نظرية الطوابير

تأليف: د.عدنان ماجد بري

استاذ الإحصاء وبحوث العمليات/علم الإدارة المشارك

عناصر الطابور

• الزبون Customer

هو الشخص أو الشيئ الذي ينتظر خدمة.

أمثلة:

1- الزبائن في طابور بنك.

2- البضائع التي تنتظر الشحن.

3- حزم (packets) تنتظر التحويل عند موجه (router).

4- مكالمات تنتظر المرور عند مبدل (exchange).

• الخادم Server

هو الشخص أو الشيئ الذي يقدم الخدمة.

أمثلة:

1- محاسب في بنك.

2- سيارة الشحن.

3- موجه (router).

4- مبدل (exchange).

• الطابور *Queue*

هو مجموعة الزبائن المنتظرين للخدمة.

أمثلة:

(الطابور ليس ضروريا أن يكون مجموعة من الأشياء مرتصة بإنتظام وليس ضروريا أن يكون مشاهدا أو واضح للعيان)

1- مجموعة الزبائن داخل البنك.

2- طرود البضائع المعدة للشحن.

3- حزم المعلومات العابرة خلال الشبكة.

4- المكالمات الهاتفية المتنقلة خلال شبكة الإتصالات.

خصائص الطابور

للزبون

• عملية الوصول

وتمثل توقيت وصول الزبائن للطابور.

1- هل الزبائن يصلون بشكل مستقل عن بعضهم البعض؟

2- هل الزبائن يصلون بمعدل ثابت أو يوجد نمط لوصولهم (مثل هناك أوقات الذروة)؟

3- هل عملية الوصول عشوائية أم يمكن معرفتها تحديدا؟

4- هل هناك نوع من الزبائن يصلون في أوقات مختلفة من اليوم؟

يتبع ...

- هل الزبون الذي يصل ويجد الطابور طويل يغادر ولا يلتحق به؟ (وهذا يسمى Balking)
- هل الزبون المنتظر يغادر الطابور قبل أن تبدأ خدمته؟ (وهذا يسمى Reneging)
- هل الزبون يغير الطابور(في حالة كون هناك أكثر من طابور) عند ملاحظته أن هناك طابور أقصر من طابوره (وهذا يسمى Jockeying)

خصائص الطابور

للخادم

• عملية الخدمة Service Process

وتمثل الزمن المستغرق لخدمة الزبون ويطلق عليها عادة "زمن الخدمة Service Time".

1- هل زمن الخدمة ثابت أو يتغير من زبون لآخر؟

2- هل يخدم الزبائن بالجملة (كما في إشارة المرور) أم أفرادا؟

3- هل زمن الخدمة يعتمد على نوع الزبون وهل يمكن معرفته مسبقا؟

يتبع ...

- هل زمن الخدمة يعتمد على الخادم أو وقت معين في اليوم؟
- هل هناك أي طريقة لتقليل وقت الخدمة وذلك بتحسين فعالية الخادم؟
- كم عدد الخدم الموجودين للخدمة؟ (ويسمى هذا Configuration)
- أي من الخدم يعمل بالتوازي، يقوم بمهمات متشابهة، وأي منهم يعمل بتسلسل ويقوم بمهمات مختلفة؟
- ماهي القواعد التي تتحكم في حركة الزبائن من خادم لآخر؟

خصائص الطابور

للطابور

- إنضباط الطابور *Queue Discipline*

ويعين الترتيب الذي يخدم به الزبائن في الطابور.

1- هل يخدم الزبائن حسب ترتيب وصولهم أي من يأتي أولا يخدم أولا FCFS أو حسب من يأتي آخرا يخدم أولا LCFS.

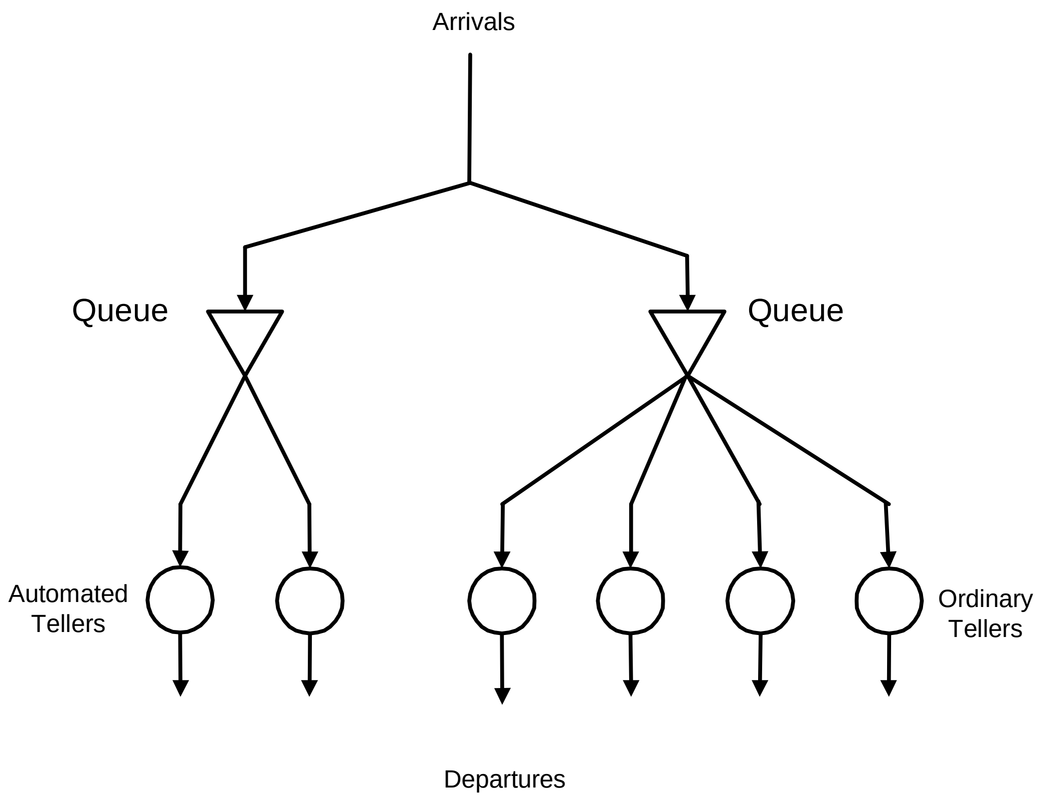
2- هل يتحصل مختلف الزبائن على أفضلية مختلفة وإذا كان هذا صحيح فما هو نظام إعطاء الأفضلية؟

يتبع ...

- هل تقطع خدمة أي زبون لخدمة زبون آخر له أفضلية أعلى؟ (مثل وصل شخص ينزف بشدة لغرفة الطوارئ بمستشفى بينما الطبيب يعالج آخر يعاني من كدمة).
- هل هناك طابور واحد لعدة خدم أو عدة طوابير منفصلة (ويسمى هذا Organization) أو تشكيلة من الإثنين معا؟
- هل هناك حد لعدد الزبائن الكلي في الطابور؟
- ماهو النظام المتبع لملاحظة الزبائن في الطابور وحفظ النظام فيه؟

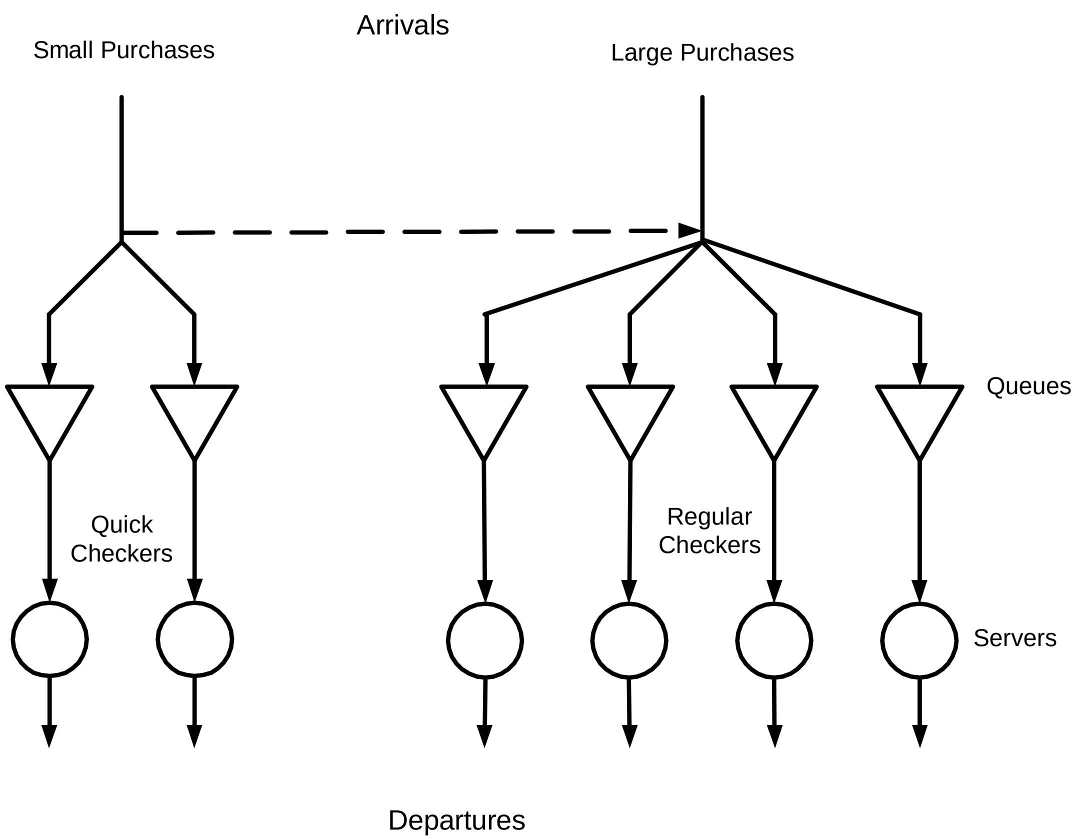
أمثلة على نظم الطوابير

- بنك



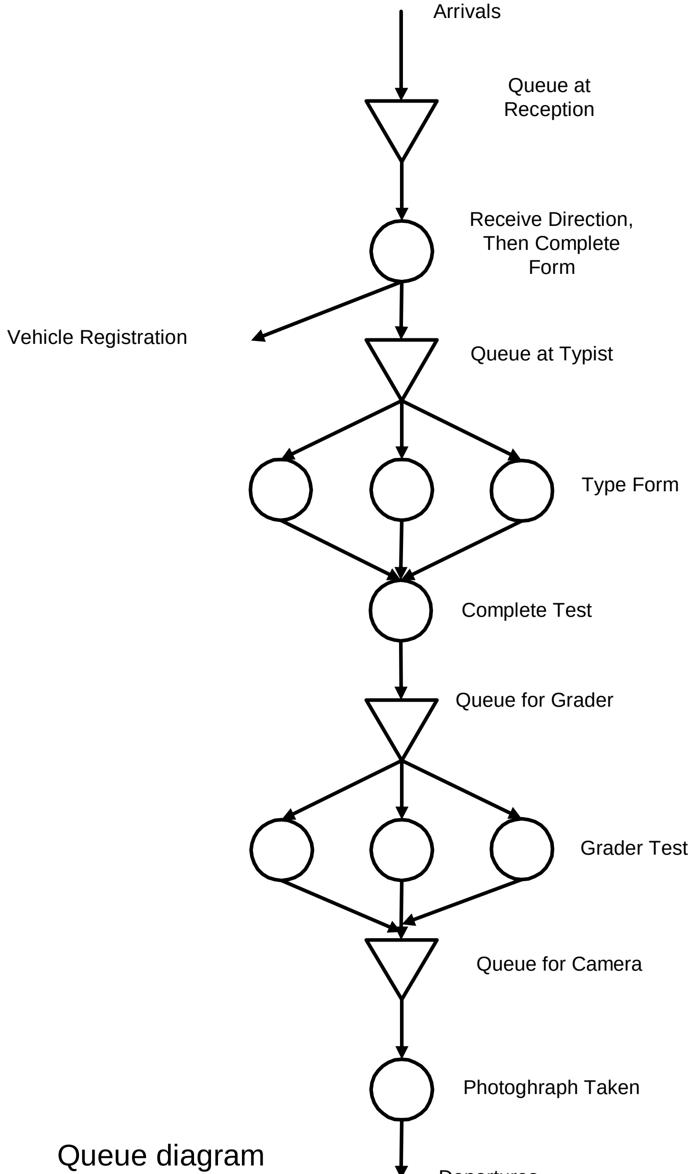
Queue diagram of bank

- سوق مركزي



Queue diagram of Supermarket

- مكتب رخص سواقة



Queue diagram of motor cehcile department

المنحى أو المنهج النظامي
Systems Approach

- التشكيل Formulation
- النمذجة Modeling
- التقييم Evaluation
- القرار Decision

التشكيل

- قيم خواص النظام.
- عرف وأعزل المشكلة.

1- ماهي متغيرات القرار التي يمكن التحكم بها؟ (عدد الخدم، نظام الطابور الخ...)

2- ماهي البيانات Data ؟ (البيانات هي خواص كمية للنظام، وهي الحقائق التي تستخدم للوصول إلى أفضل قرار، هل توجد بيانات تاريخية في سجلات أو تجمع بملاحظة النظام)

3- ماهي الشروط؟ (وهي تصف الحالة مثل نوع الخدمة المطلوبة، القيود على عدد الخدم الخ...)

النمذجة

وهي تطوير تمثيل للنظام يعطي فهم أعمق لعمل النظام، ويكون على شكل نموذج رياضي. والنمذجة هي خليط من الموهبة العلمية وبعضا من الإبداع والفن. ففي النمذجة نركز على مغزي و واقعية النموذج وكذلك على مناسبته للمشكلة المطروحة وكونه يحوي على التفاصيل الضرورية فقط. ويلاحظ أن تطوير نموذج جيد لايعني أنه النموذج الصحيح وذلك لأنه من النادر وجود إجابة واحدة صحيحة لمشكلة ما.

التقييم

وهو إستخدام النموذج لتقييم النظام وينقسم إلـى:

1- توليد البدائل: وهو إيجاد طرق بديلة لتشغيل النظام والتـي تؤدي إلـى تشكيلة Configuration بديلة للنظام مثل وضع خدم أكثر على التوازي أو على التتالي الخ.

2- تقييم البدائل: بعد إيجاد البدائل يتم فحصـها وذلك من خلال إيجاد مقاييس الأداء Measures of Performance (MOP) مثل تكلفة النظام، متوسط زمن الإنتظار، عدد الزبائن المغادرين قبل أن تبدأ خدمتـهم الخ...

Measures of Performance (MOP) مقاييس الأداء

- يمكن قياسها من النظام.
- تعطي مؤشرات مهمة عن النظام.
- تقارن بين البدائل المختلفة المطبقة على النموذج ومدى ملائمتها لأهداف النظام الرئيسية مثل الحصول على أقصي مرجوع من النظام.

القرار

الهدف الأساسي في هذه المرحلة هو الأخذ بالإعتبار المعلومات التي تحصلنا عليها في مرحلة التقييم وإختيار أفضل البدائل المتاحة. من المعروف أن الأهداف قد تتضارب مع بعضها البعض، أحيانا قد يحقق أحد البدائل تفوقا تحت مقياس من مقاييس الأداء ولكن قد يكون غير ملائم تحت مقياس آخر. ولهذا يجب أخذ كل الحذر عند ألإختيار لأن أفضل بديل ليس ضروريا هو البديل الناتج من التحليل لأن النموذج لايختار بالضرورة الحل الأمثل بل هو يعطي المعلومات الضرورية لصانع القرار ليختار البديل الأفضل.

MEASURES OF PERFORMANCE مقاييس الأداء

أهمية مقاييس الأداء

- من وجهة نظر المستخدم للنظام (الزبون) يهتم بنوعية الخدمة المقدمة.
- من وجهة نظر الخادم فإنه يهتم بتكلفة تقديم الخدمة وتأثير نوعية الخدمة على عمله.

بعض التعاريف الأساسية

- زمن الوصول Arrival time هو الزمن الذي يصل فيه الزبون إلى الطابور.
- زمن المغادرة Departure time هو الزمن الذي يكمل فيه الزبون الخدمة ويغادر النظام.
- زمن المغادرة من الطابور Departure time from queue هو الزمن الذي يغادر فيه الزبون الطابور ليبدأ الخدمة.
- الزمن في الطابور Time in queue = زمن المغادرة من الطابور – زمن الوصول.

يتبع ...

- زمن الخدمة Service time = زمن المغادرة – زمن المغادرة من الطابور.
- الزمن في النظام Time in system = زمن المغادرة – زمن الوصول = الزمن في الطابور + زمن الخدمة.

<u>مثال:</u> نفترض أن زبونا التحق بطابور في بنك الساعة 2:00 وصل لنافذة الصراف عند الساعة 2:03 وأنهى معاملته وغادر الساعة 2:05 وهكذا فإن:

1- زمن الوصول = 2:00 . 2- زمن المغادرة من الطابور = 2:03 .

3- زمن المغادرة من النظام = 2:05 . 4- الزمن في الطابور = 3 دقائق.

5- زمن الخدمة = 2 دقيقة. الزمن في النظام = 5 دقائق.

مقاييس الأداء للزبون

- الزمن في الطابور: كلما قل هذا الزمن كان أفضل للزبون.
- زمن الخدمة : كلما قل هذا الزمن كان أفضل للزبون.
- تكلفة الإنتظار Waiting cost
- نسبة العمل المنجزة في وقتها Proportion of work completed on time
- التأخر Tardiness

<u>**مثال 1:**</u> وظيفة وصلت الساعة 3:00 بدأ العمل عليها الساعة 4:00 وانجزت الساعة 4:30 الموعد النهائي للوظيفة هو الساعة 4:45 .

1- الزمن في الطابور = 60 دقيقة. 2- زمن الخدمة = 30 دقيقة. 3- التأخر = 0 دقيقة (انجزت قبل الوقت).

يتبع ...

