جامعة الملك سعود
قسم الإحصاء وبحوث العمليات

بناء النماذج

بإستخدام

Excel and Vensim

تأليف د. عدنان ماجد عبدالرحمن بري
أستاذ الإحصاء وبحوث العمليات المشارك

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا ونبينا محمد وعلى آله وصحبه وسلم.

أما بعد.

هذه هي المسودة الأولى لكتاب بناء النماذج بإستخدام Excel and Vensim لطلاب مرحلة البكالوريوس.

وكما ذكرت في مقدمة كتبي السابقة " طرق التنبؤ الإحصائي – جزء أول – " و" النمذجة والمحاكاة بإستخدام Excel, SIMAN, Arena and General Purpose Simulation System (GPSS WORLD)" أن هذا الكتاب كسابقيه سيظل مسودة إلى ماشاء الله لأني وبإذن الله تعالى سوف أقوم بتطويره وتجديده وتحسينه بشكل مستمر وسيظل بشكله الإلكتروني هذا لأني أعتقد ان العلوم والتقنية تتطور يوميا وبشكل متسارع بحيث ان وضعها في كتاب جامد ستاتيكي لايتناسب مع ديناميكية الموضوع وخاصة في عصر ثورة المعلومات والإنترنت.

يغطي هذا الكتاب الأساسيات الأولية لموضوع بناء النماذج Model Building. والنماذج الذي نعنيها هنا هي نماذج لنظم حركية عشوائي Dynamic Stochastic Systems ووالتي تشكل معظم الأنظمة الحقيقية وكذلك لأنظمة حركية غير عشوائية والتي هي نادرة جدا. تعتبر النمذجة فنا وعلما وهي تعتمد علي الإبداع والخيال والمهارات الفردية مثلها مثل أي عمل خلاّق فمثلا لو أخذنا طالبين في فصل دراسي لتعلم النجارة فكلاهما لديه الخلفية العلمية والمهنية لأستخدام جميع أدوات النجارة ولكن لو اعطي كل واحد منهم نفس الآلات والمواد لأنتج كل واحد منهم كرسي مختلفا قد يكون احدها قطعة فنية والآخر يفي بالغرض فقط. وقد استعرضت النمذجة بإستخدام Microsoft Excel و Vesim في هذا الكتاب و كان إختياري لهذه البرامج هو إنتشارها الكبير و جودتها العالية وإستخدامها الواسع بألإضافة إلى وجود نسخة مجانية للطلاب من البرنامج Vesim على الإنترنت.

إن إستخدام برامج صفحات النشر مثل Excel في النمذجة والمحاكاة اصبح منتشرا في كثير من الجامعات، واصبحت نمذجة صفحات النشر Spreadsheet Modelling من المواضيع المهمة جدا والضرورية في التعليم الجامعي وما قبله وذلك لمقدرتها الهائلة لمعالجة البيانات بكل أشكالها بصورة لم تكن متوفرة من قبل إنتشار الحاسبات الآلية.

لقد تطرقت في هذا الكتاب إلى إستعراض النماذج الأولية Prototype Models التي تعتبر المكونات الأولية في بناء الكثير من النماذج المعقدة التي تمثل العالم الحقيقي، كما إستعرضت الأدوات الرياضية المهمة في بناء النماذج مثل المعادلات التفاضلية Differential Equations والفروقية Difference Equations وحساب المصفوفات Matrix Algebra and Cagculus وتمثيل فضاء الحالة State Space Representation. وفي الجزء الأخيرة من الكتاب تم إستعراض بناء بعض النماذج لأنظمة حركية مختلفة في حالات دراسية Case Studies.

هذا وارجوا من الله ان يوفقني في إنجاز هذا العمل لوجهه الكريم ولإثراء المكتبة العربية الفقيرة إلى مثل هذا الكتاب.
سيكون هذا الكتاب مجاني لأي طالب علم وسيكون متواجد على شبكة الإنترنت في الموقع http://www.abarry.ws/books/ModelBuildingBook.pdf
والله الموفق.

المؤلف
د. عدنان ماجد عبد الرحمن بري

جامعة الملك سعود
رجب 1423 هـ
سبتمبر 2002 م

محتويات الكتاب

مقدمة 3

الفصل الأول 9

أساسيات النمذجة: الغرض و الوضوح و الموارد 9

عالم الحقيقة وعالم النموذج 10

التفكير النظامي وحركية النظام 14

تعاريف أساسية 14

تعريف النموذج من وجهة نظر التفكير النظامي 15

تمثيل النظام في التفكير النظامي وحركية النظام 19

الفصل الثاني 20

المعادلات التفاضلية 20

المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى الخطية 20

المعادلات التفاضلية من الدرجات العليا 23

المعادلات الخطية بمعاملات ثابتة 23

الحالة المتجانسة 23

الحالة غير المتجانسة 25

خواص عامل التفاضل D 26

نظرية التحليل لعوامل 26

الجذور المنفصلة 27

الجذور المكررة 28

الجذور المركبة المتقارنة 28

الفصل الثالث 32

المعادلات الفروقية 32

المعادلات الفروقية الخطية من الدرجة الأولى 32

حل المعادلات الفروقية الخطية من الدرجة الأولى بإستخدام Excel 34

تقريب معادلة تفاضلية بمعادلة فروقية 40

المعادلات الفروقية الخطية بمعاملات ثابتة 43

الحل العام للمعادلة المتجانسة 44
الحل الخاص للمعادلة الكاملة 47
التصرف النهائي للحلول بإستخدام Excel 51
الفصل الرابع 56
جبر وحساب المصفوفات 56
العمليات الأساسية على المصفوفات 56
بعض الخواص المفيدة للمحددات 57
القيم المميزة Eigenvalues 58
المتجهات المميزة Eigenvectors 58
رفع مصفوفة مربعة لقوة 60
رفع e لقوة مصفوفة مربعة 61
تفكيك القيمة الشاذة SVD 61
حساب المصفوفات 61
مشتقة المصفوفة..... 61
تكامل المصفوفة 61
مشتقة المعكوس 61
الفصل الخامس 63
تمثيل فضاء الحالة 63
معادلات فضاء الحالة وحلها في المجال الزمني 63
التحويل إلى شكل الحالة 64
تحويل المعادلات التفاضلية من الدرجة n 64
تحويل نظام من الدرجة 3 إلى شكل الحالة 67
حالة المعادلات التفاضلية والجبرية المختلطة 67
تحويل الأنظمة غير الخطية إلى خطية 68
حل الأنظمة الخطية المستقرة 69
الأنظمة الخطية المستقرة المتجانسة 69
الأنظمة الخطية المستقرة غير المتجانسة 70
تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية 71

الحل بإستخدام Excel 72
تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية بواسطة Vensim 72
الفصل السادس 73
بعض النماذج الأساسية 73
نموذج النمو (أو الإنحلال) الخطي 73
نموذج النمو (أو الإنحلال) الأسي 74
نموذج النمو والإنحلال الخطي 75
نموذج النمو والأنحلال الأسي 75
النموذج التربيعي 76
نموذج الولادة والموت 77
نموذج منحنى النمو اللوجستي 78
نموذج النمو المحدود بشروط (لوجستي) 79
نموذج يوصف بالمعادلات التفاضلية لمتغيري حالة 80
نموذج يوصف بالمعادلات التفاضلية لثلاث متغيرات حالة 81
الفصل السابع 83
حالات دراسية لبناء بعض النماذج 83
1) بناء نموذج لحركية سوق 83
تعيين معالم النموذج بإستخدام Curve Expert 91
تعيين معالم النموذج بإستخدام Excel Solver 91
2) نموذج مخزون لقوة عاملة 96
العلاقات السببية في النموذج 97
دورات التغذية الخلفية Feedback Loops 99
معادلات النموذج 100
3) نموذج متتابعة فيبونتشي 105
نموذج شكل فضاء الحالة لمتتابعة فيبونتشي بإستخدام Vensim 105
4) النماذج الحركية العشوائية 107
الخاصية الماركوفية 107
تمثيل النماذج الحركية العشوائية الماركوفية بإستخدام Vensim 107

5) نموذج التشعب bifurcation 112
تمثيل نموذج التشعب بمخطط VenSim 112
6) نموذج تقريبي لعضلة في قلب 117
النموذج ممثل ببرنامج Vensim 117
7) نموذج جاذبات لورينتس Lorenz Attractors Models 123
تمثيل النموذج بواسطة Vensim 123
8) نموذج المفترس والضحية Prey and Predator Model 129
تمثيل النموذج بإستخدام Vensim 129
ألعلاقات السببية 132
الدورات الخلفية 132
ملحق (1) أسئلة وإجابات الإختبارات السابقة 134
المراجع 186

الفصل الأول:

أساسيات النمذجة: الغرض و الوضوح و الموارد

يعرف **النموذج** على انه : **تمثيل لحقيقة** ، فمثلا لو سئل عدة أشخاص ما هو النموذج قد يجيب احدهم : هو معادلة رياضية ، وقد يجيب آخر : هو قطار لعبة وآخرتكون إجابته : هو نموذج لمبنى يراد إنشائه ويجيب آخر : دمية ترتدي ثوب في أحد محلات الخياطة.

لو تأملنا العامل المشترك في إجاباتهم لوجدنا انه " تمثيل لحقيقة" ، فالمعادلات الرياضية تمثل ميكانيكية (حركية) نمو مجتمع تحت الدراسة مثلا و قطار اللعبة يمثل قطار حقيقي و نموذج المبنى يمثل الشكل الذي سيبدو عليه المبنى الحقيقي بعد إنشائه ، الدمية تمثل شكل الملبس وكيف سيظهر عند رتدائه.

التعريف السابق للنموذج غير كافي فكيف يمكننا تقييم ومقارنة النماذج المختلفة؟ فكل من الدمية والقطار اللعبة تمثيل لحقيقة ولكن هناك إختلاف كبير بينهم ولايمكن مقارنتهم. فمثلا مخطط شوارع مدينة ما ومخطط طرق السفر في البلدة التي تقع فيها المدينة كل منهما تمثيل للحقيقة ويبدوان متشابهين ولكن لايمكن إستخدام أحدهما مكان الآخر ، إذا هناك شيئ جوهري لتقيم النموذج ألا وهو **الغرض Purpose** وباتالي يصبح تعريف **النموذج** على انه : **تمثيل ذا غرض للحقيقة** ، فمخطط الشوارع هو تمثيل للحقيقة التي تبدو بها شوارع تلك المدينة لغرض الإستدلال على شوارعها وهو طبعا لايصلح للإستدلال على طرق السفر في تلك البلدة ولاحتى يصلح لتعيين نقاط إزدحام المرور في تلك المدينة ولكن هذا لايجعل النموذج سيئا. هناك أنواع مختلفة من قطارات الألعاب ، بعضها خاص للعب الأطفال وبعضها لمحبي جمع نماذج القطارات (مثل جمع الطوابع) وهكذا ، فللأغراض المختلفة تنتج نماذج مختلفة.

