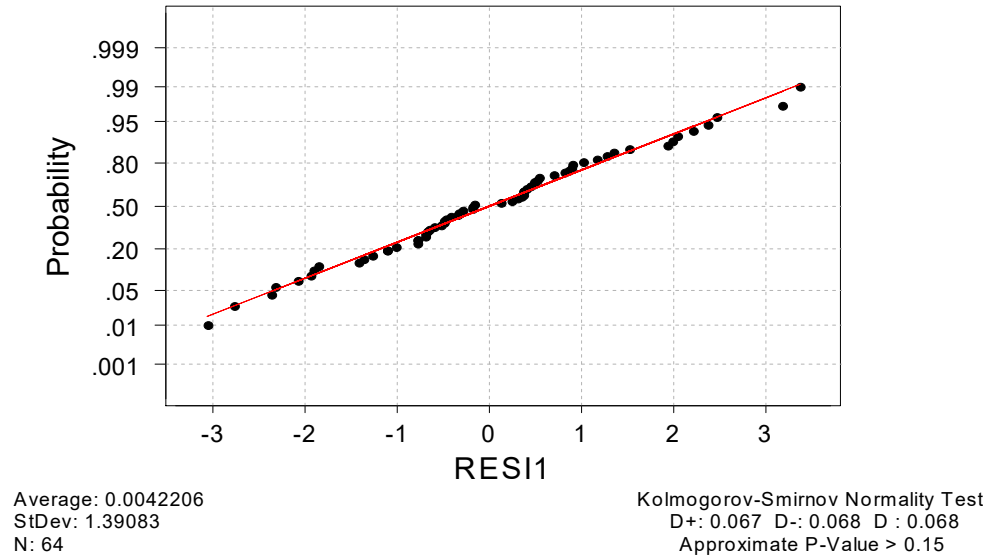
2- فحص وإختبار البواقي:


ACF of Residuals for Observed
(with 95% confidence limits for the autocorrelations)
Autocorrelation
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
2
4
6
8
10
12
14
16
Lag


PACF of Residuals for Observed
(with 95% confidence limits for the partial autocorrelations)
Partial Autocorrelation
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
2
4
6
8
10
12
14
16
Lag


Normal Probability Plot of the Residuals
(response is Observed)
Residual
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2.5
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
Normal Score

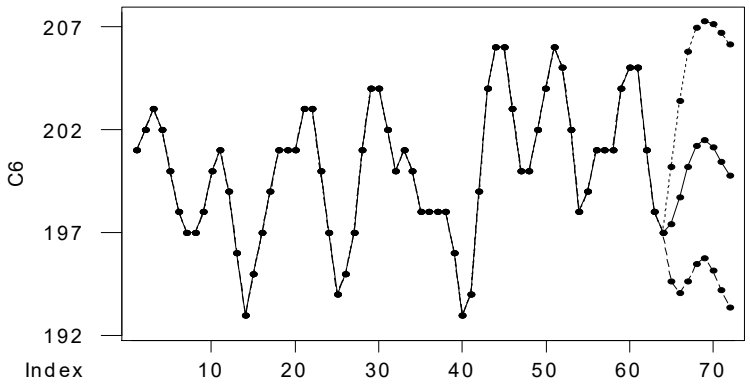

Histogram of the Residuals
(response is Observed)
Frequency
10
5
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
Residual




نلاحظ أن البواقي تجتاز كل الإختبارات و هذا يعني ان النموذج المقترح مناسب.

3- تنبؤات للقيم المستقبلية حتى 8 أزمنة تقدم مع فترات تنبؤ 95%

| Period | Forecast | Forecasts from period 64<br>95 Percent Limits<br>Lower | Upper<br>Actual |
|---|---|---|---|
| 65 | 197.419 | 194.648 | 200.190 |
| 66 | 198.729 | 194.059 | 203.400 |
| 67 | 200.196 | 194.621 | 205.772 |
| 68 | 201.215 | 195.480 | 206.949 |
| 69 | 201.507 | 195.756 | 207.258 |
| 70 | 201.148 | 195.181 | 207.116 |
| 71 | 200.445 | 194.202 | 206.687 |
| 72 | 199.756 | 193.378 | 206.134 |


207
202
197
192
C6
Index
10
20
30
40
50
60
70

# المراجع:


1- Abraham, B. and Ledoter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*, John Wiley, New York.

2- Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*, John Wiley, New York.

3- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control*, 2nd ed., Holden-Day, San Francisco.

4- Montgomery, D. C., Johnson, L. A. and Gardiner, J. S. (1990). *Forecasting and Time Series Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill International Edition.

5- Makridakis, S., Wheelwright, S. C. and McGee, V. E. (1983). Forecasting Methods and Applications, 2nd ed., John Wiley, New York.

6- Wei, W. W. S. (1990). *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*, Addison Wesley.

7- *Minitab Reference Manual*, Release 11 for Windows. (1998).


للأسف الشديد لاتوجد حسب علمي مراجع عربية تغطي كل أو جزء من محتوى المادة المغطاة في هذا الكتاب وأرجوا من أي طالب أو باحث أو مدرس يعلم بمثل هذا المرجع او الكتاب أن يرسل لي ملاحظة على البريد الإلكتروني:

abarry@ksu.edu.sa أو abarry@abarry.ws