مثال 2: وظيفة اخرى وصلت الساعة 3:15 بدأ العمل عليها الساعة 4:30 وانجزت الساعة 5:00 الموعد النهائي للوظيفة هو الساعة 4:45 .

1- الزمن في الطابور = 75 دقيقة.

2- زمن الخدمة = 30 دقيقة.

3- التأخر = 15 دقيقة. (انجزت متأخرة).

ملاحظة: مقاييس الأداء هي متغيرات عشوائية وتعرّف بتوزيعات إحتمالية. كما أنها تتغير مع الأوقات المختلفة لليوم أو الاسبوع أو الشهر ألخ. فمثلا زمن الإنتظار عند إشارة مرور يختلف في الأوقات العادية عن أوقات الذروة (خروج الموظفين من العمل الخ).

مقاييس الأداء لمقدم الخدمة

- زمن الخدمة.
- الإستخدام النسبي (فعالية) Proportional utilization وهو النسبة من الزمن التي يكون الخادم فيها مشغولا بخدمة الزبائن. وتقاس على مقياس في الفترة بين 0 و 1 وكلما تقترب من 1 كلما كانت الخدمة فعالة.
- الإنتاجية Throughput وهو المعدل الذي يخدم به الزبائن.
- معدل الوصول Arrival rate وهو مقياس للإحتياج للخدمة. كلما ازداد المعدل كلما كبر الدخل.

يتبع ...

- نسبة المغادرين قبل إنتهاء خدمتهم: وهذا المقياس مهم وصعب الحصول علية ويدل على نسبة الدخل المفقود لصاحب العمل.
- طول الطابور: أو حجم الطابور وهو مقياس للسعة أو المكان الواجب توفيرة للإنتظار، فالطابور الطويل يكون أكثر كلفة.

رسومات الوصول والمغادرة التراكمية

رسومات الوصول التراكمية تعطي دلالة عن عدد الزبائن الذين وصلو حتى نقطة معينة في الزمن. ورسومات المغادرة التراكمية تعطي دلالة عن عدد الزبائن الذين غادرو حتى نقطة معينة في الزمن. وتأتي أهميتها في أنها تعطي دلائل عن العديد من مقاييس الأداء في صورة واحدة بسيطة. كما أنها تعطي دلالة عن "صحة" النظام.

تعاريف ...

- $A(t)$ = الوصول التراكمي من الزمن 0 وحتى الزمن t
- $D_s(t)$ = المغادرة التراكمية من النظام من الزمن 0 وحتى الزمن t
- $D_q(t)$ = المغادرة التراكمية من الطابورمن الزمن 0 وحتى الزمن t
- $L_q(t)$ = عدد الزبائن في الطابور عند الزمن t

$$L_q(t) = A(t) - D_q(t)$$

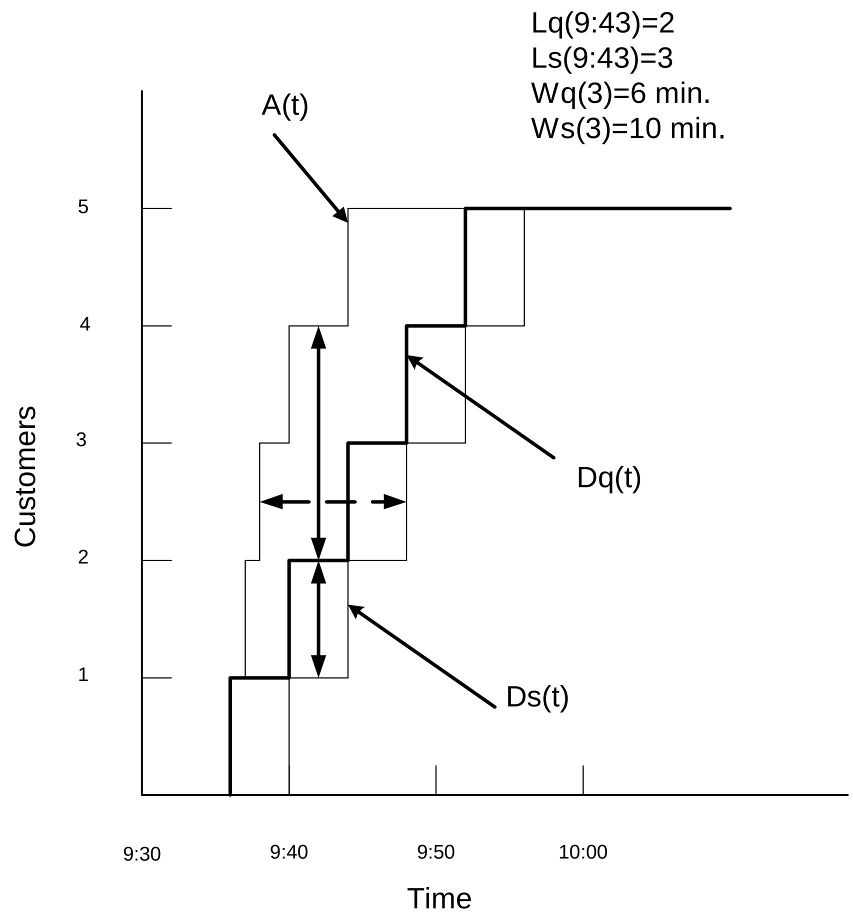
- $L_s(t)$ = عدد الزبائن في النظام عند الزمن t

$$L_s(t) = A(t) - D_s(t)$$

مثال 1

Customer	Arrival time	Departure from queue	Departure from system
1	9:36	9:36	9:40
2	9:37	9:40	9:44
3	9:38	9:44	9:48
4	9:40	9:48	9:52
5	9:45	9:52	9:56

شكل الوصول والمغادرة التراكمي (شكل 1)



يتبع ...

في الشكل السابق نوجد طول الطابور من المسفات العمودية بين المنحنيات (الأسهم الرأسية). وأوقات الإنتظار توجد من المسافات الأفقية بين المنحنيات (السهم الأفقي المنقط).

زمن الصفر هو 9:30، عند الزمن 9:43 ،4 زبائن قد وصلو، 2 غادرو الطابور و 1 غادر النظام و 1 في الخدمة. أيضا نستقرئ من الشكل أن الطابور لخادم واحد لأن الزبون الثاني عندما وصل أضطر للإنتظار، كما أن كل زبون يبدأ الخدمة بمجرد إنتهاء الزبون الذي يسبقه دلالة علي أن نظام الطابور من يأتي أولا يخدم أولا FCFS .

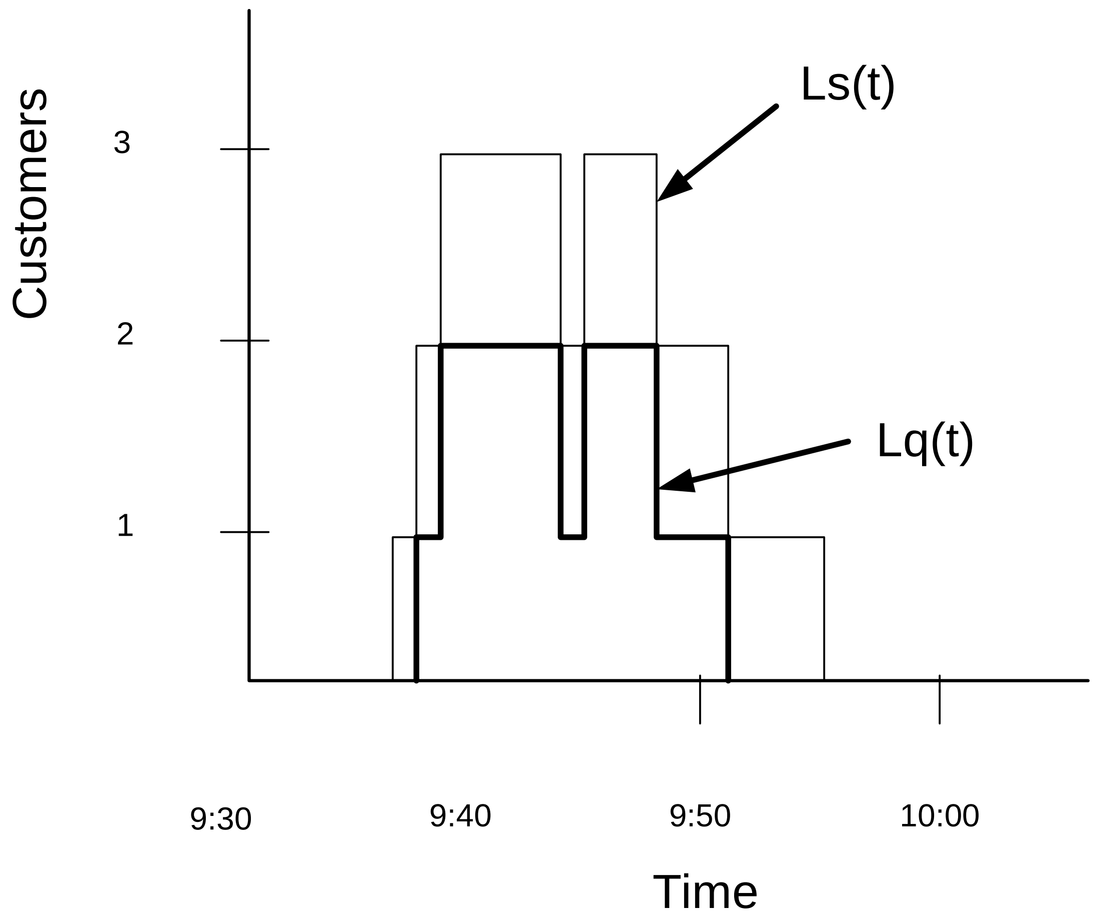
يتبع ...

عند الزمن 9:43، $A(t) = 4$ و $D_s(t) = 2$ وبالتالي فإنه يبقى في الطابور $L_q(t)$ =2 زبون و زبون واحد غادر النظام

$D_s(t)$ =1 وبالتالي فإن عدد الزبائن في النظام هو $L_s(t)$ =3.

نلاحظ أيضا أن الطابور أخيرا يختفي عند الزمن 9:52 وأن آخر زبون يغادر النظام عند الزمن 9:56 . الشكل التالي هو رسم لكل من $L_q(t)$ و $L_s(t)$ ويعطي توضيح للملاحظة الأخيرة.

شكل للزبائن في الطابور وفي النظام مع الزمن
(شكل 2)



يتبع ...

في الشكل السابق تم حساب $L_q(t)$ مثلا كما في الجدول التالي:

Time Interval	$L_q(t)$
9:30 – 9:37	0
9:37 – 9:38	1
9:38 – 9:44	2
9:44 – 9:45	1
9:45 – 9:48	2
9:48 – 9:52	1
9:52 – 10:00	0

يتبع ...

ملاحظة: أي زبون لايستطيع مغادرة الطابور قبل وصوله ولايستطيع مغادرة النظام قبل مغادرة الطابور ولهذا

$$A(t) \geq D_q(t) \geq D_s(t), \quad t \geq 0$$

وهذا يضمن أن

$$L_q(t) \geq 0, \quad L_s(t) \geq 0, \quad t \geq 0$$

وقت الإنتظار

عندما نقرأ شكل 1 عاموديا فإننا نستطيع تحديد حجم الطابور وعدد الزبائن في النظام. بقراءة شكل 1 أفقيا يوضح الزمن في الطابور والزمن في النظام. دع

$A^{-1}(n)$ = زمن الوصول النوني (n’th)

$D_q^{-1}(n)$ = زمن المغادرة النوني (n’th) من الطابور

$D_s^{-1}(n)$ = زمن المغادرة النوني (n’th) من النظام

وبالتالي فللمثال السابق

يتبع …

n	$A^{-1}(n)$	$D_q^{-1}(n)$	$D_s^{-1}(n)$
1	9:36	9:36	9:40
2	9:37	9:40	9:44
3	9:38	9:44	9:48
4	9:40	9:48	9:52
5	9:45	9:52	9:56

يتبع ...

دع

(n’th) الزمن في الطابور للزبون النوني = $W_q(n)$

(n’th) الزمن في النظام للزبون النوني = $W_s(n)$

ويكون للطابور FCFS التالي صحيح:

$$W_q(n) = D_q^{-1}(n) - A^{-1}(n)$$

$$W_s(n) = D_s^{-1}(n) - A^{-1}(n)$$

يتبع ...

فمثلا الخطوات للزبون 3 تحدث عند 9:38 و 9:44 و 9:48
وهكذا فإن $W_q(3) = 6$ دقائق و $W_s(3) = 10$ دقائق.

متوسط زمن الإنتظار

- متوسط زمن الإنتظار في الطابور

$$W_q = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} W_q(n)$$

- متوسط زمن الإنتظار في النظام

$$W_s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} W_s(n)$$

يتبع ...

في المثال السابق

$$W_q = (0+3+6+8+7)/5 = 4.8$$

و

$$W_s = (4+7+10+12+11)/5 = 8.8$$

الإنحراف المعياري لزمن الإنتظار

- الإنحراف المعياري لزمن الإنتظار في الطابور

$$\sigma_{w_q} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} \left[W_q(n) - W_q \right]^2}{N}}$$

- الإنحراف المعياري لزمن الإنتظار في النظام

$$\sigma_{w_s} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} \left[W_s(n) - W_s \right]^2}{N}}$$

تمرين ...

أحسب الإنحراف المعياري لزمن الإنتظار في الطابور و الإنحراف المعياري لزمن الإنتظار في النظام للمثال السابق.

متوسط طول الطابور

- متوسط طول الطابور (زبون)

$$L_q = \frac{\int_{t_s}^{t_e} L_q(t)\, dt}{t_e - t_s}$$

- متوسط عدد الزبائن في النظام

$$L_s = \frac{\int_{t_s}^{t_e} L_s(t)\, dt}{t_e - t_s}$$

يتبع ...

حيث

t_e = بداية زمن الفترة المحسوب عليها التكامل

و

t_s = نهاية زمن الفترة المحسوب عليها التكامل

مثال 2

Time Interval (Interval Length)	$L_q(t)$
9:30 – 9:37 (7)	0
9:37 – 9:38 (1)	1
9:38 – 9:44 (6)	2
9:44 – 9:45 (1)	1
9:45 – 9:48 (3)	2
9:48 – 9:52 (4)	1
9:52 – 10:00 (8)	0

للجدول التالي أحسب L_q

بما ان

$$L_q = \frac{\int_{t_s}^{t_e} L_q(t)\, dt}{t_e - t_s}$$

فمن الجدول نجد

$$t_e - t_s = 10:00 - 9:30 = 30 \min$$

ثم نحسب (لاحظ ان منحنى $L_q(t)$ يتكون من مستطيلات)

$$\int_{t_s}^{t_e} L_q(t)dt = \sum_{t_s}^{t_e} L_q(t) = 7\times0+1\times1+6\times2+1\times1+3\times2+4\times1+8\times0$$

$$=1+12+1+6+4=24$$

$$\therefore L_q = \frac{24}{30} = 0.8 \text{ Customers}$$

تمرين

أحسب L_s لبيانات مثال 1

الإنحراف المعياري لطول الطابور

- الإنحراف المعياري لطول الطابور

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_e} \left[L_q(t) - L_q \right]^2 dt}{t_s - t_e}}$$

- الإنحراف المعياري لعدد الزبائن في النظام

$$\sigma_{L_s} = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_e} \left[L_q(t) - L_s \right]^2 dt}{t_s - t_e}}$$

مثال 3

Time Interval (Interval Length)	$L_q(t)$
9:30 – 9:37 (7)	0
9:37 – 9:38 (1)	1
9:38 – 9:44 (6)	2
9:44 – 9:45 (1)	1
9:45 – 9:48 (3)	2
9:48 – 9:52 (4)	1
9:52 – 10:00 (8)	0

أحسب σ_{L_q}

بما ان

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_e} \left[L_q(t) - L_q \right]^2 dt}{t_s - t_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{(7+8)\times(0-0.8)^2 + (1+1+4)\times(1-0.8)^2 + (6+3)\times(2-0.8)^2}{30}}$$

$$= \sqrt{\frac{15\times0.64 + 6\times0.04 + 9\times1.44}{30}}$$

$$= \sqrt{\frac{22.8}{30}} = 0.872$$

تمرين

أحسب σ_{L_s} لبيانات مثال 1

LITTLE'S FORMULA صيغة ليتل

تعاريف:

- متوسط معدل الوصول على الفترة $\left[t_s, t_e\right]$

$$\lambda = N/(t_e - t_s)$$

- صيغة ليتل الأولى

$$L_q = \lambda W_q$$

- صيغة ليتل الثانية

$$L_s = \lambda W_s$$

يتبع ...

ملاحظة:

يجب تطبيق صيغة ليتل عندما يكون النظام خالي في بداية الفترة الزمنية t_s وفي نهايتها t_e أي أن الفترة الزمنية تبدأ وتنتهي بعدم وجود زبائن في النظام أي $L_s\left(t_s\right)=0$ و $L_s\left(t_e\right)=0$

يتبع ...

في المثال السابق

$$W_q = 4.8 \text{ minutes}, \quad \lambda = 5/30 = 0.167 \text{ customer/minute}$$

$$\therefore L_q = \lambda W_q = 0.167 \times 4.8 = 0.8 \text{ customer}$$

$$W_s = 8.8 \text{ minutes}, \quad \lambda = 5/30 = 0.167 \text{ customer/minute}$$

$$\therefore L_s = \lambda W_s = 0.167 \times 8.8 = 1.47 \text{ customer}$$

يتبع ...

تأتي أهمية صيغة ليتل من أن متوسط زمن الإنتظار يمكن أن يحسب من متوسط طول الطابور والعكس صحيح. وبالتالي يكفي مثلا قياس طول الطابور ومن ثم يمكننا الحصول على متوسط زمن الإنتظار ايضا.

مثال ...