هناك شيئ جوهري آخر في النموذج وسوف نستعرضه با لمثال التالي: لو دعاك أحد الأصدقاء الجدد إلى منزله لأول مرة وانت طبعا لاتعرف الطريق ، فيمكن لصديقك أن يخط لك بسرعة مخطط للشوارع التي تؤدي إلى منزله ، قد يكون مخطط بسيط غير متقن أو قد يخرج لك مخطط هندسي منظم للمنطقة التي يسكن فيها أو مخطط يشمل المدينة بكاملها ويؤشر لك موقع منزله ، هذه المخططات قد يكون فيها درجات مختلفة من التفاصيل وبمقاييس رسم مختلفة ، وهذا يؤدي إلى مايسمى بدرجة الوضوح أو **الوضوح Resolution** ، فمثلا من الصعب تحديد تفاصيل الأشياء من صورة اخذت بآلة تصوير لم يعدل بعدها البؤري (بدون فوكس Focus) ومن مسافة بعيدة ولكن ستكون التفاصيل واضحة جدا ومحددة إذا اخذت بآلة تصوير من نوع جيد وبيد شخص متخصص في التصوير ومن بعد مناسب. فالنماذج ايضا لها درجة وضوح وهذا يتعين

بمقدار التفاصيل الضرورية والهامة التي تدخل في بناء النموذج. فهناك نماذج قليلة الوضوح Low resolution ونماذج عالية الوضوح High resolution .

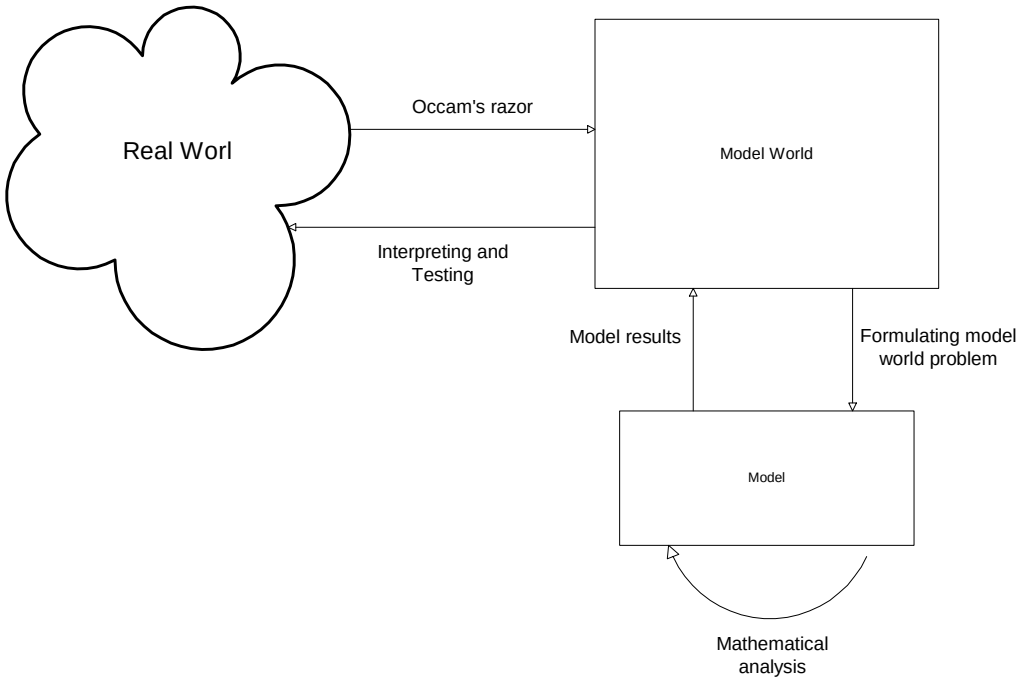
الشيئ الجوهري الأخير في بناء نموذج هو **الموارد Resources** والإمكانيات وتشمل المواد المعطاة والزمن المتاح والخبرة المتوفرة أو الممكن إكتسابها ضمن الزمن المتاح والدعم البشري والمالي ، فعلى قدر الموارد والإمكانيات نستطيع ان نبني نموذج للغرض المطلوب وبالوضوح المناسب ، فمثلا إذا اعطيت ورقة بيضاء وقلم رصاص ومسطرة فقط وطلب منك رسم مخطط للشوارع والمرافق حول جامعتك لكي يستخدمها الطلاب المستجدين والزمن المتاح لك خمس دقائق ، فبالموارد المعطاة سوف ترسم خريطة بخطوط مستقيمة أسود على ابيض وتضيف بعض العلامات التي تدل على المرافق المهمة ، الآن لو اعطي لك أقلام ملونة فإنك سترسم الطرق الرئيسية بلون والفرعية بلون آخر والمرافق بألوان تدل على نوعيتها فمثلا المساجد بلون والمطاعم بلون والملاعب بلون آخر وهكذا تزيد التفاصيل والوضوح بقدر الهدف المطلوب والموارد المتاحة فمثلا رسم أرصفة أو أشجار أو منازل لاتخدم الهدف المطلوب وقد تملأ الخريطة بتفاصيل تقلل من وضوحها كما انها تحتاج الى وقت اطول من المتاح.

من المبادئ المهمه في بناء النماذج والذي سنتبعه في منهجنا هو **مبدأ التصميم من الأسفل للأعلى Bottom up design** وهو البدء بنموذج بسيط قليل الوضوح ثم زيادة التفاصيل المناسبة بقدر ماتسمح الموارد وحتى يتحقق الغرض من النموذج. هذا عكس مبدأ التصميم من الأعلى للأسفل Top down design والذي يبدأ بتفاصيل كثيرة ومعقدة ثم يزيل منها التفاصيل غير المهمة ، والذي لن نتبناه هنا.

في دراستنا سوف نتطرق فقط **للنماذج الرياضية** وهي نماذج تبنى بإستخدام الطرق الرياضية (علاقات جبرية ، علاقات منطقية ، توزيعات إحتمالية ، خوارزمات و برامج حاسوبية الخ). وسوف نفهم بأن النمذجة هي عملية بناء نموذج رياضي.

عالم الحقيقة وعالم النموذج Real World and Model World :

العالم الحقيقي الذي نعيش فيه معقد جدا بشكل يستعصي على الانسان فهم المشاكل الحقيقية بشكل كامل او حتى جزئي ولهذا يلجأ الانسان الى التقريب والتبسيط لشرح طبيعة هذه المشاكل لكي يحاول حلها ، يمكن تمثيل العالم الحقيقي بشكل سحابة ضبابية كما في الشكل التالي:



ويقرب العالم الحقيقي أو يهذب على شكل هندسي بسيط (تسوى أطرافه وحدوده بموس اوكهام) والذي يمثل عالم النموذج ، وعالم النموذج هو تقريب وتبسيط للعالم الحقيقي وللإنتقال من العالم الحقيقي إلى عالم النموذج يستخدم **موس اوكهام Occam's Razor** ، وهو مبدأ فلسفي علمي يقول: **لتبسيط الأشياء (المشاكل) إستبعد كل التفاصيل غير الضرورية أو على الأقل إبدأ بأهم التفاصيل التي تحدد هذا الشيئ (المشكلة)** ، هذا المبدأ بني عليه مبدأ **او قاعدة الشح Parsimony Principle** في البحث العلمي والذي يقول : **إذا كان هناك أكثر من نموذج واحد يعطي تقريبا نفس النتائج فالنموذج الذي يحوي اقل عدد من المتغيرات والمعالم هو النموذج الأفضل.** ولا أدل على هذا المبدأ من قانون اينشتين $E = mc^2$ المشهور والذي هو من ابسط القوانين الرياضية وأهمها على الإطلاق ، وكذلك قانون الحركة لنيوتن $m\ddot{x} = F$ وغيرها من القوانين الرياضية البسيطة التركيب العظيمة المدلولية.

من وجهة نظري ان ما يقوم به بعض العلماء والباحثين من تكلف في وضع صيغ وقوانين رياضية مطولة ومعقدة من عدة سطور (بعضها من صفحة او اكثر) لوصف ما أستنبطوه متباهين بتعقيدها وغموضها ، قد بعدوا كل البعد من الإستنباط الصحيح وغطوا فشلهم وعدم إستيعابهم للمشكلة الحقيقية بمثل هذه القوانين والصيغ المتكلفة والبعض يأخذها من باب (الموضة) ويعمل كما عمل غيره بل يعتقد ان إستنباطه لن يكون مقبولا ومحترما في الأوساط

العلمية بدون معادلات رياضية معقدة وطويلة تحوي الكثير من المتغيرات والمعالم غير الضرورية. وكبرهان على ذلك في الإنحدار المتعدد قيمة R^2 تزداد كل ما أضفنا متغير مستقل إلى المعادلة حتى لوكان هذا المتغير لايمت بأي صفة سببية أو منطقية إلى المتغير التابع مثل دخل فئة من ضباط الجيش و أطوال الأطفال من سن 5 إلى 15 سنة في نفس المجتمع (كل منهم يزداد وهذا يعطي ترابط قوي وبالتالي زيادة في R^2) . وهكذا نرى الكثير من الباحثين تزدحم معادلاتهم بالكثير من التفاصيل غير الضرورية وهنا يأتي موس أوكهام: إستبعد كل التفاصيل غير الضرورية جدا وابقي النموذج في ابسط اشكاله.

عملية تحويل العالم الحقيقي إلى عالم النموذج هي في الحقيقة أهم وأصعب خطوة في بناء النماذج والتي نقوم بها مستهدين بمبدأ موس اوكهام ففي عملية بناء النموذج نستبعد كل التفاصيل غير المهمه مسترشدين بالغرض والوضوح او التي لايمكن معالجتها مسترشدين بالموارد المتاحة. فنحن نقطع العالم الحقيقي الى حجم يمكن التعامل معه كما لو قطع بموس. مبدأ موس اوكهام أداة حساسة وخطرة ، إذا اقتطعت الكثير فإن الحل المستنتج من النموذج لن يكون له اي صلة بالمشكلة الحقيقية وإذا اقتطعت القليل فإن النموذج سيصعب حلة بالموارد المتاحة. سوف نشرح الشكل السابق وموس اوكهام بالمثال التالي:

لقد درست في الرياضيات في موضوع التفاضل والتكامل موضوع القذائف Projectiles والتي تتبع مسار قطع مكافئ ، الإشتقاق يبدأ بمعدل تعجيل ثابت g وشروط اولية للمسافة والسرعة s_0 و v_0 ونكامل المعادلة $a(t) = g$ مرتين لنحصل على الإزاحة كدالة للزمن $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$. على ضوء الشكل السابق وموس اوكهام فإن المشكلة في العالم الحقيقي تقوم بالتنبؤ عن حركة قذيفة أو اشياء مماثلة كرمي حجر او ماشابهه ، قمنا بصياغة المشكلة الحقيقية ونقلها إلى عالم النموذج مستخدمين موس اوكهام الذي افترض ان العالم الحقيقي مسطح وبمعدل تعجيل او جاذبية ثابت وفي الفراغ (عدم وجود غلاف جوي) مع عدم وجود اي قوى مؤثرة اخرى ، ضمن هذه الفروض او هذا العالم فإن نموذج المسارعلى شكل قطع مكافئ امكن تشكيلة وحله ، ثم اختبر في المعامل وساحات المعركة مثلا ، لهذة الأغراض سيبدوا النموذج مناسبا جدا ، الخطر هنا يظهر في الفرضية بأن النموذج يتنبأ ان جميع القذائف لها حركة تتبع مسار على شكل قطع مكافئ في العالم الحقيقي ماذا لو رمينا ريشة أو كرة طاولة (بنج بونج) في وجود رياح؟. ايضا لاحظ مهندسين علم القذائف ان فرضية معدل التعجيل الثابت وإنعدام مقاومة الهواء غير صحيحة وتعطي أخطاء قد تفصل بين النصر والهزيمة. ولكن لغرض التقريب فإن رمي حجارة أو اشياء ثقيلة في يوم فيه الرياح خفيفة فإن نموذج المسار القطع مكافئ

مناسب جدا. من المهم جدا اثناء كتابتنا للتقريرعن نتائج حل النموذج ان نضع الفرضيات التي بني عليها النموذج ففي مثال القذائف أفترضنا ان العالم الحقيقي مسطح لايوجد غلاف جوي (أي في الفراغ) وجاذبية ثابتة ولاتوجد قوى اخرى. هذه الفرضيات هي جزء مهم وحيوي من النموذج فعندما يرمي شخص ما ريشة ويقول لك : انظر! نموذجك خطأ ، فسترد عليه : حسنا! الريشة كانت ستتبع مسار على شكل قطع مكافئ لو رميت في الفراغ . قد يرد عليك ان نموذجك غير واقعي لأننا لانعيش في فراغ وسيكون ردنا عليه : للأشياء الثقيلة والتي ترمى لمسافات قصيرة فإن تأثيرعدم وجود فراغ هو تأثير يمكن إهماله وهو ماتثبته التجارب المعملية. الفرضيات والإختبارات للنموذج هي من اهم خطوط الدفاع ضد المشككين والناقدين للنموذج.