ورشه إصلاح كبيرة لديها سجل عن عدد الوظائف في طابور العمل على فترات طولها 1 ساعة لشهر مارس الماضي. كما أن لديها سجل عن عدد الوظائف التي سلمت كل شهر. محلل طوابير حسب متوسط طول الطابور فوجد أنه 16 وظيفة. عدد الوظائف التي سلمت خلال الشهر هي 253 وظيفة. ماهو متوسط زمن الإنتظار في الطابور؟

الحل ...

$$W_q = L_q / \lambda = 16/253 = 0.063 \text{ month} \left(1.9 \text{ days}\right)$$

تمرين

Customer	Arrival time	Depar queue	Depart system
1	9:03	9:03	9:23
2	9:10	9:23	9:55
3	9:40	9:55	10:35
4	10:05	10:35	10:50
5	10:15	10:50	11:20
6	10:40	11:20	11:35
7	11:50	11:50	12:20

للبيانات التالية:

أرسم ازمنة الوصول والمغادرة من الطابور والنظام التراكمية.

1) أحسب متوسط والإنحراف المعياري للزمن في الطابور.
2) أحسب متوسط والإنحراف المعياري للزمن في النظام.
3) أحسب متوسط والإنحراف المعياري لطول الطابور.
4) أحسب متوسط والإنحراف المعياري لعدد الزبائن في النظام.
5) تحقق من صيغة لتل.

Stochastic Processes العمليات العشوائية

- العملية العشوائية هي مجموعة أو عائلة من المتغيرات العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ معرفةعلى فضاء إحتمالي معطى ومؤشرة بالمعلم t حيث t تتغير على مجموعة التأشير T.
- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي $X(t)$ تسمي حالات States ومجموعة كل القيم الممكنة تشكل فضاء الحالة State Space للعملية.
- إذا كان فضاء الحالة للعملية العشوائية متقطع (منفصل) يطلق عليها عملية حالات منفصلة Discrete-state Process وتدعى غالبا سلسلة Chain.
- إذا كان فضاء الحالة للعملية العشوائية متصل يطلق عليها عملية حالات متصلة Continuous-state Process

يتبع ...

- إذا كانت مجموعة التأشير T منفصلة يطلق على العملية عملية بمعلم (زمني) متقطع Discrete-parameter (Time) Process وتسمى العملية متتابعة عشوائية Stochastic Sequence.
- إذا كانت مجموعة التأشير T متصلة يطلق على العملية عملية بمعلم (زمني) متصل Continuous-parameter (Time) Process.

مثال على العمليات العشوائية من الطوابير

زبائن يصلون إلى نظام خدمة بشكل عشوائي ويلتحقوا بطابور الخدمة ويغادروا النظام بعد إنتهاء الخدمة.

لتكن N_k عدد الزبائن في النظام عند زمن مغادرة الزبون رقم k بعد إكماله الخدمة. العملية العشوائية $\{N_k, k = 1, 2, ...\}$ هي عملية ذات حالات متقطعة ومتقطعة المعلم وفضاء حالة هو $I = \{0, 1, 2, ...\}$ ومجموعة التأشير هي $T = \{1, 2, ...\}$.

لتكن $X(t)$ عدد الزبائن في النظام عند الزمن t عندئذ $\{X(t), t \in T\}$ هي عملية عشوائية بمعلم متصل وحالات متقطعة حيث $I = \{0, 1, 2, ...\}$ و $T = \{t, 0 \le t < \infty\}$.

يتبع...

لتكن W_k الزمن الذي استغرقه الزبون k في الإنتظار في الطابور قبل بدء خدمته. عندئذ $\{W_k, k \in T\}$ عملية عشوائية بحالات متصلة ومعلم منفصل أي ان $I = \{x, 0 \le x < \infty\}$ و $T = \{1, 2, ...\}$.

واخيرا لتكن $Y(t)$ تمثل الخدمة المطلوبة المتجمعة حتى الزمن t لكل الزبائن عندئذ $\{Y(t), 0 \le t < \infty\}$ عملية عشوائية بحالات متصلة $I = [0, \infty)$ ومعلم متصل.

تعريف

التوزيع المشترك ذا المرتبة النونية The *n*th order Joint Distribution للعملية العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ يعطى بالعلاقة

$$F(\mathbf{x};\mathbf{t}) = P\left[X(t_1) \le x_1, \ldots, X(t_n) \le x_n\right]$$

لجميع $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ و $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T^n$ بحيث

- $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

Strictly Stationary العملية التامة الإستقرار Process

أي عملية عشوائية $\{X(t)\}$ تكون تامة الإستقرار إذا كان لأي $n \geq 1$ فإن دالة التوزيع التراكمي المشتركة من الدرجة n تحقق الشرط

$$F(\mathbf{x};\mathbf{t}) = F(\mathbf{x};\mathbf{t}+\tau)$$

لجميع المتجهات $\mathbf{x} \in R^n$ و $\mathbf{t} \in T^n$ وكل رقم حقيقي τ بحيث $t_i + \tau \in T$.

Independent Process العملية المستقلة

يقال ان العملية العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ عملية مستقلة إذا كانت دالة التوزيع التراكمي المشتركة من الدرجة n تحقق الشرط

$$F(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i; t_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\left[X(t_i) \le x_i\right]$$

وكحالة خاصة نعرف عملية التجديد Renewal Process

على انها عملية عشوائية مستقلة بمعلم منفصل $\{X_n | n = 1, 2, \ldots\}$ حيث $X_1, X_2, \ldots$ متغيرات عشوائية غير سالبة ومستقلة ولها توزيع متطابق.

Markov Process عملية ماركوف

أي عملية عشوائية بمعلم منفصل $\{X(t), t = 0,1,2,...\}$ او معلم مستمر $\{X(t), t > 0\}$ تسمى عملية ماركوفية إذا كان لأي مجموعة n من النقاط الزمنية $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ في المجموعة التأشيرية T فإن التوزيع الشرطي لـ $X(t_n)$ معطي قيم $X(t_1), X(t_2), X(t_3), ..., X(t_{n-1})$ يعتمد فقط على القيمة السابقة $X(t_{n-1})$

يتبع ...

وبشكل رياضي فلأي ارقام حقيقية $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$P\left\{X(t_n) \le x_n \middle| X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_{n-1}) \le x_{n-1}\right\}$$
$$= P\left\{X(t_n) \le x_n \middle| X(t_{n-1}) \le x_{n-1}\right\}$$

أي بمعرفة الوضع (أو الشروط) الحالية للعملية فإن مستقبل العملية لايعتمد على ماضيها وهكذا فإن العملية عديمة الذاكرة.

يتبع ...

تصنف عملية ماركوف حسب التالي:

1- طبيعة مجموعة التأشير فيما إذا كانت متصلة أو منفصلة المعلم.

2- طبيعة فضاء الحالات فيما إذا كان متصل أو منفصل.

الجدول التالي يصنيف العملية الماركوفية حسب المعلم وفضاء الحالة:

فضاء الحالة	نوع المعلم: متقطع	نوع المعلم: مستمر
متقطع	سلسلة ماركوف معلم متقطع	سلسلة ماركوف معلم مستمر
مستمر	عملية ماركوف معلم متقطع	عملية ماركوف معلم مستمر

Markov Chains سلاسل ماركوف

لنعتبر متتابعة من المتغيرات العشوائية $\{X_n, n = 0,1,2,... | X_n = 0,1,2,...\}$
والتي تشكل سلسلة ماركوفية بفضاء معلم متقطع أي لجميع قيم n

$$P\{X_n = j \,|X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{X_n = j \,|X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

إذا كانت قيمة المتغير العشوائي X_n هي j عندئذ يقال ان النظام في الحالة j بعد n خطوة من الإنتقالات. الإحتمالات الشرطية

$P\{X_n = j \,|X_{n-1} = i\}$ تسمى إحتمالات الإنتقال لخطوة واحدة *Single-step transition probabilities* أو فقط إحتمالات الإنتقال *Transition probabilities* وإذا كانت هذه الإحتمالات مستقلة عن n فإن السلسلة تعتبر متجانسة *Homogeneous* والإحتمالات $P\{X_n = j \,|X_{n-1} = i\}$ تكتب على الشكل p_{ij}

يتبع ...

المصفوفة المكونة من وضع p_{ij} في الموضع ***(i,j)*** تعرف بمصفوفة الإنتقال *Transition Matrix* أو مصفوفة السلسلة *Chain Matrix* ويرمز لها بـ ***P***. للسلاسل المتجانسة إحتمالات الإنتقال *m* خطوة تعطى

$$P\left\{X_{n+m}=j\left|X_{n}=i\right.\right\}=p_{ij}^{(m)}$$

تكون ايضا مستقلة عن *n*. الإحتمالات غير الشرطية للحالة *j* عند المحاولة *n* ستكتب على الشكل $P\left\{X_{n}=j\right\}=\pi_{j}^{(n)}$

حيث التوزيع الأولي هو $\pi_{j}^{(0)}$.

يتبع ...

من قوانين الإحتمالات البسيطة يمكن إثبات ان المصفوفة المكونة من العناصر $\left\{p_{ij}^{(m)}\right\}$ ويرمز لها $\mathbf{P}^{(m)}$ يمكن ان توجد ببساطة بضرب $\mathbf{P}^{(m-k)}$ و $\mathbf{P}^{(k)}$ لأي قيم k بحيث $0 < k < m$. أي

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_r p_{ir}^{(m-k)} p_{rj}^{(k)} \quad 0 < k < m$$

أو بشكل مصفوفي

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{(m-k)}\mathbf{P}^{(k)}$$

وبوضع $k = m - 1$ نجد

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(m-1)}$$

يتبع ...

وبالإستمرار تكراريا نجد

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdots \mathbf{P} = \mathbf{P}^m$$

وهكذا يمكن الحصول على $\mathbf{P}^{(m)}$ بضرب المصفوفة $\mathbf{P}$ بنفسها m مرة.

إحتمالات الوجود في الحالة j بعد m من الإنتقالات بغض النظر عن الحالة البدائية يمكن إيجادها كالآتي:

المتجه $\boldsymbol{\pi}^{(m)}$ المكون من $\left\{\boldsymbol{\pi}_j^{(m)}\right\}$ نجد $\boldsymbol{\pi}^{(m)} = \boldsymbol{\pi}^{(m-1)} \cdot \mathbf{P}$

وبحلها تكراريا $\boldsymbol{\pi}^{(m)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^m$ بدلالة متجة الحالة البدائي $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$

يتبع ...

نعرف المصفوفة $\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ حيث $\mathbf{I}$ مصفوفة الوحدة.

نجد $\boldsymbol{\pi}^{(m)} - \boldsymbol{\pi}^{(m-1)} = \boldsymbol{\pi}^{(m-1)}\mathbf{Q}$

o Notation الرمز o

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

سلاسل ماركوف بمعلم متصل

Continuous Parameter Markov Chains

وتكتب $\{X(t), t \in T\}$ $for\ T = \{t : 0 \le t < \infty\}$

لأي نقط زمنية $s > t > u \ge 0$ وحالات i إلى j نجد

$$p_{ij}(u,s) = \sum_r p_{ir}(u,t) p_{rj}(t,s)$$

حيث $p_{ij}(u,s)$ إحتمال التحرك من الحالة i إلى الحالة j في الزمن الذي يبدأ عند u وينتهي عند s والجمع يكون على جميع حالات السلسلة.

وبشكل مصفوفي $\mathbf{P}(u,s) = \mathbf{P}(u,t)\mathbf{P}(t,s)$

نعرف $p_i(0)$ كإحتمال ان السلسلة بدأت في الحالة i عند الزمن 0

و $p_j(t)$ كالإحتمال غير الشرطي ان السلسلة تكون في الحالة j عند الزمن t

بغض النظر عن حالة البدء نجد

$$p_j(t + \Delta t) = \sum_r p_r(t)\, p_{rj}(t, t + \Delta t)$$

يتبع ...

إذا كتبنا

$$p_{ii}(t,t+\Delta t)=1-q_i(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

$$p_{ij}(t,t+\Delta t)=q_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

عندئذ

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{ij}(u,t)=-q_j(t)p_{ij}(u,t)+\sum_{r\neq j}p_{ir}(u,t)q_{rj}(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}p_{ij}(u,t)=q_i(u)p_{ij}(u,t)-\sum_{r\neq i}p_{rj}(u,t)q_{ir}(u)$$

هذه المعادلتين تعرف بمعادلتي كولوموجروف الأمامية والخلفية

Kolmogrorov’s forward and backward equations

يتبع ...

للعمليات المتجانسة Homogeneous Process يكون

$q_i(t)=q_i$ و $q_{ij}(t)=q_{ij}$ نجد بعد وضع $u=0$

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(0,t)=-q_j\,p_{ij}(0,t)+\sum_{r\neq j}p_{ir}(0,t)q_{rj}$$

بالضرب في $p_i(0)$ والجمع على كل i نجد

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=-q_j\,p_{ij}(t)+\sum_{r\neq j}p_{ir}(t)q_{rj}$$

أو في شكل مصفوفي

$$\mathbf{p}'(t)=\mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

يتبع ...

حيث $\mathbf{p}(t)=\left(p_0(t),p_1(t),p_2(t),\ldots\right)$ و $\mathbf{p}'(t)$ مشتقتها. و

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & q_{23} & \cdots \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

لاحظ ان $q_i=\sum_{j\neq i} q_{ij}$

يتبع ...

المصفوفة $\mathbf{Q}$ يمكن النظر اليها كالتالي

$$\mathbf{Q} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}(t, t+\Delta t) - \mathbf{I}}{\Delta t}$$

حيث $\mathbf{P}(t, t+\Delta t) = \{p_{ij}(t, t+\Delta t)\}$

المصفوفة $\mathbf{Q}$ تلعب نفس دور المصفوفة $\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ في الحالة المنفصلة.

المصفوفة $\mathbf{Q}$ تسمى مصفوفة الكثافة Intensity Matrix

Limiting Distributions التوزيعات النهائية

لمتسلسلة ماركوف المنفصلة المعلم لنفترض $\lim_{m \to \infty} p_{ij}^{(m)} = \pi_j$
لجميع قيم i اي بعد زمن طويل فإن إحتمال ان العملية تكون
في الحالة j معطي انها بدأت في الحالة i تكون مستقلة عن
حالة البداية وهذا يعني ان $\mathbf{P}^{(m)}$ تصل إلى نهاية عندما m
تذهب إلى مالانهاية وفي هذه الحالة تصبح اسطر المصفوفة
$\mathbf{P}^{(m)}$ متساوية. تسمي $\{\pi_j\}$ إحتمالات النهاية او إحتمالات
الحالة الثابتة Steady State Probabilities

معادلات الإستقرار وتوزيع الإستقرار
Stationary Equations and Stationary Distribution

معادلات الإستقرار لسلاسل ماركوف

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi} \quad or \quad \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q}$$

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{e} = 1$$

حيث $\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ و $\mathbf{e} = (1,1,\ldots,1)'$.

حل هذه المعادلات: $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j\}$ يعطي توزيع الإستقرار لسلسلة ماركوف.

يتبع ...

للعمليات ذات المعلم المتصل معادلات الإستقرار هي

$$\mathbf{0 = pQ}$$

$$\mathbf{pe} = 1$$

تصنيف سلاسل ماركوف ذات المعلم المنفصل

Characterization of D.P. M.C.

تصنف سلاسل ماركوف حسب الحالات كالتالي:

- الحالة j تكون متاحة Accessible (او موصولة Reachable) من الحالة i إذا كان $P_{ij}^{(n)} > 0$ لـ $n \geq 0$
اي بدأ من i فإنه بالامكان للعملية الوصول للحالة j .
إذا كانت j غير متاحة من i عندئذ $P_{ij}^{(n)} = 0$ لجميع $n \geq 0$.
- المسار Path:معطى حالتين i و j فالمسار من i إلى j هو متتابعة من التنقلات Transitions والتي تبدأ من i وتنتهي في j بحيث ان كل إنتقال في المتتابعة له إحتمال موجب.

يتبع ...

- الحالة j تكون متاحة Accessible (او موصولة Reachable) من الحالة i إذا كان يوجد مسار بينهم.
- الحالة i تكون حالة إمتصاص Absorbing State إذا كان $P_{ij} = 1$.
- الحالة i تكون حالة عبور Transient State إذا كان يوجد حالة j متاحة من i ولكن الحالة i غير متاحة من الحالة j .
- الحالتين i و j يقال انهم متصلة Communicate إذا كان يوجد مسار بينهم ويرمز له $i \leftrightarrow j$.

يتبع ...

- يقال ان السلسلة غير قابلة للتخفيض Irreducible إذا أمكن الوصول لأي حالة من أي حالة اخرى أي لأي حالتين *i* و *j* فإن $p_{ij}^{(n)} > 0$ لأي *n*.

- الحالة *i* تكون دورية Periodic إذا رجع إليها بعد فترة زمنية أكبر من 1

وبشكل رياضي: الحالة *i* تكون دورية إذا وجد عدد صحيح *k* >1 حيث لجميع قيم *j*

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} \geq 0, & n = kj \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

يتبع ...

- يقال عن حالة انها غير دورية Aperiodic إذا يوجد n كبيرة بدرجة كافية بحيث يكون لكل $m > n$ فإن

$$p_{ii}^{(m)} > 0$$

مثال

احسب التوزيع الإحتمالي المستقر لمتسلسلة ماركوف والتي لها مصفوفة إحتمالات التنقل لخطوة واحدة التالية:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.2 & 0.12 & 0.43 \\ 0.25 & 0.2 & 0.12 & 0.43 \\ 0 & 0.25 & 0.2 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

الحل

التوزيع الإحتمالي المستقر يعطي بحل المعادلات

$$\boldsymbol{\pi P = \pi}$$

حيث $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ و $\sum \pi_j = 1$

أي بحل

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)\begin{pmatrix} 0.25 & 0.2 & 0.12 & 0.43 \\ 0.25 & 0.2 & 0.12 & 0.43 \\ 0 & 0.25 & 0.2 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

و $\sum \pi_j = 1$

يتبع ...