مشروع: (ينصح الطالب بحل هذا المشروع لأنه مهم جدا لإستيعاب المادة)

لنفترض اننا سوف نقوم بمشروع خدمة ليموزين بتوصيل الزبائن من مدينة ما الى اقرب مطار. افترض ان المسافة بين المدينة والمطار 50 كيلومتر للإتجاه الواحد. نريد ان نحسب تكلفة البنزين لهذة الخدمة لكي نحسب السعر المناسب لمقاضاة الزبون. إذا افترضت ان السيارة لها متوسط إستهلاك 25 كلم/جالون. خذ بالإعتبار ما يلي:

- اسعار البنزين الحالية قد تتغير
- اوقات التوصيل تتأثر بوجود زحام مروري أو عدمه
- حالة الجو (امطار، غبار، رياح قوية الخ)
- إختلاف المسافات داخل المدينة (إذا كان المطار مثلا في شمال المدينة فإن الزبائن في الجنوب تستغرق رحلتهم مسافة اطول)
- وجود مكان فارغ لإنزال الزبون عند الوصول للمطار ام الإنتظار لفراغ مكان

نستطيع إيجاد إعتبارات اخرى كثيرة ولكن ماذا عن موس اوكهام؟ هل كل التفاصيل السابقة مهمة؟ ماذا نأخذ منها واي منها نقتطع؟ للغرض المطلوب وضمن الموارد المتاحة؟

التفكير النظامي وحركية النظام

التعامل مع مشاكل العالم الحقيقي حسب الإتجاه التقليدي يقوم على علاقة السبب والتأثير Cause and Effect البسيطة ويأخذ أجزاء المشكلة بشكل منعزل عن بعضها البعض.

الإتجاه النظامي أو التفكير النظامي System Approach/ Thinking لايقطّع المشكلة إلى أجزاء منعزلة بل ينظر لها ككل معتبرين البيئة التي فيها النظام إذ توجد روابط متعددة والتي لابد من اخذها في الإعتبار وإستكشافها بدلا من ان ننظر إلى كل جزء على حدة ثم إعادة تجميعها لاحقا. فالتفكير النظامي يركز على محاولة التعرف وفهم تراكيب وتصرفات نظام من خلال إستخدام تراكيب أولية ومن ثم تبنى التنبؤات عن تصرف النظام على هذه التراكيب الأولية المتعرف عليها. كما ان حركية النظام تتعلق بالنظر الى النظام من ناحية خواصه التركيبية المتغيرة مع الزمن والتى تتطلب بناء نماذج لإستكشاف النظام تحت الدراسة وهذا يسمح بإجراء إختبارات للتحقق من مناسبة نمذجة النظام والتي بدورها تساعد على التحقق من التفكير او الإتجاه النظامي. السبب في تبني الإتجاه النظامي يعود إلى ان الأنظمة بطبيعتها لاتتصرف حسب تفكيرنا البديهي بل قد تتصرف خلافا للبديهه ولهذا فإن الإتجاه التقليدي لايصلح هنا ابدا. النمذجة أو حركية النظام Modeling or System dynamics هي احد الضروريات في التفكير النظامي لأنها تتحقق من الفرضيات والحلول.

تعاريف اساسية:

النظام System :

مجموعة من الأشياء تتفاعل وتعتمد على بعضها البعض.

كائن Entity :

وهو شيئ في النظام لنا فيه إهتمام خاص.

صفة Attribute :

وهو خاصية او صفة للكائن.

نشاط Activity :

أي عملية تسبب تغيير في حالة النظام.

حالة النظام او متغيرات الحالة State of the System or State Variables :

وهي متغيرات تصف كل الكائنات وصفاتها والأنشطة في النظام عند لحظة معينة. ويدرس تطور النظام بتتبع التغيرات في حالته.

مثال:

لنعتبر مصنع ينتج بضاعة بتجميع قطعها. الجزئين الأساسيين في هذا النظام هما قسم التصنيع والذي يصنع القطع وقسم التجميع والذي يجمع هذه القطع لإنتاج البضاعة. هناك ايضا قسم المشتريات والذي يؤمن المواد الخامة وقسم الشحن الذي يجهز البضاعة للشحن وقسم مراقبة الإنتاج والذي يستقبل الطلبات علي البضاعة ويقسم العمل علي بقية الأقسام.

في هذا النظام:

الكائنات هي: الاقسام، الطلبات، الأجزاء، البضائع الخ

النشاطات هي: عملية التصنيع في الأقسام

الصفات هي: الكمية لكل طلب، نوع القطعة، عدد المكائن في كل قسم الخ

والجدول التالي يعطي امثلة لأنظمة معينة وبعض مكوناتها:

النظام	كائنات	صفات	انشطة
مرور	سيارات	سرعة، مسافة	سواقة
بنك	زبائن	دائن، رقم الحساب	سحب نقد، طلب قرض
إتصالات	مكالمات، رسائل	طول المكالمة، جهة الإتصال	إرسال، توصيل
سوق مركزي	زبائن	قائمة التسويق	دفع قيمة المشتريات

وهذا الجدول لايعطي حصر كامل لجميع الكائنات والصفات والأنشطة لهذه الأنظمة لأن ذلك يتطلب معرفة الأهداف التي من اجلها ندرس النظام. وإعتمادا علي الأهداف المطلوبة يمكن تحديد وصف أدق للنظام ومكوناتة.

تعريف النموذج من وجهة نظر التفكير النظامى:

سبق ان تطرقنا إلى تعريف مبدئي للنموذج على انة تمثيل للحقيقة لتحقيق غرض معين وبدرجة وضوح مناسبة تحت ضوابط الموارد المتاحة. ويعرف من جهة التفكير النظامي System Thinking على انه تجريد للنظام يتكون من تجمع لمعلومات حول النظام لغرض دراسته. وسوف نستفيض في هذا لاحقا.

بيئة النظام:

يتأثر النظام بالتغيرات التي تحدث خارجه كما انه يؤثر علي المحيط من حوله مثل هذه التغيرات تؤثر علي بيئة النظام. فمن المهم جدا عند نمذجة النظام ان نميز الحدود بين النظام وبيئته وهذا يتحدد بمعرفة الأهداف من وراء دراسة هذا النظام.

ففي مثال المصنع العوامل التي تتحكم بالطلبات علي المنتجات تعتبر خارج تأثير النظام ولهذا فهي جزء من بيئة النظام ولكن إذا كان للعرض تأثير علي الطلب فيجب اخذ ذلك بالأعتبار إذ ان هناك علاقة بين مخرجات المصنع ووصول الطلبات وتعتبر هذة العلاقة نشاط من انشطة النظام.

الأنشطة الداخلية Endogenous Activities:

وتصف الأنشطة داخل النظام.

الأنشطة الخارجية Exogenous Activities:

وتصف الأنشطة في بيئة النظام والتي تؤثر علي هذا النظام. النظام الذي لايتأثر بأنشطة خارجية يسمي نظام مغلق بعكس النظام الذي يتأثر بالأنشطة الخارجية والذي يوصف بأنه نظام مفتوح.

الأنشطة المحددة Deterministic Activities:

وهي التي يمكن تحديد نتائجها بشكل تام من مدخلاتها.

الأنشطة العشوائية Stochastic Activities :

وهي التي يتغير تأثيرها بشكل عشوائي وتكون لنتائجها إمكانيات متعددة توصف بتوزيع إحتمالي فمثلا الوقت الذي تستغرقه آلة للتجميع يوصف بتوزيع إحتمالي كما ان الزمن بين إعطال آلة يتغير بشكل عشوائي.

الأنظمة المتصله Continuous Systems:

وهي التي تتغير فيها حالة النظام بشكل متصل ومستمر فمثلا إتجاه حركة طائرة في مسار جوي تحت تحكم الطيار الآلي تحدث بشكل ناعم Smooth لتصحيح الإتجاه.

الأنظمة المنفصلة Discrete Systems:

والتي تتغير فيها حالة النظام بشكل متقطع مع الزمن فمثلا إكمال بضاعة في الصنع يحدث بشكل متقطع، وصول طلب علي البضائع يحدث بشكل متقطع الخ.

نمذجة النظام System Modeling:

لدراسة نظام ما يجب ان نكون او نبني نموذج Model لوصف هذا النظام لغرض إجراء التجارب للإجابة علي أسئلة وإفتراضات لايمكن إجرائها علي النظام مباشرة وذلك حتي لايضطرب النظام الأصلي ويحدث إرتباك في عمله يؤدي الي تغيير النظام وفقدانه لخواصه

الأصلية كما ان دراسة النموذج بدلا من النظام تمكن من تجريب عدة حوارات حول النظام وذلك بإعادة النموذج الي الحالة الأصلية عند إجراء كل حوار بعكس النظام الأصلي الذي إذا تغير لايمكن إعادتة مرة اخرى لحالتة الأصلية فمثلا لدراسة نظام إقتصادي بتغيير سياسات العرض والطلب قد يؤدي الي نتائج لايمكن عكسها. كما أن النموذج يمكن ان يدرس في أزمنة إفتراضية فمثلا يمكن إجراء محاكاة للنظام بإستخدام النموذج ومعرفة بعض تصرفات النظام لفترات عدة اشهر او سنين في دقائق قليلة. وكذلك يمكن عن طريق النموذج دراسة النظام قبل إنشائه ووجوده اصلا فمثلا نريد بناء مصنع ولدينا عدة خيارات للبناء فلتحديد اي خيار افضل نكون نموذج لكل خيار ونحاكي تصرف المصنع تحت هذه الخيارات.

أنواع النماذج:

فيزيائية (مادية) Physical Models:

وهي التي تبني بمواد حسية مثل بناء نموذج لطائرة في مرحلة التصميم وذلك لإختبار هيكلها تحت ظروف معينة.

رياضية (تحليلية او تجريدية) Mathematical Models:

والتي نستخدم لبنائها علاقات رياضية (توزيعات إحتمالية، دوال، جداول، رسومات الخ)

هناك ايضا تصنيف للنماذج الجامدة Static Models والتي لاتتغير حالتها مع الزمن والنماذج الحركية أو الديناميكية Dynamic Models والتي تتغير حالتها مع الزمن.

وكمثال علي النماذج الفيزيائية الجامدة نموذج لبناء المسجد الحرام، نموذج سفينة او طائرة في نافذة مكتب سياحي الخ وكمثال لنموذج فيزيائي حركي نماذج آلة الإحتراق الداخلي في ورشة كلية الهندسة وكثير من النماذج الفيزيائية الحركية في معامل قسم الفيزياء بكلية العلوم.

تمرين: أذكر أمثلة لبعض النماذج الرياضية الجامدة وكذلك الحركية.(أيعاذ: الظواهر التي توصف بمعادلات تفاضلية أو فروقية تكون حركية)

سوف ندرس تقنية بناء النماذج عن طريق حالات دراسة Case Study لأنظمة مختلفة في مجالات الأعمال والإقتصاد والبيئة والفيزياء والطب والمجتمع الخ

تمثيل النظام في التفكير النظامي وحركية النظام:

تعاريف أساسية:

المتاع Stock :

أي شيئ يتغير مع الزمن (ديناميكي، متحرك) يزداد وينقص ويسمى ايضا مستوى Level او متغير حالة State Variable ، المتاع يستوعب الأشياء لفترة زمنية وهذه الأشياء المستوعبة لاتظهر أو تختفي لحظيا إذ انها تضاف أو تسحب (تقل) خلال فترة زمنية.

أمثلة: كمية المياه في خزان، عدد الأسهم التي يمتلكها مستثمر، الطاقة المخزنة في بطارية، عدد الكائنات في مجتمع، كمية النقود في حساب بنكي، الخوف، الغضب، الكراهية، الإستيعاب، ألخ

الأنسياب Flow :

هو معدل Rate يغير من حالة المتاع، فهو يُزيد أو يُنقِص من المتاع. الإنسياب الذي يزيد المتاع يسمى ألإنسياب الداخل أو المصدر Source، والذي ينقص المتاع يسمى ألإنسياب الخارج أو الغور Sink .

أمثلة: كمية المياه المغذية للخزان (إنسياب داخل أو مصدر) او المسحوبة منه (إنسياب خارج أو غور)، عدد الأسهم المشتراة (إنسياب داخل أو مصدر) أو المباعة (إنسياب خارج أو غور)، البطاريات الجافة لها أنسياب خارج فقط وهي الطاقة الكهربائية المستخدمة، عدد الكائنات في مجتمع تزيد بالولادة (إنسياب داخل أو مصدر) وتقل أو تنقص بالموت (إنسياب خارج أو غور)، كمية النقود في حساب بنكي تزداد بالإدخار (إنسياب داخل أو مصدر) وتنقص بالصرف (إنسياب خارج أو غور)، الخوف يزداد بعدم الشعور بالأمان (إنسياب داخل أو مصدر) وينقص بالطمئنينة (إنسياب خارج أو غور)، الغضب يزداد بالتحرش (إنسياب داخل أو مصدر) ويقل بالتعامل الطيب (إنسياب خارج أو غور)، الكراهية (إنسياب داخل أو مصدر) تزداد بالتنافس وتقل بالتعاون (إنسياب خارج أو غور)، الإستيعاب يزيد بالإطلاع (إنسياب داخل أو مصدر) ويقل بالإهمال (إنسياب خارج أو غور)، الخ. يمكن ان ننظر الى الإنسياب على انه "فعل" إذ انه يقوم بفعل او عمل في النموذج على "أسماء" (المتاع)

المحولات Converters أو المتغيرات المساعدة Auxiliary Variables :

تحوى أرقام، تقوم بعمليات حسابية أوجبرية أو منطقية وتعتبر المتحكمة Controllers في النموذج.

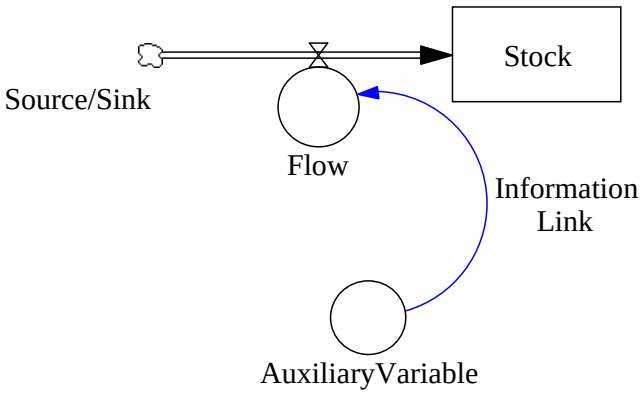
أمثلة: الطوافة في خزان المياه، سعر السهم، الجهد، الإخصاب، الدخل الزائد عن الحاجة، التعرض للأخبار المحزنة، نوعية التحرش، نوعية التنافس، عدد ساعات الإطلاع، الخ وينظر اليه كحال او ظرف adverb

الموصلات Connectors أو رابطة المعلومات Information Link :

وهي التي تحمل أو تربط المعلومات من جزء إلى آخر في النموذج، من المهم أن نلاحظ ان الموصلات لاتنقل كميات مادية (مثل المياه او الطاقة او النقود) بل هي تنقل معلومات فقط فقيمة جزء من النموذج تنتقل لجزء آخر.

أمثلة: ذراع الطوافة في الخزان ينقل مدى إرتفاع المياه الى الصمام، سعر السهم يؤثر علي عدد الأسهم التي يمكن شرائها، كمية الجهد لتشغيل جهاز، عدد الإناث القادرات علي الإنجاب، كمية الدخل الزائد عن الحاجة، مقدار تعرضك للأخبار المحزنة، طول فترة التحرش، الخ.

ويمثل النظام بالتفكير النظامي وحركية النظام كالتالي:



الفصل الثانى:

المعادلات التفاضلية Differential Equations

المعادلات التفاضلية هي عبارة عن معادلات جبرية تتكون حدودها من مشتقات لدالة لمتغير جبري قابلة للتفاضل فمثلا لو كان $x = f(t)$ فإن التالي معادلات تفاضلية للمتغير $x = f(t)$

$$\frac{dx}{dt} + tx + 3 = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 14x - 10 = 0$$
$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x + 2 = 0$$

وتتميز المعادلات التفاضلية بدرجتها Degree وخطيتها Linearity وسوف نتطرق إلى المعادلات من الدرجات الأولى والثانية والخطية. وتحل المعادلات التفاضلية بعدة طرق نستعرض منها ما يناسب مستوى هذا المقرر.

اولا: المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى الخطية:

وهي على الشكل

$$f(t,x)\frac{dx}{dt} + h(t,x) = 0$$

حيث $f(t,x)$ و $h(t,x)$ دوال خطية في t و x.

حل معادلات تحوي متغيرات قابلة للفصل:

إذا كانت كل من $f(t,x)$ و $h(t,x)$ يمكن وضعها الشكل

$$f(t,x) = p(t)q(x)$$
$$h(t,x) = r(t)s(x)$$

أي يكون شكل المعادلة التفاضلية هو

$$p(t)q(x)\frac{dx}{dt} + r(t)s(x) = 0$$

وعلى شرط ان $s(x) \neq 0$ لجميع قيم x في المجال المعطى و $p(t) \neq 0$ لجميع قيم t في المجال المعطى، بقسمة طرفي المعادلة على $s(x)\,p(t) \neq 0$ نستطيع فصل المتغيرات كالتالي

$$\frac{q(x)}{s(x)}dx + \frac{r(t)}{p(t)}dt = 0$$

ونحصل على الحل بالتكامل المباشر

$$\int \frac{q(x)}{s(x)}dx + \int \frac{r(t)}{p(t)}dt = C$$

حيث C ثابت إختياري يعتمد على الشروط الأولية.

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dx}{dt} - \frac{1-x}{1+t} = 0$$

الحل:

نقسم طرفي المعادلة على $x-1$ على شرط أن $x \neq 1$ فنحصل على

$$\frac{1}{1-x}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{1+t} = 0, \quad x \neq 1$$

بضرب الطرفين في التفاضل dt وترتيب الحدود نجد

$$\frac{dx}{1-x} = \frac{dt}{1+t}, \quad x \neq 1$$

المتغيرات الآن اصبحت مفصولة عن بعضها البعض ويمكن أخذ التكامل لكل طرف

$$\int \frac{dx}{1-x} + \ell n\, C = \int \frac{dt}{1+t}, \quad x \neq 1$$

أو

$$-\ell n|1-x| + \ell n C = \ell n|1+t|, \; x \neq 1$$

أي

$$|(1-x)(1+t)| = C, \; x \neq 1$$

ونحل للمتغير التابع x بدلالة المتغير المستقل t

$$x = 1 \pm \frac{C}{1+t}, \; x \neq 1$$

مثال آخر:

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$t\frac{dy}{dt} - (x-t) = 0, \; y \neq 0$$

الدوال $f(t,x)=t,\quad h(t,x)=x-t$ هي دوال متجانسة من الدرجة الأولى (يقال أن الدالة $g(x,y)$ متجانسة من الدرجة n إذا حققت العلاقة $g(kx,ky)=k^n g(x,y)$) وهذه الحقيقة تساعد في الحل كالتالي:

بتعويض $x=st$ ووضع المعادلة على شكل تفاضلات نجد

$$t(s-1)dt-t(s\,dt+t\,ds)=0, t\neq 0$$

بترتيب الحدود بالنسبة للمتغير t والتكامل نجد

$$\int ds=-\int\frac{dt}{t}+C, t\neq 0$$

أي

$$s=C-\ell n|t|, t\neq 0$$

أو بدلالة المتغير x

$$x=t\left(C-\ell n|t|\right), t\neq 0$$

المعادلة الخطية من الدرجة الأولى:

ولها الشكل العام

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$$

الحل يعطى بالعلاقة

$$x=Ce^{-\int P(t)dt}+e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$$

حيث الحد الأول يسمى الدالة المكملة Complementary Function ويرمز له x_{CF} والحد الثاني الحل الخاص Particular Solution ويرمز له x_{PS} أي الحل يكون على الشكل $x=x_{CF}+x_{PS}$.

<u>مثال:</u>

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt}+tx=t$$

نوجد الدالة المكملة $x_{CF}=Ce^{-\int P(t)dt}$ وذلك بأخذ $P(t)=t$ فنجد أنها $x_{CF}=Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$ والحل الخاص $x_{PS}=e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$ حيث $Q(t)=t$ فنجد $x_{PS}=e^{-\frac{1}{2}t^2}\int te^{\frac{1}{2}t^2}dt=1$ ويكون الحل العام General Solution

$$x=Ce^{-\frac{1}{2}t^2}+1$$

لاحظ ان الحل العام يحوي ثابت إختياري واحد C. لإيجاد الثابت الإختياري نحتاج إلى شروط أولية Initial Values (IV) لتكن $x=0$ عندما $t=0$ فبالتعويض نجد $0=C+1\Rightarrow C=-1$ ويكون الحل العام تحت الشروط الأولية $x=1-e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}=te^{2t}$$

المعادلة تبدو من الدرجة الثانية ولكن بوضع $y=\frac{dx}{dt}$ نجد

$$\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t}y=te^{2t}$$

وهي من الدرجة الأولى في y. يترك حلها كتمرين للطالب.

المعادلات التفاضلية من الدرجات العليا: Higher Order Differential Equations

أولا: المعادلات الخطية بمعاملات ثابتة Linear Equations with Constant Coefficients

الحالة المتجانسة Homogeneous Case

وهي على الشكل

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=f(t)$$

سوف نستخدم ترميز خاص لتبسيط شكل المعادلة هو $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ و $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ وبشكل عام $x^{(n)}=\frac{d^nx}{dt^n}$ فتصبح المعادلة السابقة على الشكل

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)$$

وتسمى معادلات تفاضلية بمعاملات خطية ثابتة، حيث $a_1, a_2, ..., a_n$ ثوابت (غالبا ماتكون حقيقية). سوف ندرس اولا الشكل المتجانس لهذه المعادلات والتي يكون فيها $f(t)=0$ أي المعادلات على الشكل

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0$$

لحل هذه المعادلات نجرب الحل $x = Ce^{\lambda t}$ حيث $e^{\lambda t} \neq 0$ ولثابت إختياري C، بالتعويض في المعادلة السابقة ينتج

$$\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\right)e^{\lambda t} = 0$$

$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ تسمى كثيرة الحدود المميزة Characteristic Polynomial. قيم λ المسموح بها هي حلول (أو جذور أو أصفار) المعادلة $P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ والتي تسمى المعادلة المساعدة Auxiliary Equation وحيث أن $P(\lambda)$ هي كثيرة حدود من الدرجة n فإن $P(\lambda)=0$ لها n من الجذور $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ وإذا كانت $a_1, a_2, ..., a_n$ حقيقية فإن هذه الجذور إما ان تكون حقيقية او ازواج من الأعداد المركبة المتقارنة Complex Conjugates . كل من التعابير $x_i = C_i e^{\lambda_i t}, i = 1, 2, ..., n$ هو حل للمعادلة التفاضلية لثابت إختياري C_i ويكون

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$$

أيضا حلا ويسمي الدالة المكملة Complementary Function وفي حالة المعادلات المتجانسة يكون الحل العام هو الدالة المكملة.