أي

$$0.25\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.12\pi_3 + 0.43\pi_4 = \pi_1$$
$$0.25\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.12\pi_3 + 0.43\pi_4 = \pi_2$$
$$0.25\pi_2 + 0.20\pi_3 + 0.55\pi_4 = \pi_3$$
$$0.25\pi_3 + 0.55\pi_4 = \pi_4$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

يمكن حل هذه المعادلات بوضعها على شكل برمجة خطية وإستخدام Excel Solver كالتالي:

يتبع ...

$$Max \quad \pi_1 + \quad \pi_2 + \quad \pi_3 + \quad \pi_4$$

$$St$$

$$0.75\pi_1 - 0.2\pi_2 - 0.12\pi_3 - 0.43\pi_4 = 0$$

$$-0.25\pi_1 + 0.8\pi_2 - 0.12\pi_3 - 0.43\pi_4 = 0$$

$$-0.25\pi_2 + 0.8\pi_3 - 0.55\pi_4 = 0$$

$$-0.25\pi_3 + 0.45\pi_4 = 0$$

$$\pi_1 + \quad \pi_2 + \quad \pi_3 + \quad \pi_4 = 1$$

نحذف احد المعادلات لأنها زيادة redundant نظرا للقيد

$$\sum \pi_j = 1$$

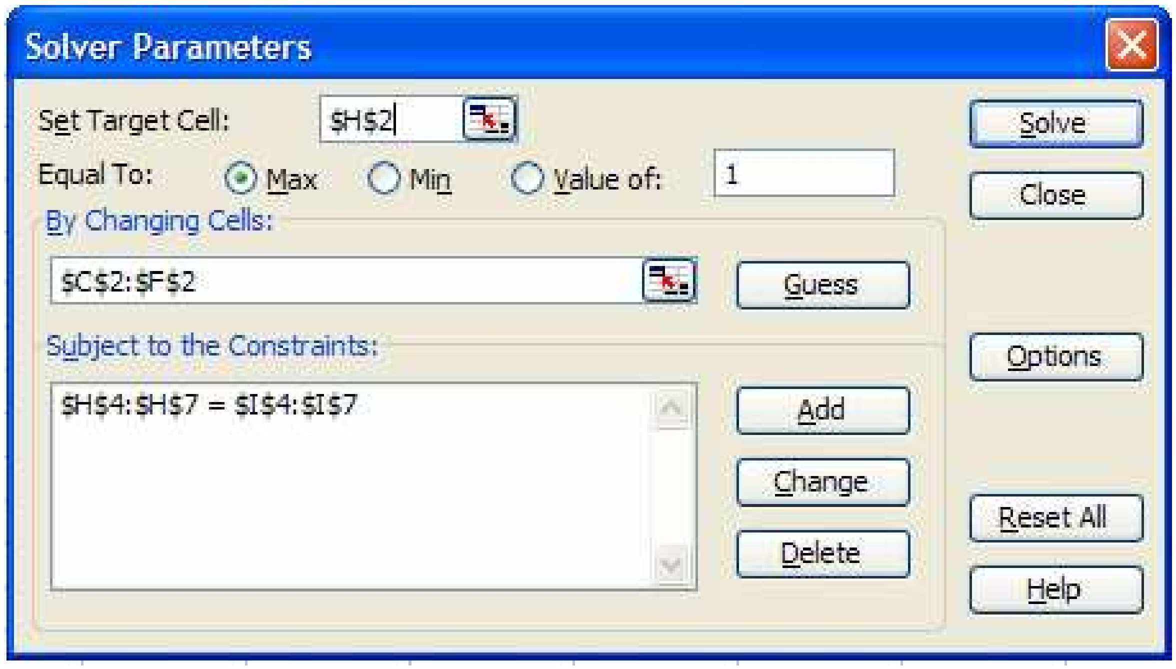
الحل بإستخدام Solver

في إكسل أدخل التالي

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Decision Variables		pi1	pi2	pi3	pi4			
Objective		0.1	0.1	0.1	0.1		0.4	
Constraint 1		0.75	-0.2	-0.12	-0.43	=	6.94E-18	0
Constraint 2		-0.25	0.8	-0.12	-0.43	=	6.94E-18	0
Constraint 3		0	-0.25	0.8	-0.55	=	6.94E-18	0
Constraint 4		0	0	-0.25	0.45	=	0.02	0
Constraint 5		1	1	1	1	=	0.4	1
		0.25	0.2	0.12	0.43			
	P =	0.25	0.2	0.12	0.43			
		0	0.25	0.2	0.55			
		0	0	0.25	0.75			

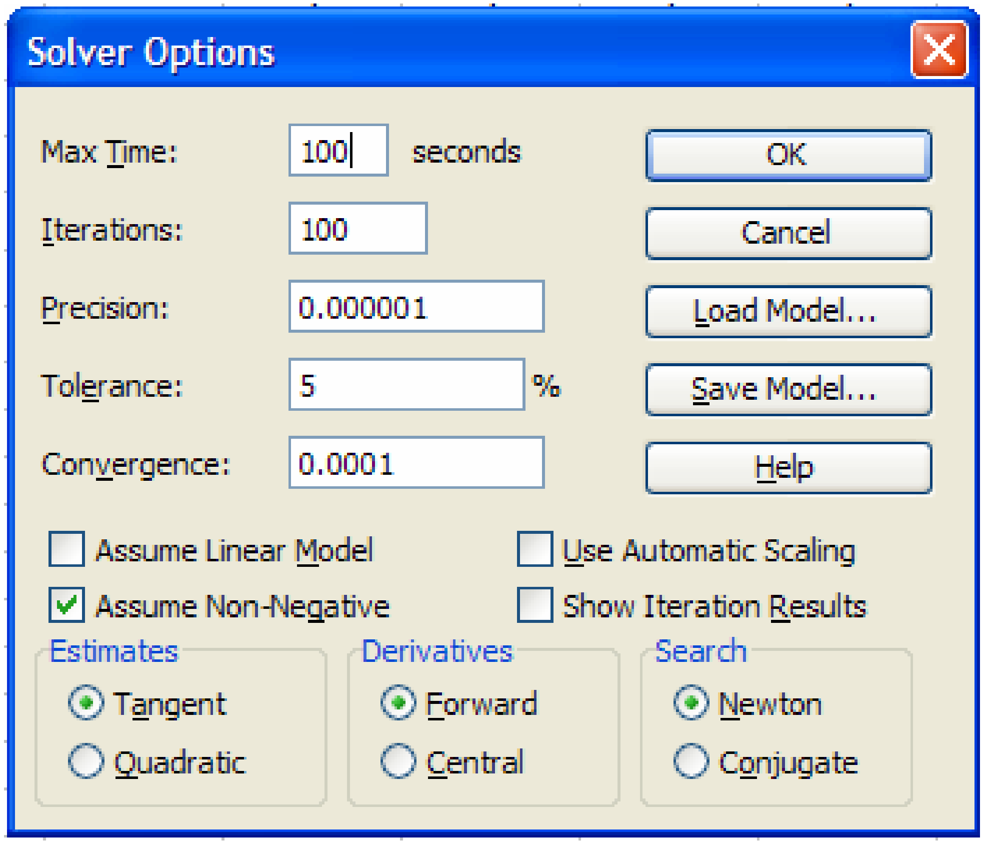
يتبع ...

وفي نافذة Solver



يتبع ...

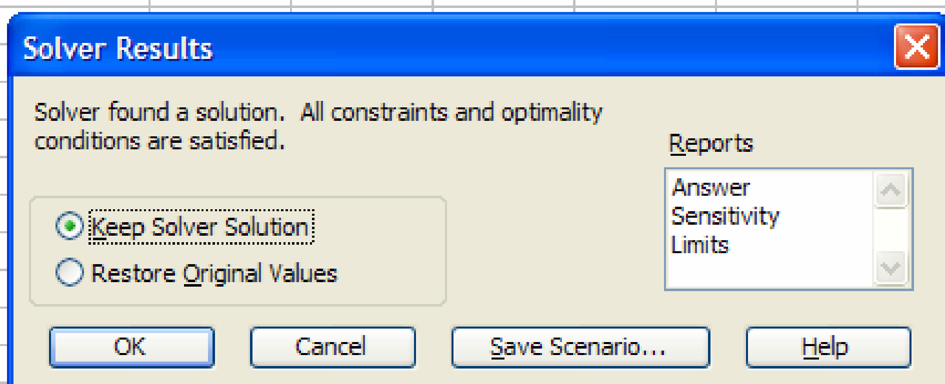
نختار متغيرات غير سالبة



يتبع ...

وينتج الحل

Decision Variables		pi1	pi2	pi3	pi4			
Objective		0.5807	0.2347	0.1187	0.0659		1	
Constraint 1		0.75	-0.2	-0.12	-0.43	=	0.345992	0
Constraint 2		-0.25	0.8	-0.12	-0.43	=	1.56E-14	0
Constraint 3		0	-0.25	0.8	-0.55	=	1.26E-14	0
Constraint 4		0	0	-0.25	0.45	=	4.39E-14	0
Constraint 5		1	1	1	1	=	1	1
		0.25	0.2	0.12	0.43			
	P =	0.25	0.2	0.12	0.43			
		0	0.25	0.2	0.55			
		0	0	0.25	0.75			



تطبيق على سلاسل ماركوف

تابع احد المستثمرين سعر الإغلاق لسهم احد الشركات واستخرج الإحتمالات المبدئية التالية:

- إحتمال السعر يزيد غدا معطى زيادته اليوم هو 0.7
- إحتمال السعر يبقى كما هو غدا معطى زيادته اليوم هو 0.2
- إحتمال السعر يقل غدا معطى زيادته اليوم هو 0.1
- إحتمال السعر يبقى كما هو غدا معطى زيادته بالأمس هو 0.35
- إحتمال السعر يبقى كما هو غدا معطى انه بقى كما هو اليوم هو 0.5
- إحتمال السعر يبقى كما هو غدا معطى انه قل بالأمس هو 0.15
- إحتمال السعر يقل غدا معطى زيادته بالأمس هو 0.25
- إحتمال السعر يقل غدا معطى بقائه كما هو بالأمس هو 0.3
- إحتمال السعر يقل غدا معطى انه قل بالأمس هو 0.45

يتبع ...

نشكل مصفوفة إحتمالات التنقل لخطوة واحدة

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.35 & 0.5 & 0.15 \\ 0.25 & 0.3 & 0.45 \end{pmatrix}$$

التوزيع الإحتمالي المستقر يعطي بحل المعادلات $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$

حيث $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ وحيث $\sum \pi_j = 1$

يتبع ...

أي بحل

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.35 & 0.5 & 0.15 \\ 0.25 & 0.3 & 0.45 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

أي

$$\begin{aligned} 0.70\pi_1 + 0.20\pi_2 + 0.10\pi_3 &= \pi_1 \\ 0.35\pi_1 + 0.50\pi_2 + 0.15\pi_3 &= \pi_2 \\ 0.25\pi_1 + 0.30\pi_2 + 0.45\pi_3 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \qquad \pi_2 + \qquad \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

يتبع ...

يمكن حل هذه المعادلات بواسطة Excel كالتالي:

ضع $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(1,0,0)$ فى الخلايا B3 و C3 و D3 وأدخل مصفوفة إحتمالات الإنتقال في المجال F2:H4 وفي العمود A ندخل المراحل من 1 إلى 20 أدخل التالي

B4 => =$B3*F$2+$C3*F$3+$D3*F$4

واسحبها حتى D4 ثم اختار المجال B4:D4 واسحبه حتى نهاية المراحل (أو حتى تصبح القيم في السطر الأخير تساوي القيمة في السطر السابق)

يتبع ...

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			States				Transition Matrix		
2	Stages	p1	p2	p3		0.7	0.2	0.1	
3	1	1	0	0		0.35	0.5	0.15	
4	2	0.7	0.2	0.1		0.25	0.3	0.45	
5	3	0.585	0.27	0.145					
6	4	0.54025	0.2955	0.16425					
7	5	0.522663	0.305075	0.172263					
8	6	0.515706	0.308749	0.175546					
9	7	0.512942	0.310179	0.176878					
10	8	0.511842	0.310742	0.177416					
11	9	0.511403	0.310964	0.177633					
12	10	0.511228	0.311053	0.17772					
13	11	0.511158	0.311088	0.177755					
14	12	0.51113	0.311102	0.177768					
15	13	0.511119	0.311107	0.177774					
16	14	0.511114	0.31111	0.177776					
17	15	0.511112	0.311111	0.177777					
18	16	0.511112	0.311111	0.177778					
19	17	0.511111	0.311111	0.177778					
20	18	0.511111	0.311111	0.177778					

يتبع ...

نلاحظ ان التوزيع الإحتمالي المستقر هو

$$\left(\pi_1,\pi_2,\pi_3\right)=\left(0.5111,0.3111,0.1778\right)$$

تطبيق على سلسلة ماركوف بحالات إمتصاص Absorbing States

1) مصفوفة إحتمالات التنقل لخطوة واحدة بحالتين إمتصاص (1 و 2)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0.3 & 0.25 \\ 0.55 & 0.05 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}$$

الحل

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			States						Transition Matrix	
2	Stages	p1	p2	p3	p4		1	0	0	0
3	1	0	0	1	0		0	1	0	0
4	2	0.45	0	0.3	0.25		0.45	0	0.3	0.25
5	3	0.7225	0.0125	0.1275	0.1375		0.55	0.05	0.15	0.25
6	4	0.8555	0.019375	0.058875	0.06625					
7	5	0.918431	0.022688	0.0276	0.031281					
8	6	0.948056	0.024252	0.012972	0.01472					
9	7	0.96199	0.024988	0.0061	0.006923					
10	8	0.968542	0.025334	0.002868	0.003256					
11	9	0.971624	0.025497	0.001349	0.001531					
12	10	0.973073	0.025573	0.000634	0.00072					
13	11	0.973754	0.025609	0.000298	0.000339					
14	12	0.974075	0.025626	0.00014	0.000159					
15	13	0.974225	0.025634	6.6E-05	7.49E-05					
16	14	0.974296	0.025638	3.1E-05	3.52E-05					
17	15	0.974329	0.025639	1.46E-05	1.66E-05					
18	16	0.974345	0.02564	6.86E-06	7.79E-06					
19	17	0.974352	0.025641	3.23E-06	3.66E-06					
20	18	0.974356	0.025641	1.52E-06	1.72E-06					
21	19	0.974358	0.025641	7.13E-07	8.1E-07					
22	20	0.974358	0.025641	3.35E-07	3.81E-07					
23	21	0.974359	0.025641	1.58E-07	1.79E-07					
24	22	0.974359	0.025641	7.42E-08	8.42E-08					
25	23	0.974359	0.025641	3.49E-08	3.96E-08					

يتبع ...

اي ان التوزيع الإحتمالي المستقر هو

$$\left(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\right) = \left(0.974359, 0.025641, 0, 0\right)$$

تمارين

صنف الحالات ثم حل التالي:

$$1- \quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.42 & 0.25 & 0.33 & 0 & 0 \\ 0.32 & 0.26 & 0.14 & 0.28 & 0 \\ 0.45 & 0.08 & 0.05 & 0.04 & 0.38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2- \quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.2 & 0.65 & 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.35 & 0.15 & 0.4 \end{pmatrix}$$

يتبع ...

$$3- \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.71 & 0.1 & 0.03 \\ 0.08 & 0.68 & 0.19 & 0.05 \\ 0.03 & 0.58 & 0.31 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4- \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.73 & 0.1 & 0.03 & 0.08 & 0.06 \\ 0.06 & 0.56 & 0.18 & 0.16 & 0.04 \\ 0.8 & 0.03 & 0 & 0.08 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

يتبع …

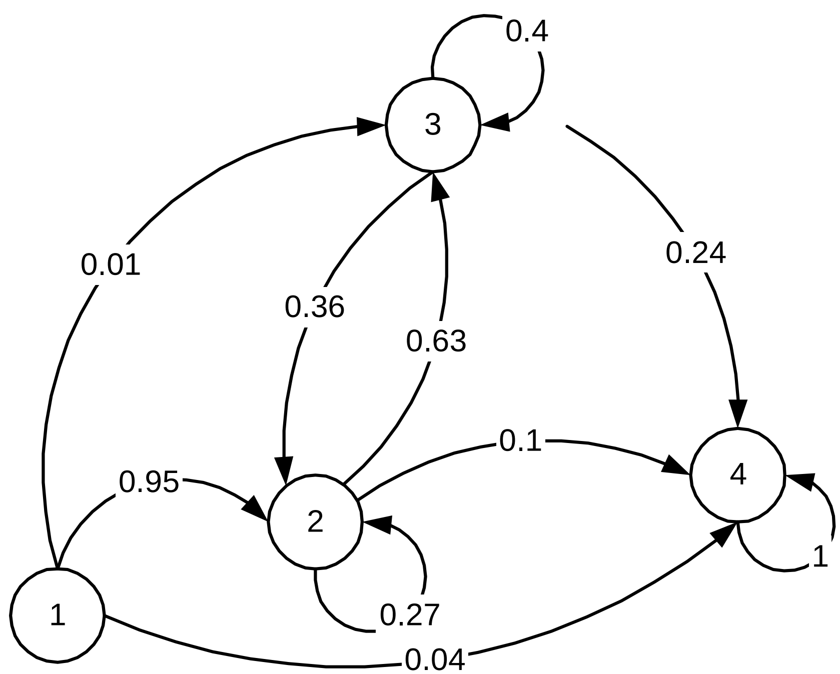
$$5- \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.1 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0.82 & 0.09 & 0.06 & 0.03 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transition Diagrams مخططات الإنتقال

مخطط الإنتقال للمتسلسلة التي لها المصفوفة

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.95 & 0.01 & 0.04 \\ 0 & 0.27 & 0.63 & 0.1 \\ 0 & 0.36 & 0.24 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هو



Approximating a تقريب لعملية بواسون Poisson Process

لكل $t \geq 0$ و $\Delta t \geq 0$:

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t)$$

البرهان:

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}=e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^0}{0!}=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^1}{1!}=\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

حيث الخاصية الثالثة تتبع من الخاصيتين السابقتين.