<u>مثال:</u>

حل المعادلة التفاضلية $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$

<u>الحل:</u>

المعادلة المساعدة $P(\lambda) \equiv \lambda^2 + 3\lambda + 2$ وجذور $P(\lambda)=0$ هي $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$ ويكون الحل العام

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

بثابتين إختياريين يحددان من الشروط الأولية.

حالة تكرار الجذر Repeated Roots :

إذا تكرر جذر مثلا $\lambda = \lambda_1$ عدد r من المرات فإن الحلول المرتبطة بهذا الجذر هي

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, ..., t^{r-1} e^{\lambda_1 t}$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\dddot{x}+4\ddot{x}+5\dot{x}+2x=0$

الحل:

المعادلة المساعدة $P(\lambda)=\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2=(\lambda+1)^2(\lambda+2)$ وجذور $P(\lambda)=0$ هي

$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=-2$ الجذر -1 مكرر مرتين فيكون الحل العام

$$x=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+C_3e^{-2t}$$

أوجد قيم الثوابت الإختيارية للشروط الأولية $x=1,\dot{x}=0,\ddot{x}=1$ عندما $t=0$

من الحل العام نوجد عن طريق التفاضل

$$\dot{x}=-C_1e^{-t}+C_2(1-t)e^{-t}-2C_3e^{-2t}$$
$$\ddot{x}=C_1e^{-t}-C_2(2-t)e^{-t}+4C_3e^{-2t}$$

وبالتعويض بالقيم الأولية نجد

$$C_1+C_3=1$$
$$-C_1+C_2-2C_3=0$$
$$C_1-2C_2+4C_3=1$$

والتي لها الحلول $C_1=-1,C_2=3,C_3=2$ وبالتعويض نحصل على الحل الخاص

$$x=(3t-1)e^{-t}+2e^{-2t}$$

ثانيا: المعادلات الخطية بمعاملات ثابتة Linear Equations with Constant Coefficients الحالة غير المتجانسة Inhomogeneous Case :

الحل العام للمعادلات غير المتجانسة

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)$$

هو على الشكل $x=x_{CF}+x_{PS}$ حيث x_{CF} يسمى الدالة المكملة Complementary Function

و x_{PS} يسمى الحل الخاص Particular Solution.

لقد رأينا في الفقرة السابقة كيفية إيجاد الدالة المكملة، وسوف نستعرض الآن إيجاد الحل الخاص.

طرق إيجاد الحل الخاص:

طريقة العامل D:

تعريف: عامل التفاضل D ويعرف بالعلاقة $D\equiv\frac{d}{dt}$ فمثلا $D^2\equiv\frac{d^2}{dt^2}$ و $D^n\equiv\frac{d^n}{dt^n}$.

نعرف عامل كثيرة الحدود Polynomial Operator $P(D)\equiv D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n$ بالعلاقة

$$P(D)\,f(t) \equiv \left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n\right) f(t)$$
$$= f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n f(t)$$

حيث $f(t)$ دالة قابلة للتفاضل n مرة (لاحظ أن الحد a_n هو $a_n D^0$ و $D^0 x(t) = x(t)$ أي عامل تفاضل الوحدة).

مثال:

ضع المعادلة التفاضلية التالية على شكل عامل التفاضل D

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = te^{-t}$$
$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^{-t}$$

الحل:

$$D^2x - 3Dx + 2x = te^{-t}$$
$$\left(D^2 - 3D + 2\right)x = te^{-t}$$

هنا $P(D) \equiv D^2 - 3D + 2$

خواص عامل التفاضل D :

إذا كان كل من $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتفاضل وكان $P(D), Q(D), R(D)$ عمال كثيرات حدود فإن عمال كثيرات الحدود لها الخواص التالية

$$1)\left[P(D)+Q(D)\right] f(x) = P(D)\,f(x) + Q(D)\,f(x)$$
$$2)\left[P(D)Q(D)\right] f(x) = P(D)\left[Q(D)\,f(x)\right]$$
$$3)\; D\left(aD^r\right) f(x) \equiv aD^{r+1} f(x)$$
$$4)\; P(D)\left[f(x)+g(x)\right] \equiv P(D)\,f(x) + g(x)\,f(x)$$
$$5)\; P(D)+Q(D) \equiv Q(D)+P(D)$$
$$6)\left[P(D)Q(D)\right]R(D) \equiv P(D)\left[Q(D)R(D)\right]$$
$$7)\; P(D)\left[Q(D)+R(D)\right] \equiv P(D)Q(D) + P(D)R(D)$$
$$8)\;(D-\lambda)Q(D) \equiv DQ(D) - \lambda Q(D)$$

نظرية التحليل لعوامل The Factorization Theorem

لنفترض أن كثيرة الحدود $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ لها عوامل $(\lambda-\lambda_1),(\lambda-\lambda_2),...,(\lambda-\lambda_n)$ عندئذ

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n \equiv (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)$$

لاحظ ان الطرف الأيمن يمكن ان يستبدل بأي تباديل Permutaion له.

مثال:

$$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=\cos t$$
$$\left(D^2+5D+6\right)x=\cos t$$
$$\left(D+2\right)\left(D+3\right)x=\cos t$$
$$\left(D+3\right)\left(D+2\right)x=\cos t$$

مثال: الجذور المنفصلة Distinct Roots

لننظر الى المعادلة العامة من الدرجة الثانية في شكل عواملها

$$\left(D-\lambda_1\right)\left(D-\lambda_2\right)x=0,\quad \lambda_1\neq\lambda_2$$

عوض $\left(D-\lambda_2\right)x=u$ في العلاقة السابقة فتصبح

$$\left(D-\lambda_1\right)u=0$$

أو

$$\frac{du}{dt}-\lambda_1 u=0$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الأولى في u ولها الحل

$$u=C_1e^{\lambda_1 t}$$

وبالتعويض عن $\left(D-\lambda_2\right)x=u$ نجد

$$\left(D-\lambda_2\right)x=C_1e^{\lambda_1 t}$$
$$\frac{dx}{dt}-\lambda_2 x=C_1e^{\lambda_1 t}$$

وهي معادلة تفاضلية غيرمتجانسة من الدرجة الأولى في x وعلى الشكل

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$$

وحلها هو

$$x=Ce^{-\int P(t)dt}+e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$$

حيث $P(t)=-\lambda_2$ و $Q(t)=C_1e^{\lambda_1 t}$ ويكون الحل (تترك التفاصيل كتمرين للطلاب)

$$x=\frac{C_1}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$$
$$x=C_1'e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$$

مثال: الجذور المكررة Repeated Roots

لنعتبر المعادلة المتجانسة من الدرجة الثالثة

$$(D-\lambda_1)^2(D-\lambda_2)x=0$$

بتبديل العوامل ووضع $(D-\lambda_1)^2 x=u$ ينتج $(D-\lambda_2)u=0$ والتي حلها $u=C_1e^{\lambda_2 t}$ ويصبح

$$(D-\lambda_1)^2 x=C_1e^{\lambda_2 t}$$

وبكتابة $(D-\lambda_1)x=v$ تصبح المعادلة السابقة

$$(D-\lambda_1)v=C_1e^{\lambda_2 t}$$

والتي لها الحل

$$v=C_1'e^{\lambda_2 t}+C_2e^{\lambda_1 t}$$

واخيرا

$$(D-\lambda_1)x=C_1'e^{\lambda_2 t}+C_2e^{\lambda_1 t}$$

ومنها نحصل على

$$x=C_1''e^{\lambda_2 t}+(C_2x+C_3)e^{\lambda_1 t}$$

ملاحظة: على الطالب إكمال التفاصيل للحل.

مثال: الجذور المركبة المتقارنة Complex Conjugate Roots

في حالة وجود جذر مركب للمعادلة $P(\lambda)=0$ التي لها معاملات حقيقية على الشكل $\lambda=\mu+i\nu$ فإننا نعرف ان هناك جذر آخر على الشكل $\lambda=\mu-i\nu$ ويكون شكل الحل الخاص

$$e^{\mu t}(C_1\cos\nu t+C_2\sin\nu t)$$

وفي حالة تعددية الجذور m مرة فإن الحل الخاص يكون له الشكل

$$e^{\mu t}\left[P_{m-1}(t)\cos\nu t+Q_{m-1}(t)\sin\nu t\right]$$

حيث $P_{m-1}(t)$ و $Q_{m-1}(t)$ كثيرات حدود في t من الدرجة $m-1$ ولها ثوابت إختيارية وتضاف هذه الحدود إلى الحدود الأخري التي تنتج من جذور حقيقية للمعادلة $P(\lambda)=0$ لكي تعطي الدالة المكملة x_{CF}.

مثال:

لننظر إلى المعادلة

$$\left(D^5-5D^4+12D^3-16D^2+12D-4\right)x=0$$

وفي شكل عوامل

$$(D-1)(D-1-i)^2(D-1+i)^2 x=0$$

العوامل المركبة المتقارنة $\mu=1$ و $\nu=1$ لها تعددية 2 . الدالة المكملة هي

$$x_{CF}=e^t\left[C_1+(C_2+C_3t)\cos t+(C_4+C_5t)\sin t\right]$$

كما نلاحظ أن تطبيق العامل D يبسط حل المعادلات بشكل واضح لإيجاد الدالة المكملة ولكن قوة العامل D سوف تتضح اكثر في إيجاد الحل الخاص.

بكتابة معادلة غير متجانسة بالشكل المختصر

$$P(D)x=f(t)$$

والحل الخاص يعطى بالعلاقة

$$x_{PS}=P^{-1}(D)\,f(t)$$

حيث $P^{-1}(D)$ العامل المعكوس ويفسر كالتالي:

ليكن

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=t$$

أو

$$Dx=t$$

بالحل للمتغير x نجد

$$x=D^{-1}t=\frac{1}{2}t^2+C$$

أي D^{-1} تمثل التكامل مرة واحدة. وكذلك

$$D^2x=t$$

بإيجاد المعكوس نجد

$$x=D^{-2}t=D^{-1}\left(D^{-1}t\right)$$

وبالتكامل المتكرر نجد

$$x=D^{-2}t=D^{-1}\left(\frac{1}{2}t^2+C_1\right)=\frac{1}{6}t^3+C_1t+C_2$$

أي أن D^{-r} تعني التكامل المتكرر r مرة.

بما أن $P(D)$ كثيرة حدود في D فإن $P^{-1}(D)$ تكون كثيرة حدود في D^{-1} وتكون معكوس $P(D)$ أي

$$P^{-1}(D)P(D)\equiv 1$$

إذا إيجاد الحل الخاص هو ببساطة تطبيق معكوس $P(D)$ على $f(t)$ أي $x_{PS}=P^{-1}(D)f(t)$ على أن تكون $f(t)$ قابلة للتكامل.

تعريف: العامل المعكوس Inverse Operator

تأثير العامل المعكوس $(D-\lambda)^{-1}$ والذي يعمل على دالة $f(t)$ يعطي بالعلاقة

$$(D-\lambda)^{-1}\ f(t)=e^{\lambda t}\int f(t)e^{-\lambda t}dt$$

مثال:

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D-1)(D-2)x=e^{t}$$

العامل المعكوس هو $(D-2)^{-1}(D-1)^{-1}$ ويكون

$$x=(D-2)^{-1}(D-1)^{-1}e^{t}$$

بتطبيق التعريف السابق علي $(D-1)^{-1}e^{t}$ ينتج

$$(D-1)^{-1}e^{t}=te^{t}$$

ثم تطبق التعريف على $(D-2)^{-1}te^{t}$ ينتج

$$x_{PS}=-(t+1)e^{t}$$

وهو المطلوب.

مثال آخر:

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^{2}-2D+2)x=e^{t}$$

الحل:

بوضع المعادلة على شكل عوامل

$$(D-1-i)(D-1+i)x=e^{t}$$

ونتابع الحل كالتالي:

$$(D-1+i)x=(D-1-i)^{-1}e^{t}$$
$$=e^{(1+i)t}\int e^{t}e^{-(1+i)t}dt=ie^{t}$$

وبالتالي يكون

$$x=(D-1+i)^{-1}ie^{t}$$
$$=e^{(1-i)t}\int ie^{t}e^{-(1-i)t}dt=e^{t}$$

أي ان الحل الخاص هو

$$x_{PS}=e^{t}$$

وهو المطلوب.

الفصل الثالث:

المعادلات الفروقية Difference Equations

المعادلات الفروقية هي عبارة عن معادلات جبرية تتكون حدودها من فروقات لمتغير جبري يأخذ قيم منفصلة فمثلا لو كان $x_k = x(t_k), k = 0,1,2,...,n$ فإن التالي معادلات فروقية للمتغير $x_k, k = 0,1,2,...,n$

$x_k - x_{k-1} - x_{k-2} = 0$

$x_k + 2x_{k-1} = 5$

$x_k - 3 = 0$

$x_k - 3k - 7 = 0$

تعريف: عامل الإزاحة الخلفي B وله الخواص التالية

$1)\ Bx_k = x_{k-1}$

$2)\ B^2 x_k = B(Bx_k) = B(x_{k-1}) = x_{k-2}$

$3)\ B^m x_k = x_{k-m}$

$4)\ Bc = c$

$5)\ B(cx_k) = cx_{k-1}$

تعريف: عامل التفريق $\nabla \equiv 1 - B$ وله الخواص التالية

$1)\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$2)\ \Delta^2 x_k = \Delta(\Delta x_k) = \Delta(x_k - x_{k-1}) = x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}$

$3)\ \Delta^m x_k = \Delta^{m-1}(\Delta x_k)$

$4)\ \Delta c = 0$

$5)\ \Delta c x_k = c\Delta x_k$

$6)\ \Delta(x_k + y_k) = \Delta x_k + \Delta y_k$

قاعدة:

$$\Delta^m x_k = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} x_{k-j}$$

هناك عاملين آخرين هما عامل الإزاحة الأمامي $F \equiv B^{-1}$ وعامل التجميع الآنهائي $S \equiv \Delta^{-1}$ والتي سوف نستخدمها وقت الحاجة.

المعادلة الفروقية الخطية من الدرجة الأولى:

وهي على الشكل

$a_{0,k} x_k + a_{1,k} x_{k-1} = c_k, \quad k = 1,2,...,n$

وتكتب ايضا على الشكل

$$x_k = -\frac{a_{1,k}}{a_{0,k}} x_{k-1} + \frac{c_k}{a_{0,k}}, \quad k = 1,2,...,n$$
$$x_k = Ax_{k-1} + C, \quad k = 1,2,...,n$$

حيث $A \neq 0$ وثابتة.

لحل المعادلة $x_k = Ax_{k-1} + C, \quad k = 1,2,...,n$ على فرض ان x_0 معطاة، بوضع $k = 1$ نجد

$$x_1 = Ax_0 + C$$

ولقيمة $k = 2$

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + C \\ &= A\left(Ax_0 + C\right) + C \\ &= A^2 x_0 + \left(1 + A\right)C \end{aligned}$$

ولقيمة $k = 3$

$$\begin{aligned} x_3 &= Ax_2 + C \\ &= A\left(A^2 x_0 + \left(A+1\right)C\right) + C \\ &= A^3 x_0 + \left(1 + A + A^2\right)C \end{aligned}$$

وبشكل عام

$$x_k = A^k x_0 + C\left(1 + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right), \quad k = 1,2,...$$

لاحظ ان

$$1 + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-A^k}{1-A}, & \text{if} \quad A \neq 1 \\ k, & \text{if} \quad A = 1 \end{cases}$$

ويصبح الحل

$$x_k = \begin{cases} A^k x_0 + C\dfrac{1-A^k}{1-A}, & \text{if } A \neq 1 \\ x_0 + Ck, & \text{if } A = 1 \end{cases}, \qquad k = 0,1,2,...$$

<u>مثال1:</u>

إذا كانت

$$x_k = 2x_{k-1} + 1, \quad k = 1,2,...$$

ولقيمة اولية $x_0 = 5$ نجد

$$x_k = 5\left(2^k\right)+1\left(\frac{1-2^k}{1-2}\right), \quad k=0,1,2,...$$
$$= 6\left(2^k\right)-1, \quad k=0,1,2,...$$

وبإعطاء k القيم $0,1,2,...$ نجد ان الحل يكون المتتابعة $5,11,23,47,...$.

حل المعادلات الفروقية الخطية من الدرجة الأولى بإستخدام Excel :

حل المعادلات الفروقية تكراريا يمكن القيام بة بواسطة Excel كالتالي:

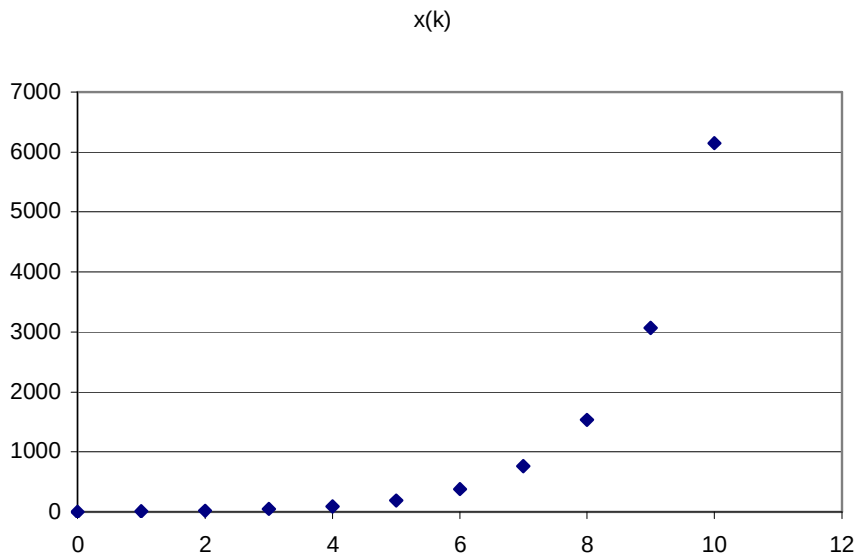
أدخل التالي (الأسطر الأول وحتى الثالث ثم انسخ السطر الثالث حتى المدى المناسب):

	A	B
1	k	x(k)
2	0	5
3	1	=2*B2+1
4	2	=2*B3+1
5	3	=2*B4+1
6	4	=2*B5+1
7	5	=2*B6+1
8	6	=2*B7+1
9	7	=2*B8+1
10	8	=2*B9+1
11	9	=2*B10+1
12	10	=2*B11+1

النتيجة:

	A	B
1	k	x(k)
2	0	5
3	1	11
4	2	23
5	3	47
6	4	95
7	5	191
8	6	383
9	7	767
10	8	1535
11	9	3071
12	10	6143

ولها الشكل التالي:



مثال2:

إذا كانت

$$2x_k - x_{k-1} = 4, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ولقيمة اولية $x_0 = 3$ نجد

$$x_k = \frac{1}{2} x_{k-1} + 2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^k 3 + 2\frac{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^k}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 4 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

وبإعطاء k القيم $0,1,2,\ldots$ نجد ان الحل يكون المتتابعة $3, 3\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, 3\frac{7}{8}, 3\frac{15}{16}, \ldots$.

الحل بإستخدام Excel :

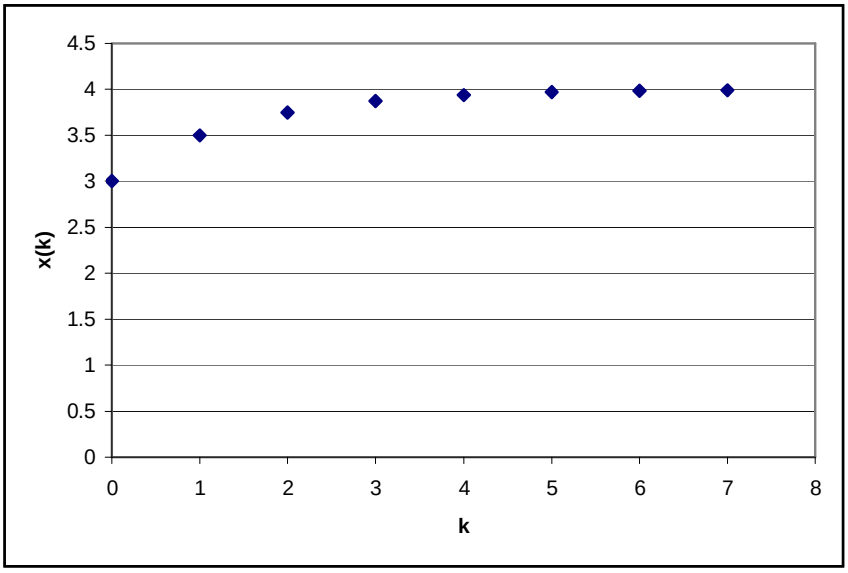
أدخل التالي (الأسطر الأول وحتى الثالث ثم انسخ السطر الثالث حتى المدى المناسب):

	A	B
1	k	x(k)
2	0	3
3	1	=0.5*B2+2

النتيجة

	A	B
1	k	x(k)
2	0	3
3	1	3.5
4	2	3.75
5	3	3.875
6	4	3.9375
7	5	3.96875
8	6	3.984375
9	7	3.992188
10	8	3.996094
11	9	3.998047
12	10	3.999023
13	11	3.999512
14	12	3.999756
15	13	3.999878
16	14	3.999939
17	15	3.999969
18	16	3.999985
19	17	3.999992
20	18	3.999996
21	19	3.999998
22	20	3.999999
23	21	4
24	22	4
25	23	4
26	24	4
27	25	4

ولها الشكل التالي:



مثال3:

إذا كانت

$$x_k + x_{k-1} = 1, \quad k = 1,2,...$$

ولقيمة اولية $x_0 = 1$ نجد

$$x_k = -x_{k-1} + 1, \quad k = 1,2,...$$

$$= (-1)^k + \frac{1-(-1)^k}{1-(-1)}, \quad k = 0,1,2,...$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+(-1)^k\right], \quad k = 0,1,2,...$$

وبإعطاء k القيم $0,1,2,...$ نجد ان الحل يكون المتتابعة $1,0,1,0,1,0,...$.