ازمنة بين وصول بواسونية Poisson Interarrival Times

ليكن $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ زمن مابين الوصول. إحتمال أن $\tau_n > s$ هو إحتمال انه يوجد 0 وصول في الفترة من t_n إلى $t_n + s$ أي

$$P\{\tau_n > s\} = P\{N(t_n + s) - N(t_n) = 0\} = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^0}{0!} = e^{-\lambda s}$$

$$P\{\tau_n \le s\} = 1 - e^{-\lambda s}$$

أي أن لها دالة توزيع تراكمي تتبع التوزيع الاسي

The Birth Death Process عملية الولادة والموت

تعريف: عملية الولادة والموت هي عملية ماركوفية والتي تكون فيها الإنتقالات من الحالة i ممكنة فقط للحالات المجاورة لها $i-1$ و $i+1$

يعتبر الإنتقال من i إلى $i+1$ ولادة والإنتقال من i إلى $i-1$ موت. ويمكن إعتبارها كوصول ومغادرة نظام طابور. حيث عمليات الوصول والمغادرة بواسونية.

The General Birth-Death Process عملية الولادة والموت العامة

عندما يكون حجم المجتمع $pop. = k$ فإن الولادة والموت تحدث كعمليات بواسونية بمعدل ولادة λ_k ومعدل موت μ_k

ليكن $B(t,\Delta t)$ هو عدد الولادات في الفترة $(t,t+\Delta t)$

و ليكن $D(t,\Delta t)$ هو عدد الأموات في الفترة $(t,t+\Delta t)$

فنجد

$$P\{B(t,\Delta t)= 0 \mid Pop. = k\} = 1 -\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{B(t,\Delta t)= 1 \mid Pop. = k\} = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{B(t,\Delta t)> 1 \mid Pop. = k\} = o(\Delta t)$$

$$P\{D(t,\Delta t)= 0 \mid Pop. = k\} = 1 - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{D(t,\Delta t)= 1 \mid Pop. = k\} = \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{D(t,\Delta t)> 1 \mid Pop. = k\} = o(\Delta t)$$

المعادلات التفاضلية الفروقية Differential Difference Equations

لنعرف إحتمال أن المجتمع يكون k عند الزمن t كـ $Pk(t)$. الآن لقيم $k > 0$ لدينا

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t) - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t P_k(t) + \lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t) +$$
$$\mu_{k+1}\Delta t P_{k+1}(t) + o(\Delta t)$$

$$\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

الآن بأخذ النهاية عندما $\Delta t \to 0$ نجد

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t)$$

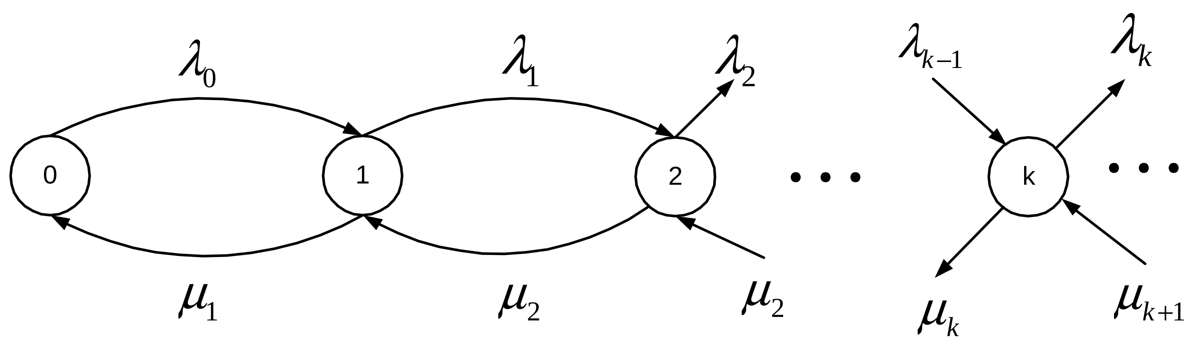
والتي تعرف بالمعادلات التفاضلية الفروقية.

The General Birth-Death Process as a Markov Chain عملية الولادة والموت العامة كسلسلة ماركوف

مصفوفة الإنتقال

$$
P = \begin{bmatrix}
1-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu_1 & 1-\mu_1-\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\
0 & \mu_2 & 1-\mu_2-\lambda_2 & -\lambda_2 & \cdots \\
0 & 0 & \mu_3 & 1-\mu_3-\lambda_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

ومخطط الإنتقال



لاحظ ان رقم الحالة يساوي العدد في المجتمع .

إحتمالات الحالة المستقرة لعملية الولادة والموت

قد نتسائل " ماهو متوسط حجم المجتمع؟" أو " ماهو إحتمال ان يكون حجم المجتمع يساوي *k* عند الزمن *t* ؟"

وبهذا نكون مهتمين بإحتمالاتالإستقرار

π = πP

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)\begin{bmatrix} 1-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & 1-\mu_1-\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & 1-\mu_2-\lambda_2 & -\lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & 1-\mu_3-\lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = \pi_0(1-\lambda_0) + \pi_1(\mu_1)$$

$$\pi_1 = \pi_0(\lambda_0) + \pi_1(1-\mu_1-\lambda_1) + \pi_2(\mu_2)$$

$$\pi_2 = \pi_1(\lambda_1) + \pi_2(1-\mu_2-\lambda_2) + \pi_3(\mu_3)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\pi_k = \pi_{k-1}(\lambda_{k-1}) + \pi_k(1-\mu_2-\lambda_2) + \pi_{k+1}(\mu_{k+1})$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

يتبع ...

ومنها نجد

$$\lambda_0 \pi_0 = \pi_1 \mu_1$$

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1}$$

$$\pi_2 = \pi_0 \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1}$$

$$\vdots$$

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

يتبع ...

وحيث ان

$$\sum_i \pi_i = 1$$

$$\pi_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

$$\pi_k = \frac{\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

تطبيق سلاسل ماركوف على نظام الطابور M/M/1

باعتبار طابور M/M/1 عملية ولادة وموت بحيث $\lambda_k = \lambda$ و $\mu_k = \mu$ فبالتعويض في المعادلات السابقة نجد $\pi_k = \rho^k \pi_0$ حيث $\rho = \lambda/\mu$ ويصبح

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k} = \frac{1}{1+\frac{\rho}{1-\rho}} = 1-\rho$$

وهكذا

$$\pi_k = (1-\rho)\,\rho^k, k = 0,1,\ldots$$

يتبع ...

متوسط طول الطابور

$$E(N)=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k=\sum_{k=0}^{\infty}k(1-\rho)\rho^k$$

$$=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^k=(1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k$$

$$=(1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}$$

عملية الوصول

The Arrival Process

The Poisson Process عملية بواسون

- تعريف: عملية عد counting process هي عبارة عن دالة تمثل العدد التراكمي لأحداث تحصل أوحصلت حتى نقطة معينة في الزمن.
- أي عملية عد يكون لها زيادات مستقلة independent increments إذا كان عدد الأحداث في أي زوج من الفترات الزمنية المنفصلة مستقل إحصائيا.
- أي عملية عد يكون لها زيادات مستقرة stationary increments إذا كان توزيع عدد الأحداث في أي فترة زمنية يعتمد فقط على طول الفترة الزمنية ولايعتمد على موقع الفترة الزمني.

تعريف عملية بواسون

عملية عد $N(t)$ تكون عملية بواسون بمعدل λ إذا حققت:

1- العملية لها زيادات مستقلة.

2- العملية لها زيادات مستقرة.

3- $$P\left(\left[N(t+\Delta t)-N(t)\right]\begin{pmatrix}=0\\=1\\>1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1-\lambda\Delta t\\\lambda\Delta t\\0\end{pmatrix}$$

المعدل λ يمثل العدد المتوقع من الزبائن الذين سيصلو في وحدة زمنية.

يتبع ...

- إحتمال أن زبون يصل عند أي وقت لايعتمد على متى وصل الزبائن الآخرين.
- إحتمال أن زبون يصل عند أي وقت لايعتمد على الزمن.
- الزبائن يصلو واحدا واحدا.

توزيع بواسون

عملية عد $N(t)$ لها توزيع بواسون بمعدل λt يعطى بالعلاقة

$$P\left[N(t)=n\right]=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\quad n=0,1,\ldots$$

دالة التوزيع الإحتمالي

تعطى بالعلاقة

$$F(x)=\sum_{n=0}^{x}\frac{(\lambda t)^{n}}{n!}e^{-\lambda t}, \quad x=0,1,2,\ldots$$

خواص توزيع بواسون

1- توزيع لمتغير عشوائي منفصل يأخذ قيم غير سالبة.

2- $E\left[N(t)\right]=\lambda t$

3- $V\left[N(t)\right]=\lambda t$

4- $P\left[N(t)=0\right]=e^{-\lambda t}$

Interarrival Time زمن مابين الوصول

أزمنة مابين الوصول Interarrival Times لعملية بواسون بمعدل λ هي عبارة عن متغير عشوائي مستقل له توزيع اسي بمتوسط $1/\lambda$ (سبق إثبات هذا)

Interarrival Time زمن مابين الوصول

خواص التوزيع الاسي:

1- توزيع مستمر ومعرف على جميع الأعداد الحقيقية غير السالبة.

2- دالة الكثافة الإحتمالية له هي

$$f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0$$

3- دالة التوزيع الإحتمالي هي

$$F\left(x\right)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x},\ \ x\geq 0$$

4- $E\left(X\right)=1/\lambda$

5- $V\left(X\right)=1/\lambda^2$

خاصية عدم التذكر أو الخاصية الماركوفية
Memoryless Property (Markovian Property)

يقال عن متغير عشوائي انه عديم الذاكرة أو له الخاصية المركوفية من الدرجة الأولى إذا كان الزمن حتى الحدث التالي لايعتمد على كم من الوقت مر منذ الحدث الأخير.

وبشكل رياضي: يكون متغير عشوائي عديم الذاكرة أو له الخاصية المركوفية من الدرجة الأولى إذا تحقق

$$P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad \text{for all } s, t \geq 0$$

أزمنة مابين الوصول لها خاصية عدم التذكر أو لها الخاصية المركوفية من الدرجة الأولى إذا كانت عملية الوصول بواسون.

بما ان ازمنة مابين الوصول لها توزيع اسي فإن

$$P\{X > s+t \mid X > t\} = \frac{P\{X > s+t \text{ and } X > t\}}{P\{X > t\}} = \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > t\}}$$

$$\text{if } X > s+t \Rightarrow X > t$$

$$\therefore \text{ for Exp.dist. } P\{X > s+t \mid X > t\} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P\{X > s\}$$

يتبع خواص عملية الوصول

- توزيع عدد الأحداث في اي فترة زمنية ذات الطول t لها توزيع بواسون بمتوسط λt .
- الزمن المنقضي حتى الحدث التالي لايعتمد على الوقت المنصرم منذ الحدث الأخير (خاصية عدم الذاكرة أو الخاصية المركوفية من الدرجة الأولى للتوزيع الاسي).

Steady State Analysis تحليل حالة الإستقرار

- طوابير الحالة المستقرة Steady State Queues هي أنظمة طوابير والتي يكون فيها التوزيع الإحتمالي لطول الطابور لايعتمد على الزمن. وهي تنتج فقط في حال كون عملية الوصول مستقرة. وكذلك من كون عملية الخدمة لاتعتمد على الزمن.
- أي طابور يمر بحالة عبور Transient State قبل أن يدخل في حالة الإستقرار. هذه الحالة تمثل مرحلة البدء أوالتأقلم أوالتعلم الخ. وطول هذه المرحلة تعتمد على شروط النظام.

يتبع ...

- حالة الإستقرار تمكننا من تحليل نظام الطابور رياضيا وبشكل دقيق ومفصل.
- حالة الإستقرار تفيد من الناحية التعليمية والإستكشافية وتعتمد على فرضيات مبسطة (قد لاتكون واقعية) عن النظام كما وأنها تساعد على على فهم طريقة عمل الطوابير.
- حالة الإستقرار يجب ألا تؤخذ على أنها الحالة السائدة في معرفة تصرف نظام الطوابير كما لايجب الإعتماد عليها في التنبؤ عن تصرف نظام الطوابير.

State Probabilities إحتمالات الحالة

- تعريف: حالة State هو طور أو شكل الكينونة.

ففي نظرية الطوابير نقصد به حالة أو شكل الطابور في لحظة زمنية معينة، حالة الخادم مشغول أو فاضي، حالة الطبور فارغ أم به منتظرين ألخ. وهو طريقة للوصف الكامل لشكل الطابور.

- من أهم المتغيرات الأساسية التي توصف في حالة نظام الطوابير هو "عدد الزبائن في الطابور" ويسمى متغير حالة State Variable وكذلك "عدد الخدم العاملين".

يتبع ...

- إختيار متغيرات الحالة يعتمد على

  1- المشكلة المدروسة.

  2- أهداف الدراسة.

- في دراستنا الحالية سوف نركز على متغير الحالة "عدد الزبائن في الطابور" وسوف نعتبر "عدد الخدم العاملين" دائما ثابت (لايتغير) وكل خادم يعمل بمفرده يخدم زبونا واحدا والتي تعني أن عدد الزبائن في النظام يحدد ايضا عدد الزبائن في الطابور.

يتبع ...

- إحتمال الحالة هو إحتمال أن النظام يكون في حالة معينة عند أي نقطة زمنية.
- دع

$\pi_n =$ إحتمال الحالة المستقرة بوجود n زبون في النظام.

- إحتمال الحالة يمثل توقعنا لنسبة الزمن التي يكون فيها النظام في الحالة n .

طرق عامة لحساب مقاييس الأداء

- عدد الزبائن المتوقع في النظام

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$$

- عدد الزبائن المتوقع في الطابور

$$L_q = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m)\pi_n$$

حيث m عدد الخدم.

يتبع ...

- الإنحراف المعياري لعدد الزبائن في النظام

$$\sigma_{L_s} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (n - L_s)^2 \pi_n}$$

- الإنحراف المعياري لعدد الزبائن في الطابور

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{\sum_{n=0}^{m-1} \left(0 - L_q\right)^2 \pi_n + \sum_{n=m}^{\infty} \left(n - m - L_q\right)^2 \pi_n}$$

يتبع ...

- زمن الإنتظار المتوقع في النظام. بإستخدام صيغة ليتل:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n}{\lambda}$$

- زمن الإنتظار المتوقع في الطابور. بإستخدام صيغة ليتل:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\sum_{n=m}^{\infty} (n-m)\pi_n}{\lambda}$$

تعاريف ...

- معدل الخدمة هو عدد الزبائن الذي يخدمهم خادم واحد في وحدة من الزمن.
- دع

μ معدل الخدمة للخادم عندما يكون مشغولا (زبون/ وحدة زمن).

$1/\mu$ متوسط زمن الخدمة.

- ويكون

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

يتبع ...

- عدد الزبائن المتوقع في الطابور. بإستخدام صيغة ليتل:

$$L_q = W_q \lambda = L_s - \frac{\lambda}{\mu}$$

- النسبة λ/μ هي نسبة معدل وصول الزبائن إلي معدل خدمتهم. وتمثل مدى إقتراب النظام إلى أقصى طاقته التشغيلية.

تعريف ...

- النسبة $\rho = \lambda / \mu$ تسمى الإستخدام المطلق Absolue Utilization لأنها أيضا تساوي العدد المتوقع من الخدم المشغولين

$$E(Busy\ servers) = L_s - L_q = \frac{\lambda}{\mu}$$

- مثال: إحتمالات الحالة لطابور بخادمين ومعدل وصول 8 زبائن/ساعة وجد أنها

$$\pi_0 = 0.4, \pi_1 = 0.3, \pi_2 = 0.2, \pi_3 = 0.1$$

وجميع إحتمالات الحالات الاخرى مساوية 0 . أحسب مقاييس الأداء.

مقاييس الأداء للمثال:

$$L_s = 0(0.4) + 1(0.3) + 2(0.2) + 3(0.1) = 1.0 \text{ customer}$$

$$L_q = 0(0.4 + 0.3 + 0.2) + 1(0.1) = 0.1 \text{ customer}$$

$$\rho = L_s - L_q = 1.0 - 0.1 = 0.9 \text{ customer}$$

$$\sigma_{\mathrm{L_s}} = \sqrt{1(0.4) + 0(0.3) + 1(0.2) + 4(0.1)} = 1.0 \text{ customer}$$

$$\sigma_{\mathrm{L_q}} = \sqrt{(0.01)(0.9) + (0.81)(0.1)} = 0.3 \text{ customer}$$

$$W_{\mathrm{s}} = L_s / \lambda = 1.0/8 = 0.125 \text{ hour}$$

$$W_q = L_q / \lambda = 0.1/8 = 0.0125 \text{ hour}$$

$$1/\mu = W_{\mathrm{s}} - W_q = 0.125 - 0.0125 = 0.1125 \text{ hour}$$

تمثيل مختصر لنظام الطوابير

تصنف الطوابير حسب أربعة عوامل:

1- عملية الوصول.

2- عملية الخدمة.

3- عدد الخدم.

4- أقصى حجم للطابور.

ويرمز لها كالتالي: $X_1 / X_2 / m / b$ حيث ...

يتبع ...