الحل بإستخدام Excel :

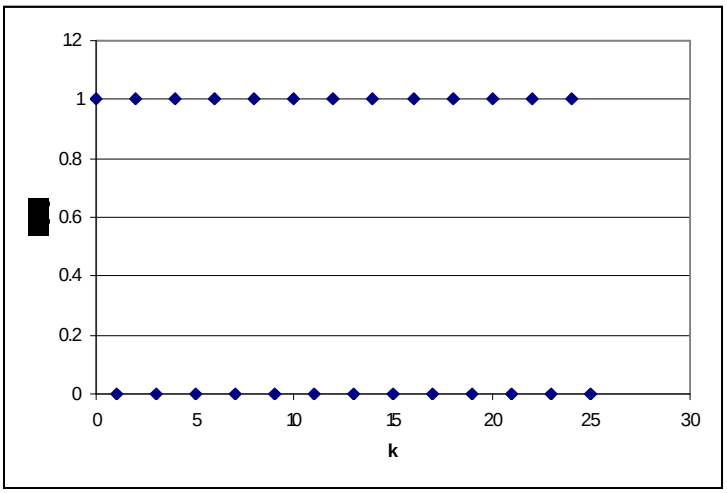
أدخل التالي (الأسطر الأول وحتى الثالث ثم انسخ السطر الثالث حتى المدى المناسب):

	A	B
1	k	x(k)
2	0	1
3	1	=-B2+1

النتيجة

	A	B
1	k	x(k)
2	0	1
3	1	0
4	2	1
5	3	0
6	4	1
7	5	0
8	6	1

ولها الشكل:



مناقشة:

رأينا في الأمثلة السابقة ثلاثة من المعادلات الفروقية كان حل الأولى بالقيمة الأولية المعطاة متتابعة من الأرقام متباعدة، وحل الثانية بالقيمة الأولية المعطاة متتابعة من الأعداد التي تتقارب إلي العدد 4 ، وحل الثالثة بالقيمة الأولية المعطاة متتابعة من رقمين 0 و 1 المتكررة (أي القيم تتذبذب بين 0 و 1).

تمرين: أوجد قيم اولية للمعادلات الفروقية السابقة بحيث تعطي تصرف غير الذي لاحظناة سابقا. بمعنى ماهي القيمة الأولية التي تعطي متتابعة من الأرقام أو الأعداد المتقاربة في المثال1 وهكذا.

تأثير القيم الأولية على المتتابعة الناتجة:

سوف نستعرض تأثير القيمة الأولية على تصرف المتتابعة الناتجة من الحل بالمثال التالي:

مثال4:

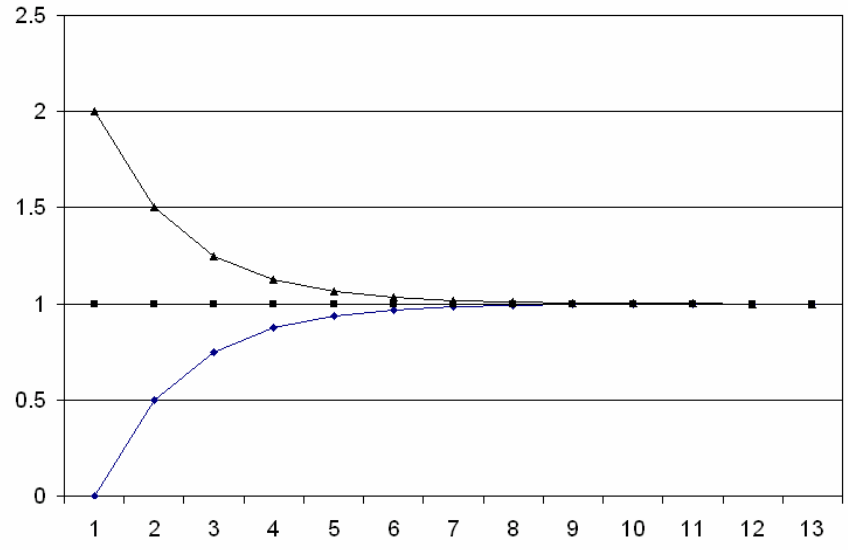
حل المعادلة الفروقية التالية

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

للقيم الأولية $x_0 = 0, 1, 2$.

الحل بواسطة Excel :

	A	B	C	D
1	k	x(k)	x(k)	x(k)
2	0	0	1	2
3	1	0.5	1	1.5
4	2	0.75	1	1.25
5	3	0.875	1	1.125
6	4	0.9375	1	1.0625
7	5	0.96875	1	1.03125
8	6	0.984375	1	1.015625
9	7	0.992188	1	1.007813
10	8	0.996094	1	1.003906
11	9	0.998047	1	1.001953
12	10	0.999023	1	1.000977
13	11	0.999512	1	1.000488
14	12	0.999756	1	1.000244
15	13	0.999878	1	1.000122
16	14	0.999939	1	1.000061
17	15	0.999969	1	1.000031
18	16	0.999985	1	1.000015
19	17	0.999992	1	1.000008
20	18	0.999996	1	1.000004
21	19	0.999998	1	1.000002
22	20	0.999999	1	1.000001
23	21	1	1	1



نلاحظ ان هناك حل مستقر في كل الحالات إذ تتقارب متتابعة الحل إلى 1.

مثال5:

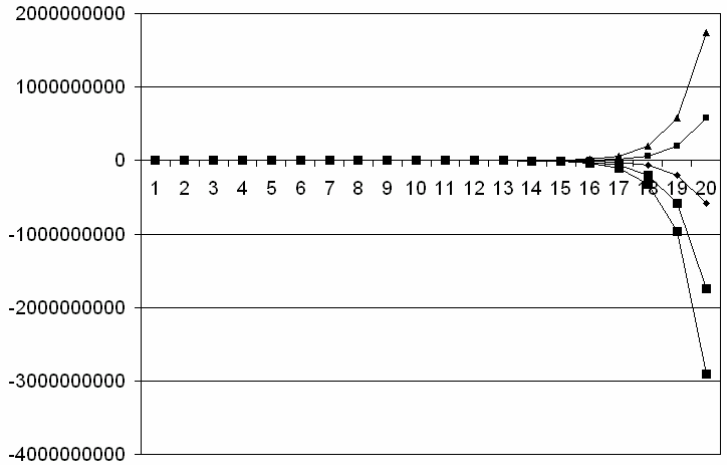
حل المعادلة الفروقية التالية

$$x_k = 3x_{k-1} - 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

للقيم الأولية $x_0 = 0, 1, 2$.

الحل بواسطة Excel :

	A	B	C	D	E	F
1	k	x(k)	x(k)	x(k)	x(k)	x(k)
2	0	0	1	2	-1	-2
3	1	-1	2	5	-4	-7
4	2	-4	5	14	-13	-22
5	3	-13	14	41	-40	-67
6	4	-40	41	122	-121	-202
7	5	-121	122	365	-364	-607
8	6	-364	365	1094	-1093	-1822
9	7	-1093	1094	3281	-3280	-5467
10	8	-3280	3281	9842	-9841	-16402
11	9	-9841	9842	29525	-29524	-49207
12	10	-29524	29525	88574	-88573	-147622
13	11	-88573	88574	265721	-265720	-442867
14	12	-265720	265721	797162	-797161	-1328602
15	13	-797161	797162	2391485	-2391484	-3985807
16	14	-2391484	2391485	7174454	-7174453	-1.2E+07
17	15	-7174453	7174454	21523361	-2.2E+07	-3.6E+07
18	16	-2.2E+07	21523361	64570082	-6.5E+07	-1.1E+08
19	17	-6.5E+07	64570082	1.94E+08	-1.9E+08	-3.2E+08
20	18	-1.9E+08	1.94E+08	5.81E+08	-5.8E+08	-9.7E+08
21	19	-5.8E+08	5.81E+08	1.74E+09	-1.7E+09	-2.9E+09



نلاحظ ان ليس هناك حل مستقر في اي حالة إذ تتباعد متتابعة الحل.

تقريب معادلة تفاضلية بمعادلة فروقية:

من الممكن إيجاد حل لمعادلة تفاضلية كنهاية لحل معادلة فروقية تابعة لها. سوف نقتصر المناقشة على المعادلات الخطية من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة. لتكن x دالة معرفة لقيم حقيقية t في فترة $a \le t \le b$ والتي تحقق المعادلة التفاضلية

$$Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C, \quad a \le t \le b$$

حيث $A \neq 0$ و C ثوابت إختيارية ولنفرض أن القيمة الأولية $x_0 = x(a)$ معطاة.

لتقريب هذه المعادلة التفاضلية بمعادلة فروقية تتطلب اولا إستبدال الفترة $a \le t \le b$ بقيم منفصلة يمكن تعريف المعادلة الفروقية عليها. لنأخذ الرقم الصحيح الموجب n ونقسم الفترة من a إلى b إلى n من الأجزاء المتساوية ذات الطول $h = (b-a)/n$ بنقاط التقسيم

$$t_0 = a, \quad t_1 = a + h, \quad t_2 = a + 2h, ..., \quad t_n = a + nh = b$$

دعنا نبسط الرموز بكتابة $x_k = x(t_k) = x(t_0 + kh)$.

من المعروف من مقرر التفاضل ان

$$Dx(t_k) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x_k}{h}$$

ولهذا يبدوا مناسبا إستبدال المعادلة التفاضلية $Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C, \quad a \le t \le b$

بالمعادلة الفروقية

$$\frac{\Delta x_k}{h} = Ax_k + C, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

أو

$$x_{k+1} = (1 + Ah)x_k + Ch, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

مع الشرط الأولى x_0 معطى. المعادلة الأخيرة هي خطية فروقية من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة وحلها كالسابق

$$x_k = (1 + Ah)^k \left(x_0 + \frac{C}{A} \right) - \frac{C}{A}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

الحالة الخاصة: عندما $C = 0$

وهي حالة لها اهمية وذلك لتطبيقاتها المهمة. المعادلة التفاضلية

$$Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad a \le t \le b$$

أو معدل التغير اللحظي للدالة x بالنسبة لـ t يتناسب مع الدالة x.

المعادلة الفروقية التقريبية التابعة لها هي

$$x_{k+1} = (1 + Ah)x_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

والتي حلها

$$x_k = x_0 (1 + Ah)^k$$

لاحظ ان حل المعادلة التفاضلية هو

$$x(t) = x_0 e^{A(t-t_0)}$$

في حالة $A > 0$ ينتج نمو اسي Exponential Growth للدالة x و عندما $A < 0$ يحدث إنكماش اسي Exponential Decay .

المعادلات الفروقية الخطية بمعاملات ثابتة Linear Difference Equations with Constant Coefficients :

يقال ان معادلة فروقية معرفة على القيم $k = 0,1,2,...$ انها خطية إذا كانت على الشكل

$$f_0(k)x_{k+n} + f_1(k)x_{k+n-1} + \cdots + f_{n-1}(k)x_{k+1} + f_n(k)x_k = g(k)$$

حيث $f_0, f_1, ..., f_{n-1}, f_n, g$ دوال لـ k معرفة على $k = 0,1,2,...$. إذا كانت المعاملات $f_0, f_1, ..., f_n$ كلها ثوابت فإن المعادلة تكون خطية بمعاملات ثابتة (الدلة g لايلزم ان تكون ثابتة او خطية). إذا كانت كل من $f_0 \neq 0$ و $f_n \neq 0$ فإن المعادلة تكون من الدرجة n.