X_1 يمثل التوزيع الإحتمالي لأزمنة مابين الوصول

X_2 يمثل التوزيع الإحتمالي لأزمنة الخدمة

m يمثل عدد الخدم العاملين على التوازي

b يمثل أقصى عدد للزبائن في الطابور

بعض التوزيعات الإحتمالية يرمز لها كالتالي:

M = توزيع اسي (ماركوفي)

D = وقت خدمة ثابت (محدد)

E_n = توزيع إرلانج

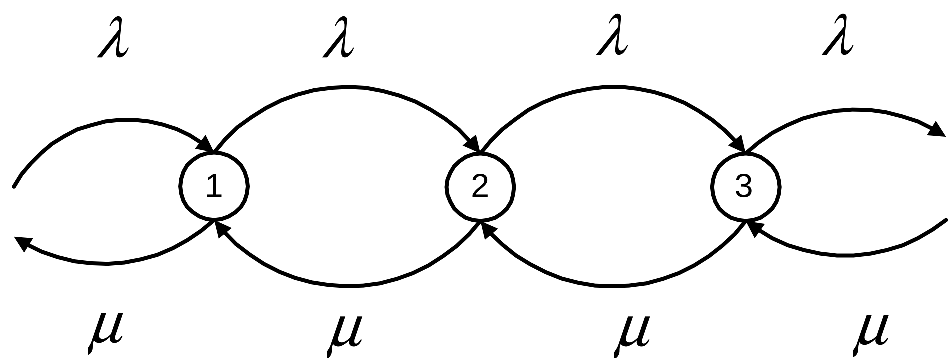
G = توزيع عام

يتبع ...

مثلا الطابور $M/M/1/\infty$ له أوقات مابين وصول موزعة اسيا (عملية وصول بواسونية) و أوقات خدمة موزعة اسيا و خادم واحد وسعة طابور غير محدودة.

طابور $M/M/1/\infty$

- توجد إحتمالات الحالة بتشكيل وحل معادلات التوازن.
- معادلات التوازن Balance equations تساوي بين المعدل الذي تحدث فية تحولات إلى حالة (أو مجموعة من الحالات) والمعدل الذي تحدث فية تحولات من حالة (أو مجموعة من الحالات) وهي خاصة فقط لأنظمة الطوابير التي لها وصول بواسوني وزمن خدمة اسي.
- مثال:



يتبع ...

معدل التحويل إلى الحالة 2 = $\lambda\pi_1 + \mu\pi_3$

معدل التحويل من الحالة 2= $\lambda\pi_2 + \mu\pi_2$

حالة الإستقرار تتطلب أن

معدل التحويل إلى الحالة 2 = معدل التحويل من الحالة 2

أي

$$\lambda\pi_2 + \mu\pi_2 = \lambda\pi_1 + \mu\pi_3$$

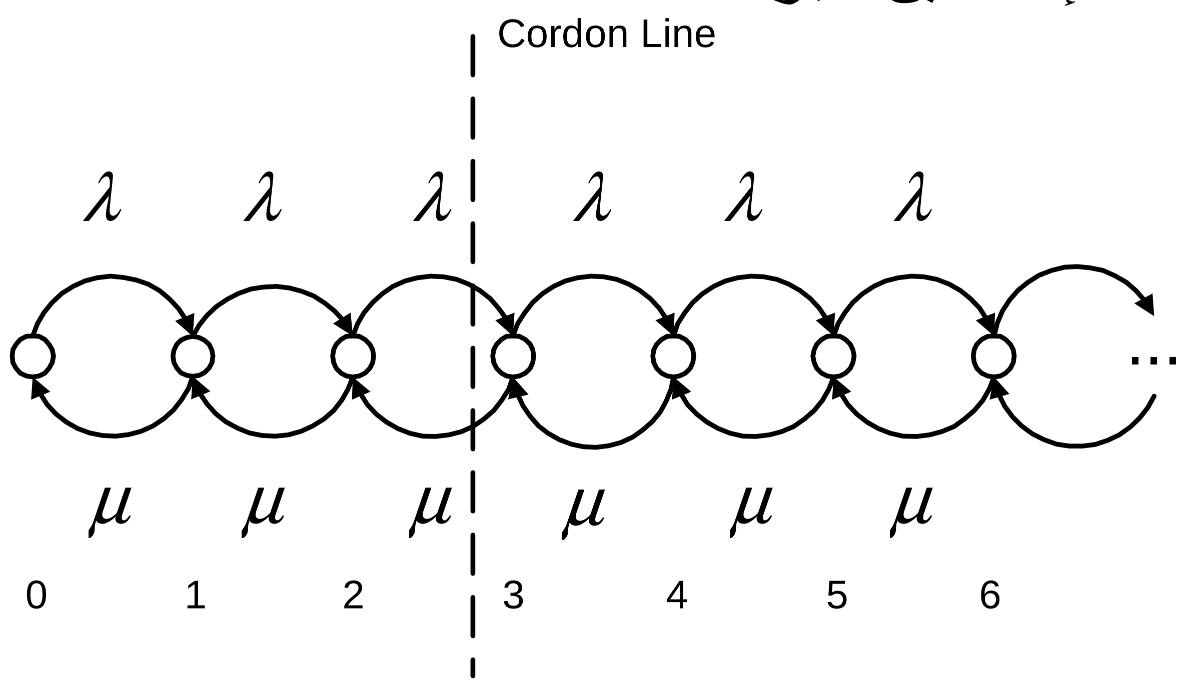
معادلات التوازن لطابور

$$M/M/1/\infty$$

State	Rate in = Rate out
0	$\mu\pi_1 = \lambda\pi_0$
1	$\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = \lambda\pi_1 + \mu\pi_1$
2	$\lambda\pi_1 + \mu\pi_3 = \lambda\pi_2 + \mu\pi_2$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = \lambda\pi_n + \mu\pi_n$

يتبع ...

هناك طريقة أسهل لكتابة معادلات التوازن. لأي خط نطاق Cordon Line مرسوم عبر رسم التحويلات فإن معدل التحويل يجب أن يكون نفسه في كلا الإتجاهين عبر الخط



يتبع ...

فتصبح معادلات التوازن لطابور $M/M/1/\infty$

$$
\begin{array}{ll}
Line & \\
0,1 & \mu\pi_1 = \lambda\pi_0 \\
1,2 & \mu\pi_2 = \lambda\pi_1 \\
2,3 & \mu\pi_3 = \lambda\pi_2 \\
\vdots & \qquad\vdots \\
n,n+1 & \mu\pi_{n+1} = \lambda\pi_n
\end{array}
$$

يتبع ...

واضح من السابق أن العلاقة العامة بين إحتمالات الحالة هي

$$\pi_n = \frac{\lambda}{\mu}\pi_{n-1} = \rho\pi_{n-1}$$

أيضا واضح أن كل إحتمالات الحالة يمكن أن يعبر عنها بإحتمال حالة واحدة

$$\pi_n = \rho^n \pi_0$$

لاحظ انها نفس النتيجة التي وجدناها بإستخدام خواص سلاسل ماركوف

يتبع ...

لإيجاد π_n نوجد π_0

نعلم أن $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$

أي

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \pi_0 = 1$$

وبالتالي

$$\pi_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1-\rho, \quad \rho < 1$$

وأخيرا

$$\pi_n = \left(1-\rho\right)\rho^n, \quad \rho < 1$$

مقاييس الأداء لطابور
$M/M/1/\infty$

عدد الزبائن المتوقع في النظام

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \rho < 1$$

يتبع ...

عدد الزبائن المتوقع في الطابور

$$
\begin{aligned}
L_q &= L_s - \rho \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \\
&= \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \rho < 1
\end{aligned}
$$

يتبع ...

الزمن المتوقع في النظام

$$W_s = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho}, \quad \rho < 1$$

الزمن المتوقع في الطابور

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \rho < 1$$

تمرين

ناقش تصرف نظام طابور $M/M/1/\infty$

عندما تتتغير $\rho = 0.5$ متدرجة إلى $\rho = 0.9$ و $\lambda = 1$

مثال

يصل المشجعين إلى ملعب كرة القدم حسب عملية بواسون بمعدل 105 مشجع/ساعة. يوجد صراف واحد في نافذة التذاكر لخدمة المشجعين. زمن الخدمة يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 30 ثانية. أوجد مقاييس أداء النظام.

الحل: معدل الخدمة = (30 ثانية)/1 أو 120 مشجع/ساعة.

الإستخدام (أو الفعالية) هي λ/μ أو 105/120=0.875.

ومقاييس الأداء هي:

يتبع ...

$$L_s = \frac{0.875}{1-0.875} = 7 \text{ customers}$$

$$L_q = \frac{(0.875)^2}{1-0.875} = 6.125 \text{ customers}$$

$$W_s = (1/105)(7) = 0.0667 \text{ hours} = 4 \text{ minutes}$$

$$W_q = (1/105)(6.125) = 0.0583 \text{ hours} = 3.5 \text{ minutes}$$

إشتقاق عام لوصول بواسوني وزمن خدمة أسي

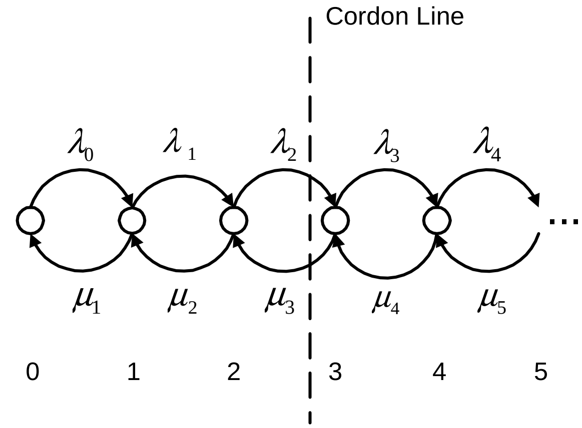
- دع λ_n = معدل الوصول عندما يكون النظام في المرحلة n

  و μ_n = معدل الخدمة عندما يكون النظام في المرحلة n

  ونفترض أن عملية الوصول بواسون وعملية الخدمة أسي ومستقلتين.

معادلات التوازن:

$$\begin{array}{ll}
Line & \\
0,1 & \mu_1\pi_1 = \lambda_0\pi_0 \\
1,2 & \mu_2\pi_2 = \lambda_1\pi_1 \\
2,3 & \mu_3\pi_3 = \lambda_2\pi_2 \\
\vdots & \vdots \\
n,n+1 & \mu_{n+1}\pi_{n+1} = \lambda_n\pi_n
\end{array}$$



... يتبع

وحلها

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \left[\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\right]\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 = \left[\frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_3\mu_2\mu_1}\right]\pi_0 \qquad (G1)$$

$$\vdots$$

$$\pi_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\pi_n = \left[\frac{\lambda_n\lambda_{n-1}\ldots\lambda_0}{\mu_{n+1}\mu_n\ldots\mu_1}\right]\pi_0$$

يتبع ...

دع

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \ldots \mu_1} & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

عندئذ

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} B_n}$$

طابور $M/M/m/\infty$

الفرضيات:

- m مستخدم يعملون بالتوازي.
- جميع الخدم يعملون بنفس المعدل μ .
- أي خادم يعمل على زبون واحد فقط.
- معدل الوصول لايتأثر بحالة النظام.
- معدلات الوصول والخدمة تعطى بالكميات

$$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 0,1,\ldots,m \\ m\mu & n = m+1, m+2,\ldots \end{cases}$$

يتبع ...

وبتعويض هذه القيم في المعادلات (G1) نجد

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}\pi_0 & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \dfrac{\rho^n}{m!\,m^{n-m}}\pi_0 & n = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

ومنها

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \rho^n / n! + \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n / m!\,m^{n-m}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \rho^n / n! + \dfrac{\rho^m}{m!} \dfrac{1}{1-\rho/m}} \quad (\rho/m < 1)$$

مقاييس الأداء لطابور

$$M/M/m/\infty$$

$$L_q = \frac{\rho^{m+1}/m}{m!\left(1-\rho/m\right)^2}\pi_0 \qquad \rho/m<1$$

$$L_s = L_q + \rho \qquad \rho/m<1$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^{m+1}/m}{m!\left(1-\rho/m\right)^2}\pi_0 \qquad \rho/m<1$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^{m+1}/m}{m!\left(1-\rho/m\right)^2}\pi_0 + \frac{1}{\mu} \qquad \rho/m<1$$

مثال

في مثال دخول المشجعين لملعب كرة لنفترض أن إدارة الملعب تريد إضافة صراف آخر في نافذة التذاكر. قيم هذا الوضع بإيجاد مقاييس الأداء.

لدينا

$$m = 2,\ \mu = 120\,(customer/hour)\ per\ server,$$

$$\lambda = 105\,(customer/hour),\ \rho = 0.875$$

إذا

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\rho+\dfrac{\rho^2/2}{1-\rho/2}} = \frac{1-\rho/2}{1+\rho/2} = 0.391$$

$$L_q = \frac{(0.875)^3/2}{2!\left(1-(0.875/2)\right)^2}(0.391) = 0.206 \text{ customer}$$

$$L_s = 0.206 + 0.875 = 1.08 \text{ customer}$$

$$W_q = 0.206/105 = 0.00196 \text{ hour} = 0.12 \text{ minute}$$

$$W_s = 1.08/105 = 0.0103 \text{ hour} = 0.62 \text{ minute}$$

يتبع ...

نلاحظ أن إضافة خادم آخر خفض L_q من 6.125 (في حالة الخادم الواحد) إلى 0.206

طابور $M/M/\infty$ وطابور $M/G/\infty$

- معدلات الوصول والخدمة

$$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0,1,2,\ldots$$
$$\mu_n = n\mu \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

- إحتمالات الحالة

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n / n!} = e^{-\rho}$$
$$\pi_n = \rho^n / n! \pi_0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$
$$\pi_n = \left(\rho^n / n!\right) e^{-\rho}$$

ومقاييس الأداء ...

$$L_s = \rho$$

$$W_s = 1/\mu$$

$$L_q = 0$$

$$W_q = 0$$

طابور $M/M/m/b$

- بعض أنظمة الطوابير يكون لها سعة أو حجم طابور محدد (مثل عدد الكراسي في محل حلاقة) يسمى حجم النطاق Buffer Size ويرمز لة في تمثيل الطابور بالرمز *b* ولمثل هذا النظام أي زبون يصل أثناء إمتلاء النطاق لايستطيع الإلتحاق بالنظام.
- معدلات الوصول والخدمة

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0,1,\ldots,m+b \\ 0 & n = m+b+1, m+b+2,\ldots \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 0,1,\ldots,m \\ m\mu & n = m+1, m+2,\ldots \end{cases}$$

يتبع ...

حيث m عدد الخدم و b حجم نطاق الطابور أو حجم الطابور.
ملاحظة: متوسط معدل الوصول $\bar{\lambda}$ لايساوي معدل الوصول λ بل $\bar{\lambda} < \lambda$ وبالتالي فإن $\rho \neq \lambda/\mu$ بل $\rho = \bar{\lambda}/\mu$.
تعريف: التركيز Intensity يعرف بالعلاقة $r = \lambda/\mu$
ويمكن إعتباره على أنه نسبة معدل الوصول الأقصى إلى معدل الخدمة الأقصى. في نماذج الطوابير السابقة كان $r = \rho$ لأن $\bar{\lambda} = \lambda$

إحتمالات الحالة ...

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{r^n}{n!} + \sum_{n=m+1}^{m+b} \frac{r^n}{m!m^{n-m}}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^m}{m!} \frac{1-(r/m)^{b+1}}{1-(r/m)}} \quad (r/m \neq 1)$$

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{r^n}{n!}\pi_0 & n = 0,1,\dots,m \\ \frac{r^n}{m!m^{n-m}}\pi_0 & n = m+1,\dots,m+b \end{cases}$$

ومقاييس الأداء ...

$$L_q = \left[\frac{r^{m+1}/m}{m!(1-r/m)^2} \pi_0 \right] \left[1-(r/m)^b - b(1-(r/m))(r/m)^b \right] \quad (r/m \neq 1)$$

$$L_s = L_q + \left[m - \pi_0 \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b-m)r^n}{n!} \right] \quad note\ \rho = L_s - L_q$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \sum_{n=0}^{m+b-1} \pi_n = (1-\pi_{m+b})\lambda$$

$$\rho = r(1-\pi_{m+b})$$

$$W_q = \frac{L_q}{(1-\pi_{m+b})\lambda}, \quad W_q = \frac{L_s}{(1-\pi_{m+b})\lambda}$$

طابور $M/M/m/\infty$

وزبائن من مصدر مجتمع محدود

- مصدر مجتمع Calling Population هو عبارة عن مجموعة الزبائن المحتملين لدخول النظام. ومصدر مجتمع محدود ينتج من وصول زبائن إلى نظام الطابور من مجتمع محدود وهذا يختلف عن النماذج السابقة التي كان يفترض فيها مصدر مجتمع غير محدود. كمثال آلات في مصنع تتعطل وتنتظر في طابور التصليح.
- نفترض لدينا N آلة في المصنع و m فريق تصليح و λ أقصى معدل وصول (معدل الوصول عندما تكون جميع ألآلات تعمل) ونفترض أن الأزمنة بين التصليح وألإعطال مستقلة وموزعة اسيا كل منه بمعدل N/λ وأزمنة الخدمة لها ايضا توزيع اسي بمتوسط $1/\mu$.

يتبع ...

معدلات الوصول والخدمة

$$\lambda_n = \begin{cases} \dfrac{N-n}{N}\lambda & n = 0,1,\ldots,N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 0,1,\ldots,m \\ m\mu & n = m+1, m+2,\ldots \end{cases}$$

يتبع ...

إحتمالات الحالة

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!n!}\left(\dfrac{r}{N}\right)^n \pi_0 & n = 1, 2, \ldots, m \\ \dfrac{N!}{(N-n)!m!m^{n-m}}\left(\dfrac{r}{N}\right)^n \pi_0 & n = m+1, \ldots, N \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{r}{N}\right)^n + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{N!}{(N-n)!m!m^{n-m}}\left(\frac{r}{N}\right)^n}$$

تمرين

أوجد مقاييس الأداء للنموذج السابق.

توزيع زمن خدمة عام

- صيغة بولاشزيك- كينتشن Pollaczek-Khintchine لطابور $M/G/1/\infty$

$$L_q = \left[\frac{\rho^2}{1-\rho}\right]\left[\frac{1+\left(CV\left(S\right)\right)^2}{2}\right] \qquad \rho < 1$$

حيث $CV(S)$ معامل الإختلاف (نسبة الإنحراف المعياري إلى المتوسط) لتوزيع زمن الخدمة

تمرين ...

أوجد الصيغة السابقة في حالة كون توزيع الخدمة أسي.

مقاييس الأداء الاخرى لتوزيع زمن خدمة عام

$$L_s = \rho + \left[\frac{\rho^2}{1-\rho}\right]\left[\frac{1+\left(CV\left(S\right)\right)^2}{2}\right]$$

$$W_s = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\rho^2}{1-\rho}\right]\left[\frac{1+\left(CV\left(S\right)\right)^2}{2}\right]$$

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\rho^2}{1-\rho}\right]\left[\frac{1+\left(CV\left(S\right)\right)^2}{2}\right]$$

مثال

آلة صرف إلكتروني يصل إليها الزبائن بمعدل 49 زبون في الساعة متوسط زمن الخدمة 49.8 ثانية ($\mu = 72$ زبون في الساعة) وإنحراف معياري 19 ثانية.

$$CV(S) = 0.38, \quad \rho = 49/72 = 0.68$$

$$L_q = \left[\frac{(0.68)^2}{1-0.68}\right]\left[\frac{1+(0.38)^2}{2}\right] = 0.83 \quad customers$$

$$L_s = \rho + L_q = 0.68 + 0.83 = 1.51 \quad customers$$

$$W_q = L_q/\lambda = 0.83/49 = 0.017 \quad hour$$

$$W_s = L_s/\lambda = 1.51/49 = 0.031 \quad hour$$

تقريب لطابور $G/G/m/\infty$

تقريب أللين-كونيين Allen-Cunneen لطابور $G/G/m/\infty$

$$L_q = L_{q,M/M/m} \cdot \left[\frac{\left(CV\left(A\right)\right)^2 + \left(CV\left(S\right)\right)^2}{2} \right]$$

يتبع ...

- $CV(A)$ = معامل الإختلاف لتوزيع أزمنة مبين الوصول
- $CV(S)$ = معامل الإختلاف لتوزيع أزمنة الخدمة
- $L_{q,M/M/m}$ = عدد الزبائن المتوقع في طابور $M/M/M/\infty$

تقريب أللين-كونيين Allen-Cunneen لطابور $G/G/1/\infty$

عندما m =1

$$L_q = \left[\frac{\rho^2}{1-\rho}\right]\left[\frac{\left(CV\left(A\right)\right)^2 + \left(CV\left(S\right)\right)^2}{2}\right] \quad \rho < 1$$

تقريب أللين-كونيين Allen-Cunneen لطابور $G/G/2/\infty$

عندما $m = 2$

$$L_q = \left[\frac{(\rho/2)^2}{1-(\rho/2)}\right]\left[\frac{\left(CV(A)\right)^2+\left(CV(S)\right)^2}{2}\right]\left[\frac{\rho}{1+(\rho/2)}\right] \quad \rho < 1$$

مثال

في المثال السابق لنفترض وجود آلتين صرف ونفترض عملية الوصول بواسون $CV(A)=1$ معامل الإختلاف لزمن الخدمة كان 0.382 والفعالية كانت 0.68 وعليه فأن مقاييس الأداء هي

$$L_q = \left[\frac{(0.68/2)^2}{1-(0.68/2)}\right]\left[\frac{1+(0.38)^2}{2}\right]\left[\frac{0.68}{1-(0.68/2)}\right] = 0.050 \quad \text{customers}$$

$$L_s = \rho + L_q = 0.68 + 0.050 = 0.73 \quad \text{customers}$$

$$W_q = L_q / \lambda = 0.050/(98/120) = 0.061 \quad \text{minute}$$

$$W_s = L_s / \lambda = 0.73/(98/120) = 0.89 \quad \text{minute}$$

تصرف الطابور في الحالة الإنتقالية
Transient Queue Behavior

المعادلات التي درسناها حتى الآن تنطبق كما سبق أن ذكرنا على الطوابير في حالة الإستقرار. ولكن هذه الحالة قد لاتحدث إطلاقا. قد يثبت معدل الوصول على فترات زمنية قصيرة ولكن هذا غير مضمون على فترات طويلة من الزمن. قبل ان يصل النظام لحالة إستقرار قد يتغير هذا المعدل وتصبح جميع النتائج غير قابلة للتطبيق. تحليل تصرف الطابور في الحالة الإنتقالية صعب جدا ومتخصص لدرجة ان النتائج المستخلصة منه لاتنطبق بشكل عام على أي حالة اخرى. لهذا من المفيد معرفة اوإيجاد شروط يكون تحليل الحالة الثابتة مفيد في تطبيقة على الحالة الإنتقالية.

يتبع ...

زمن التسهيل Relaxation Time هو الزمن الذي يحتاجه النظام لكي ينسى حالته الأولية Initial State والإنظمة التي يكون فيها الوصول بواسوني Poisson Arrivals والتي بداية يكون فيها عدد الزبائن أقل من L_s في النظام فإنها تنسي حالتها الأولية بعد زمن

$$T_0 = \frac{(\rho/m) + C^2(S)}{\left(1-(\rho/m)\right)^2}(1/m\mu)$$

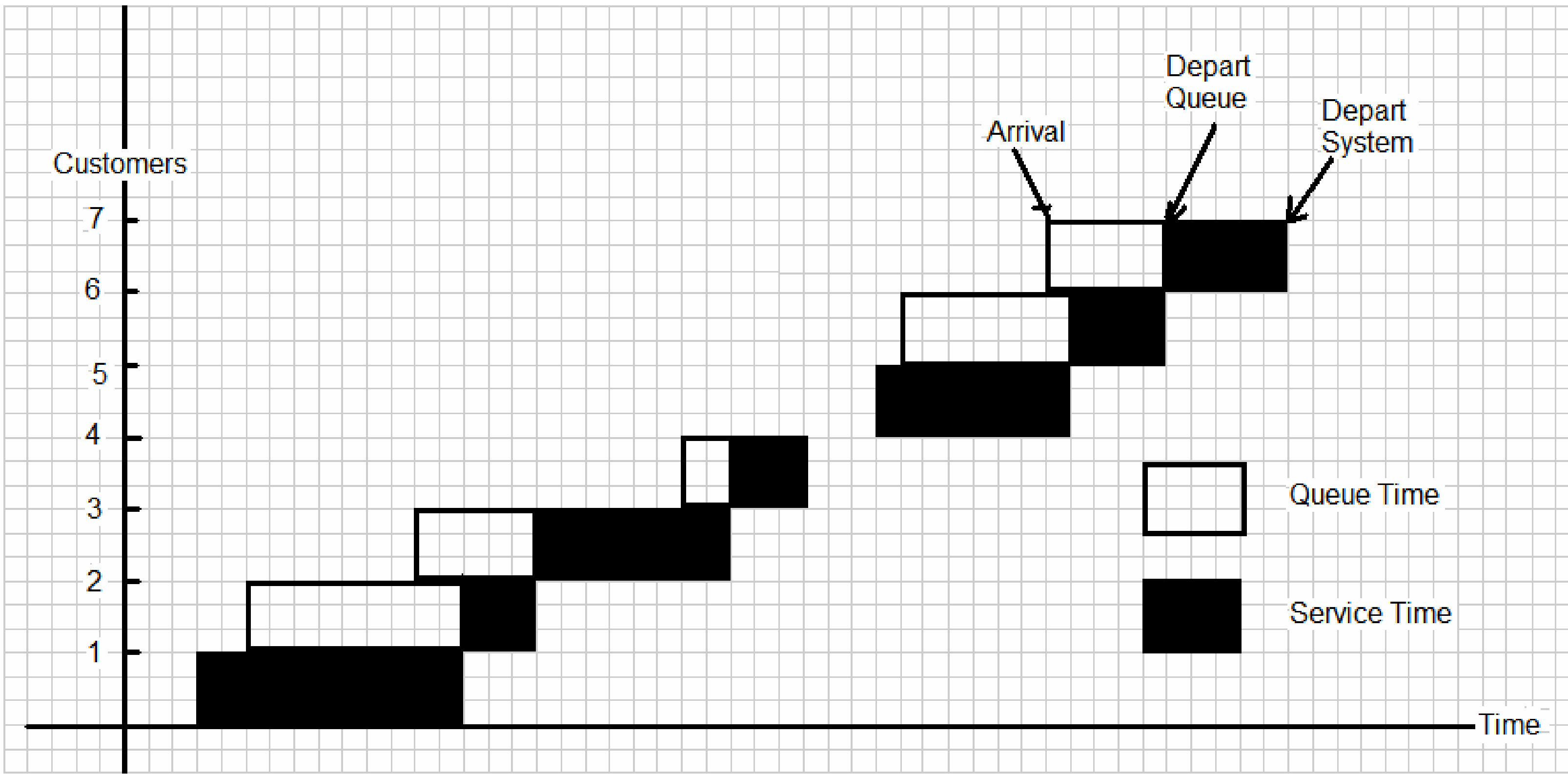
حيث $C(S)$ هو معامل التغير لزمن الخدمة. أي ان الزمن المطلوب للوصول إلى حالة الإستقرار يزداد مع وصول ρ/m إلى 1.

تمرين

في حالة $C(S)=1$ أوجد قيم $T_0/(1/m\mu)$ لقيم $\rho/m = 0.2, 0.4, ..., 0.95$ وناقش النتائج.

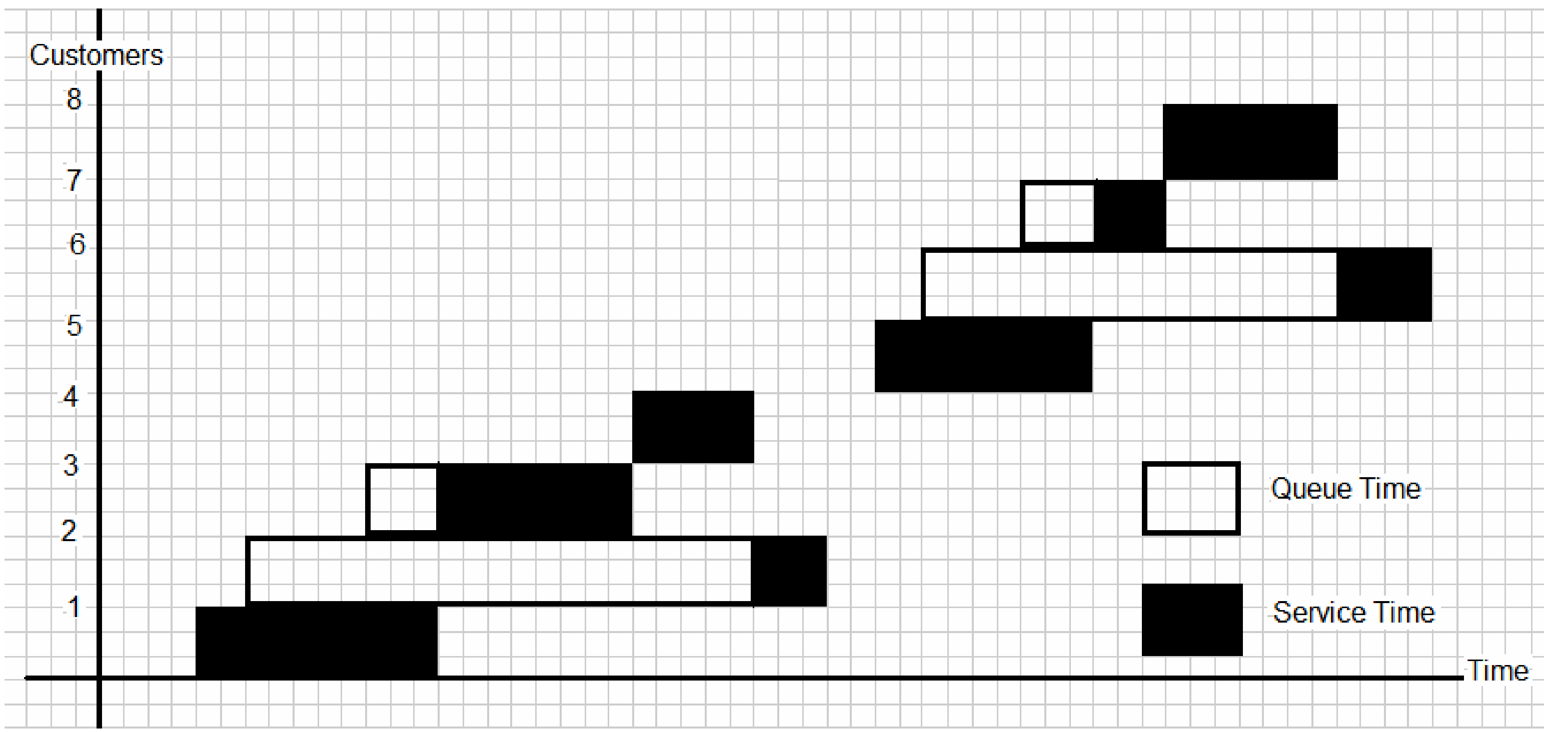
رسومات جانت لإنضباط الطابور *Gantt Chart*

وتستخدم لتمثيل نظام الطابوروبخاصة لتوضيح إنضباط الطابور الشكل التالي تمثيل لحالة إنضباط الطابور FCFS وسوف تشرح بالتفصيل في المحاضرة.



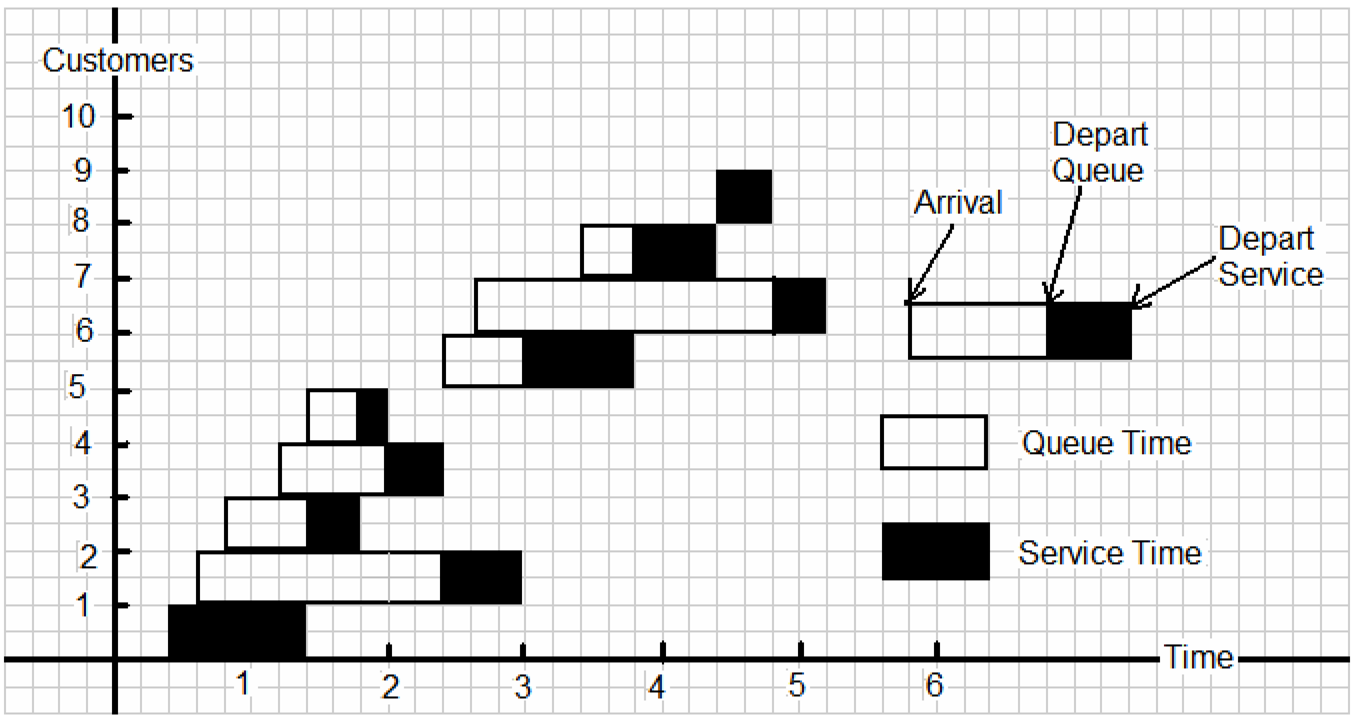
يتبع ...

الشكل التالي تمثيل لحالة إنضباط الطابور LCFS



يتبع ...

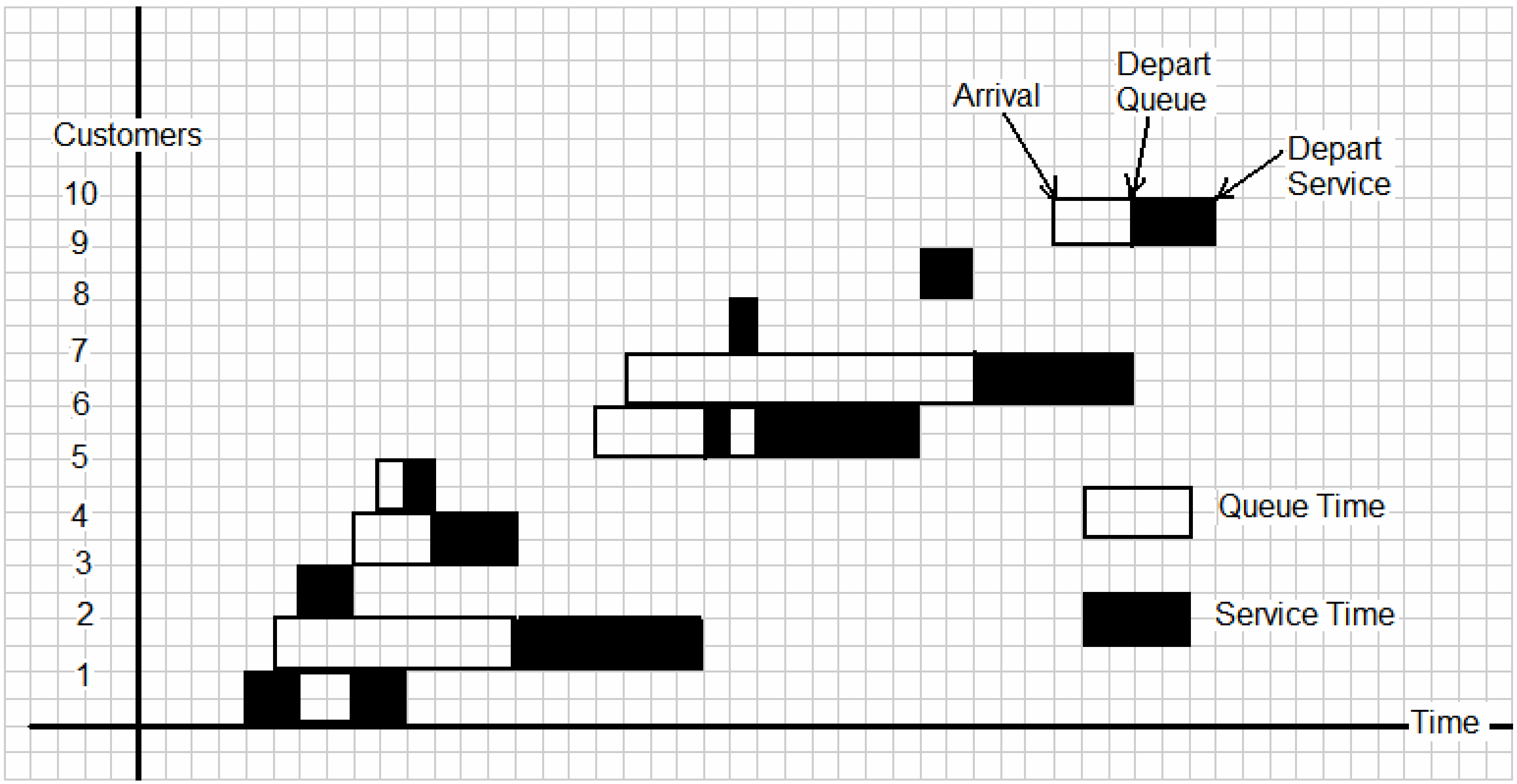
الشكل التالي تمثيل لحالة إنضباط الطابور SST (Shortest Servive Time)



يتبع ...

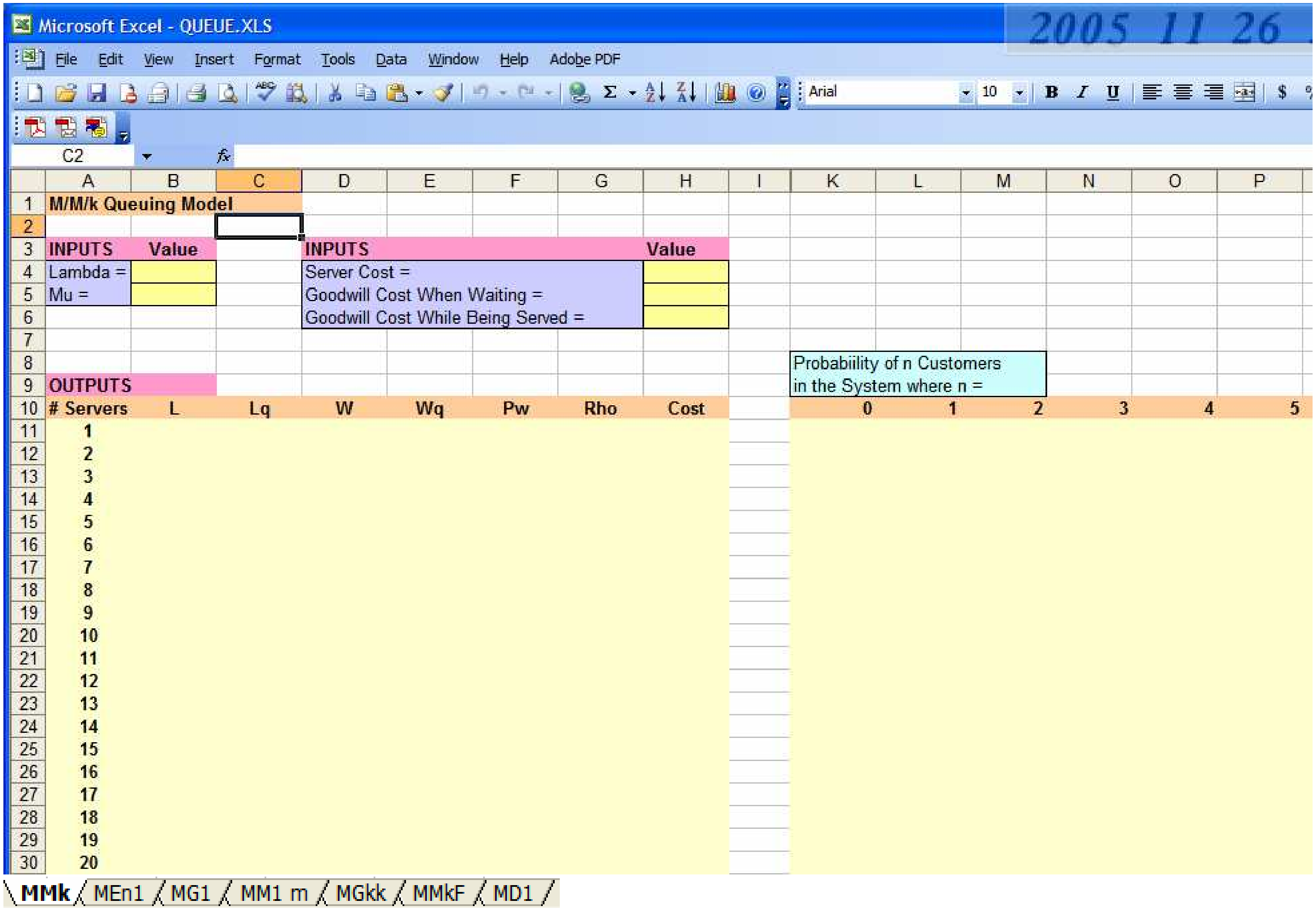
الشكل التالي تمثيل لحالة إنضباط الطابور

SRST(Shortest Remaining Servive Time)



برنامج إكسل لحساب مقاييس الإداء

البرنامج QUEUE.XLS يحسب مقاييس الإداء للطوابير M/M/k, M/E/n/1, M/G/1, M/M/1/m, M/G/k/k, M/M/k/F, M/D/1



مثال

يصل المشجعين إلى ملعب كرة القدم حسب عملية بواسون بمعدل 105 مشجع/ساعة. يوجد صراف واحد في نافذة التذاكر لخدمة المشجعين. زمن الخدمة يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 30 ثانية. أوجد مقاييس أداء النظام.

الحل: معدل الخدمة = (30 ثانية)/1 أو 120 مشجع/ساعة.

الإستخدام (أو الفعالية) هي λ/μ أو 105/120=0.875.

ومقاييس الأداء هي:

النتائج

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P
1	**M/M/k Queuing Model**														
2															
3	**INPUTS**	**Value**		**INPUTS**				**Value**							
4	Lambda =	105		Server Cost =											
5	Mu =	120		Goodwill Cost When Waiting =											
6				Goodwill Cost While Being Served =											
7															
8										Probability of n Customers					
9	**OUTPUTS**									in the System where n =					
10	**# Servers**	**L**	**Lq**	**W**	**Wq**	**Pw**	**Rho**	**Cost**		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
11	**1**	7	6.125	0.066667	0.058333	0.875	0.875	0		0.125	0.109375	0.095703	0.08374	0.073273	0.064114
12	**2**	1.082126	0.207126	0.010306	0.001973	0.266304	0.4375	0		0.391304	0.342391	0.149796	0.065536	0.028672	0.012544
13	**3**	0.901871	0.026871	0.008589	0.000256	0.065259	0.291667	0		0.414003	0.362253	0.158486	0.046225	0.013482	0.003932
14	**4**	0.878646	0.003646	0.008368	3.47E-05	0.013022	0.21875	0		0.41654	0.364473	0.159457	0.046508	0.010174	0.002225
15	**5**	0.875458	0.000458	0.008338	4.36E-06	0.00216	0.175	0		0.416828	0.364724	0.159567	0.04654	0.010181	0.001782
16	**6**	0.875052	5.19E-05	0.008334	4.95E-07	0.000304	0.145833	0		0.416859	0.364751	0.159579	0.046544	0.010181	0.001782
17	**7**	0.875005	5.3E-06	0.008333	5.05E-08	3.71E-05	0.125	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
18	**8**	0.875	4.9E-07	0.008333	4.67E-09	3.99E-06	0.109375	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
19	**9**	0.875	4.12E-08	0.008333	3.92E-10	3.83E-07	0.097222	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
20	**10**	0.875	3.18E-09	0.008333	3.02E-11	3.31E-08	0.0875	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
21	**11**	0.875	2.26E-10	0.008333	2.15E-12	2.61E-09	0.079545	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
22	**12**	0.875	1.49E-11	0.008333	1.42E-13	1.89E-10	0.072917	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
23	**13**	0.875	9.13E-13	0.008333	8.69E-15	1.26E-11	0.067308	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
24	**14**	0.875	5.24E-14	0.008333	4.99E-16	7.87E-13	0.0625	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
25	**15**	0.875	2.78E-15	0.008333	2.64E-17	4.57E-14	0.058333	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
26	**16**	0.875	1.11E-16	0.008333	1.06E-18	2.49E-15	0.054688	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
27	**17**	0.875	0	0.008333	0	1.28E-16	0.051471	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
28	**18**	0.875	0	0.008333	0	6.19E-18	0.048611	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
29	**19**	0.875	0	0.008333	0	2.84E-19	0.046053	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782
30	**20**	0.875	0	0.008333	0	1.24E-20	0.04375	0		0.416862	0.364754	0.15958	0.046544	0.010182	0.001782

قارن هذه النتائج بالقيم السابق لحل هذا المثال

تمرين

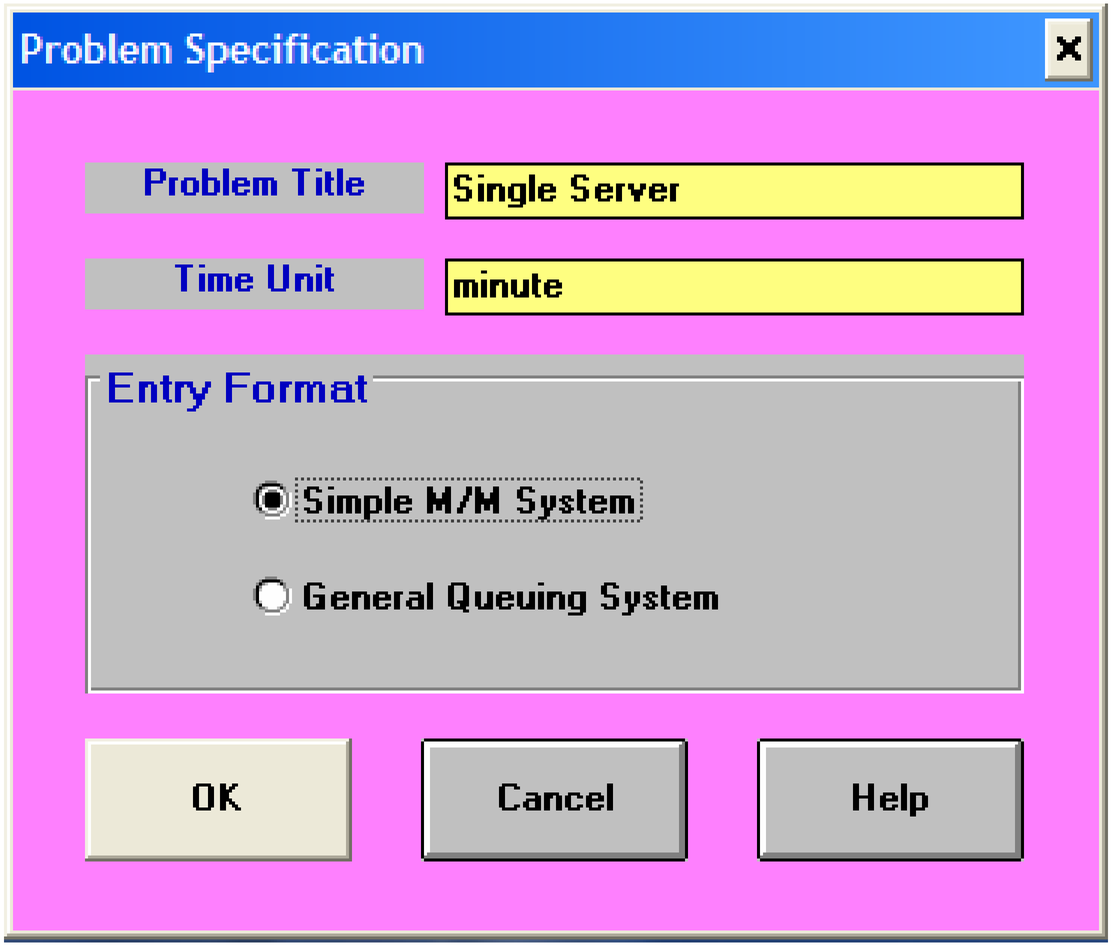
بإستخدام برنامج QUEUE.XLS حل جميع الأمثلة والتمارين السابقة.

نماذج الطوابير
Queuing Models

بإستخدام
WINQSB

مثال 1: مثال على طابور الخادم الواحد M/M/1

في برنامج QA.EXE أختار مشكلة جديدة ثم أدخل المعلومات كالتالي



في النافذة الناتجة أدخل معدل الخدمة ومعدل وصول الزبائن

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	10
Customer arrival rate (per hour)	8
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

الحل:

03-13-2003	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	8.0000
3	Service rate per server (mu) per hour =	10.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	8.0000
5	Overall system effective service rate per hour =	8.0000
6	Overall system utilization =	80.0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	4.0000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	3.2000
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	4.0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.5000 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.4000 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.5000 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	20.0000 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	80.0000 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$0
17	Total cost of idle server per hour =	$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$0

تمارين:

1- موظف المراجع في مكتبة الجامعة يستقبل طلبات للمساعدة بمعدل 10 كل ساعة (توزيع بواسون). هذا الموظف يقوم بخدمة المراجعين في المتوسط 5 دقائق لكل مراجع (توزيع اسي). ماهي مقاييس ألإداء لهذا النظام؟

2- مغسلة سيارات أوتوماتيكية تصل إليها السيارات عشوائيا بمعدل 20 سيارة في الساعة. زمن الخدمة هو 2 دقيقة تماما. ماهي مقاييس الإداء للنظام؟

3- أحد البنوك يوجد به 3 صرافين في أحد فروعه. يصل الزبائن بشكل عشوائي بمعدل 1 زبون في الدقيقة. زمن الخدمة 2 في المتوسط ويتبع التوزيع الاسي. ماهي مقاييس الإداء؟

4- في قسم خدمة لتصليح السيارات الميكانيين الذين يحتاجون قطع غيار يقدمو طلباتهم في إستمارات طلب إلى قسم القطع. يقوم موظف القسم بتحقيق الطلب بينما الميكانيكي ينتظر. يصل الميكانيين بمتوسط 40 في الساعة (توزيع بواسون). والموظف يحقق طلبه بمعدل 2 دقيقة (توزيع اسي). إذا كان الموظف يتقاضى 6 دولار في الساعة والميكانيكي 18 دولار في الساعة فماهو العدد الأمثل من الموظفين الذين علينا إستخدامهم لتقليل الكلفة؟

5- محل لبيع الهمبورجر يود ان يقرر عدد المحاسبين لإستخدامهم خلال ساعات العمل. يصل الزبائن وقت الغداء بمعدل 98 زبون في الساعة (توزيع بواسون). كل زبون يحتاج 3 دقائق لخدمته (توزيع اسي). إدارة المحل لاتريد للزبون الإنتظار أكثر من 5 دقائق في الطابور. كم عدد المحاسبين يجب عليهم أن يستخدمو؟

6- محل الهمبورجر يفكر في تغيير طريقة خدمته للزبائن. في معظم اليوم (فيما عدى وقت الغداء) يستخدم المحل 3 محاسبين. يصل الزبائن بمعدل 50 زبون في الساعة. كل محاسب يأخذ طلب زبون ويتحصل على النقود ثم يذهب لإحضار الهمبورجر وصب الشراب. هذا يستغرق في المتوسط 3 دقائق لكل زبون (توزيع اسي). الطريقة الجديدة هي إستخدام محاسب واحد لأخذ الطلب والنقود وخادم آخر لتحضير الهمبورجر وآخر لصب الشراب. ويعتقد أن هؤلاء الخدم الثلاثة يمكنهم خدمة الزبون في خلال 1 دقيقة. هل على الإدارة إستخدام الطريقة الجديدة؟

7- أحد البنوك الصغيرة في مركز تجاري يستخدم 2 محاسبين. أحدهم مختص بالتجار من الزبائن والآخر الزبائن العاديين. الزبائن من التجار والزبائن العاديين كل منهم يصل بمعدل 20 زبون في الساعة (أي مجموع معدل الوصول 40 زبون في الساعة). زمن الخدمة لكل من الصرافين يكون في المتوسط 2 دقيقة للزبون (اسي). مدير البنك يفكر في تغيير الطريقة بحيث يجعل كل من المحاسبين يخدم أي نوع من الزبائن بدون تحديد. وحيث أن على كل من المحاسبين التعامل مع أي نوع من الزبائن فإن فعاليتهم سوف تتناقص بحيث يصبح زمن الخدمة 2.2 دقيقة لكل زبون. هل عليهم التحول إلى الطريق الجديدة أم لا؟

8- مغسلة سيارات آليه يضع الزبون 4 ريالات في صندوق آلي ثم يتجه إلى المغسلة الآلية وينتظر بينما السيارة تغسل آليا. تصل السيارات بشكل عشوائي بمعدل 20 سيارة في الساعة. زمن الخدمة هو تحديدا 2 دقيقة.

مع تمنياتي لكم بالنجاح

د. عدنان ماجد بري