أمثلة:

التالي معادلات فروقية خطية بمعاملات ثابتة

$$2x_{k+1} - x_k = 6$$
$$3x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 3^k$$
$$x_{k+3} - x_k = k$$

لها درجات 1 و 2 و 3 على الترتيب. عندما تكون $f_0 \neq 1$ فمن الأفضل تقسيم طرفي المعادلة عليها لكي نجعل معامل x_{k+n} مساويا للواحد ويصبح شكل المعادلة

$$x_{k+n} + a_1x_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{k+1} + a_nx_k = r(k)$$

حيث $a_i = f_i/f_0, \quad i = 1,...,n; \quad r(k) = g(k)/f_0$.

سوف نستخدم الشكل الأخير للمعادلات الفروقية الخطية بمعاملات ثابتة. سوف نفترض ان $a_1, a_2, ..., a_n$ ثوابت وايضا $a_n \neq 0$ والدالة $r(k), \quad k = 0,1,2,...$ دالة إختيارية معرفة على القيم المعطاة. وعلي هذا فالتالي هي معادلات فروقية خطية بمعاملات ثابتة من الدرجات 1 و 2 و 3 على التوالي

$$x_{k+1} + a_1x_k = r(k)$$
$$x_{k+2} + a_1x_{k+1} + a_2x_k = r(k)$$
$$x_{k+3} + a_1x_{k+2} + a_2x_{k+1} + a_3x_k = r(k)$$

المعادلة

$$x_{k+n} + a_1x_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{k+1} + a_nx_k = 0$$

تسمى المعادلة الفروقية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة والتابعة للمعادلة الفروقية الخطية غيرالمتجانسة بمعاملات ثابتة $x_{k+n} + a_1x_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{k+1} + a_nx_k = r(k)$.

نظرية:

إذا كان $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ حلين للمعادلة $x_{k+n}+a_1x_{k+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{k+1}+a_nx_k=0$ فإن $C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}$ هو ايضا حل لها بثوابت إختيارية C_1 و C_2.

نظرية:

إذا كان x_{CF} حل للمعادلة المتجانسة $x_{k+n}+a_1x_{k+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{k+1}+a_nx_k=0$ وكان x_{PS} حل للمعادلة غير المتجانسة $x_{k+n}+a_1x_{k+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{k+1}+a_nx_k=r(k)$ فإن $x_{CF}+x_{PS}$ حل للمعادلة غير المتجانسة $x_{k+n}+a_1x_{k+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{k+1}+a_nx_k=r(k)$.

الحل العام للمعادلة المتجانسة General Solution of the Homogeneous Equation :

سوف نستعرض إيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة $x_{k+n}+a_1x_{k+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{k+1}+a_nx_k=0$ بأمثلة كالتالي:

1) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_k-x_{k-2}=0$$

لنجرب الحل $x_k=\lambda^k,\quad \lambda\neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^k-\lambda^{k-1}=0$$
$$\lambda^{k-1}(\lambda-1)=0$$

وبما ان $\lambda\neq 0$ فإن المعادلة المساعدة لها جزرين متساويين $\lambda_1=\lambda_2=1$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$x_k=(C_1+C_2k)1^k$$
$$=C_1+C_2k$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

2) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_k-3x_{k-1}+2x_{k-2}=0$$

لنجرب الحل $x_k=\lambda^k,\quad \lambda\neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^k-3\lambda^{k-1}+2\lambda^{k-2}=0$$
$$\lambda^{k-2}(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = 0$ ولها الجزور $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned} x_k &= C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k \\ &= C_1 + C_2 2^k \end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

3) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_k + 3x_{k-1} + x_{k-2} = 0$$

لنجرب الحل $x_k = \lambda^k, \quad \lambda \neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^k + 3\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} = 0$$
$$\lambda^{k-2}\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) = 0$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) = 0$ ولها الجزور $\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned} x_k &= C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k \\ &= C_1\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

4) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_k + x_{k-1} + \tfrac{1}{4}x_{k-2} = 0$$

لنجرب الحل $x_k = \lambda^k, \quad \lambda \neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^k + \lambda^{k-1} + \tfrac{1}{4}\lambda^{k-2} = 0$$
$$\lambda^{k-2}\left(\lambda^2 + \lambda + \tfrac{1}{4}\right) = 0$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2 + \lambda + \tfrac{1}{4}\right) = 0$ ولها الجزور $\lambda_1 = \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned} x_k &= C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k \\ &= \left(C_1 + C_2 k\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

5) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_k + x_{k-2} = 0$$

لنجرب الحل $x_k = \lambda^k, \quad \lambda \neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^k + \lambda^{k-2} = 0$$
$$\lambda^{k-2}\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$ ولها الجزور $\lambda_1 = i = \sqrt{-1}, \lambda_2 = -i = -\sqrt{-1}$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$x_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k$$
$$= C_1 \cos\left(\frac{\pi k}{2} + C_2\right)$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

ملاحظة: تحويل الأعداد المركبة إلى شكل قطبي Polar Form

يحول العدد المركب $a + bi$ إلى الشكل القطبى $r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ بالتعويض التالي

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

تكتب

$$\lambda_1 = i = 0 + 1i$$
$$= r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$
$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$
$$\cos\theta = \frac{0}{1} = 0, \quad \sin\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

وبالمثل λ_2

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$x_k = Ar^k \cos\left(k\theta + C\right)$$

يترك للطالب كتمرين التعويض في المعادلة $x_k = Ar^k \cos\left(k\theta + C\right)$ لجعلها على الشكل $x_k = C_1 \cos\left(\frac{\pi k}{2} + C_2\right)$.

تمرين: للقيم الأولية $x_0 = 0, x_1 = 1$ برهن أن $x_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ للحل السابق.

نتيجة: إذا كان

$$x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} = 0$$

حيث a_1 و a_2 ثوابت و $a_2 \neq 0$ وكان λ_1 و λ_2 جذري المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

فإن الحل العام للمعادلة الفروقية $x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} = 0$ يعطى بالعلاقات

$$x_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k$$

وذلك إذا كان λ_1 و λ_2 حقيقين ومختلفين و

$$x_k = (C_1 + C_2) \lambda_1^k$$

وذلك إذا كان λ_1 و λ_2 حقيقين ومتساويين و

$$x_k = A r^k \cos(k\theta + C)$$

وذلك إذا كان λ_1 و λ_2 مركبين متقارنين أي على الشكل

$$\lambda_1 = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$
$$\lambda_2 = a - bi = r(\cos\theta - i \sin\theta)$$

الحل الخاص للمعادلة الكاملة Particular Solution of the Complete Equation :

سوف نستعرض إيجاد الحل الخاص للمعادلة الكاملة

$$x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} x_{k+1} + a_n x_k = r(k)$$

بأمثلة كالتالي:

1) لنعتبر المعادلة

$$x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = 3^k$$

سوف نحلها بطريقة المعاملات غير المحددة Method of Undetermined Coefficients كالتالي:

لنحاول ايجاد حل على الشكل $x_k^* = A3^k$ حيث المعامل الثابت A لم يحدد بعد. نحاول إيجاد قيمة لـ A (إن وجدت) يكون فيها x_k^* حلا ، نعوض

$$x^*_{k+2} - 3x^*_{k+1} + 2x^*_k = A3^{k+2} - 3A3^{k+1} + 2A3^k$$
$$= A3^k\left(9-9+2\right)$$
$$= 2A3^k$$
$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

ويكون $x^*_k = \frac{1}{2}3^k$ الحل الخاص. سبق ان وجدنا الحل العام للمعادلة المتجانسة وهو الدالة المكملة للمعادلة الكاملة ، ويكون الحل العام للمعادلة الكاملة هو

$$x_k = C_1 + C_2 2^k + \tfrac{1}{2}3^k$$

ولها ثابتين إختياريين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

2) لنعتبر المعادلة الأكثر تعميما

$$x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = a^k$$

حيث a ثابت ما (المثال السابق حالة خاصة من هذا وذلك بأخذ $a = 3$). كما في المثال السابق نأخذ الحل التجريبي $x^*_k = Aa^k$ ونعوض

$$x^*_{k+2} - 3x^*_{k+1} + 2x^*_k = Aa^{k+2} - 3Aa^{k+1} + 2Aa^k$$
$$= Aa^k\left(a^2 - 3a + 2\right)$$
$$= A3^k\left(a-1\right)\left(a-2\right)$$
$$\therefore A = \frac{1}{\left(a-1\right)\left(a-2\right)}, \quad a \neq 1,2$$

ويكون $x^*_k = \frac{1}{\left(a-1\right)\left(a-2\right)}a^k, \quad a \neq 1,2$ الحل الخاص. لاحظ ان جذور المعادلة المساعدة هي 1 و 2 . ماذا لوكانت $a = 1$ أو $a = 2$ أي مثلا لتكن

$$x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = 1$$

لنجرب الحل $x^*_k = Aka^k$ وبوضع $a = 1$ يكون $x^*_k = Ak$ ونعوض

$$x^*_{k+2} - 3x^*_{k+1} + 2x^*_k = A\left(k+2\right) - 3A\left(k+1\right) + 2Ak$$
$$= -A$$
$$\therefore A = -1$$

ويكون الحل الخاص $x^*_k = -k$.

تمرين: في حالة $a = 2$ في المعادلة $x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = a^k$ برهن ان $x^*_k = Ak2^k$ حلا خاص عندما $A = 1/2$ وان المعادلة الفروقية $x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = 2^k$ لها الحل العام

$$x_k = C_1 + C_2 2^k + k2^{k-1}$$

3) اوجد الحل الخاص للمعادلة

$$8x_{k+2} - 6x_{k+1} + x_k = 5\sin\frac{k\pi}{2}$$

لنجرب الحل

$$x_k^* = A\sin\frac{k\pi}{2} + C\cos\frac{k\pi}{2}$$

حيث A و C معاملات ثابتة سيتم تحديدها، نعوض بالحل التجريبي

$$8x_{k+2}^* - 6x_{k+1}^* + x_k^* = 8\left[A\sin\frac{(k+2)\pi}{2} + C\cos\frac{(k+2)\pi}{2}\right] - 6\left[A\sin\frac{(k+1)\pi}{2} + C\cos\frac{(k+1)\pi}{2}\right] + \left[A\sin\frac{k\pi}{2} + C\cos\frac{k\pi}{2}\right]$$

وبإستخدام العلاقات المثلثية

$$\sin\frac{(k+2)\pi}{2} = \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$\cos\frac{(k+2)\pi}{2} = \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\frac{k\pi}{2}$$
$$\sin\frac{(k+1)\pi}{2} = \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{k\pi}{2}$$
$$\cos\frac{(k+1)\pi}{2} = \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{k\pi}{2}$$

ينتج

$$8x_{k+2}^* - 6x_{k+1}^* + x_k^* = (-7A + 6C)\sin\frac{k\pi}{2} + (-6A - 7C)\cos\frac{k\pi}{2}$$

بمطابقة المعادلة هذه مع المعادلة الأصلية $8x_{k+2} - 6x_{k+1} + x_k = 5\sin\frac{k\pi}{2}$ نجد ان

$$-7A + 6C = 5$$
$$-6A - 7C = 0$$
$$A = -\frac{7}{17}, \quad C = \frac{6}{17}$$

ويكون الحل الخاص

$$x_k^* = \frac{1}{17}\left(-7\sin\frac{k\pi}{2} + 6\cos\frac{k\pi}{2}\right)$$

مناقشة:

من الأمثلة السابقة نستنتج ان شكل الحل الخاص يمكن إستنباطه من شكل الدالة $r(k)$، فطريقة المعاملات غير المحددة يمكن إستخدامها بنجاح إذا كانت الدالة $r(k)$ مجموع او حاصل ضرب تراكيب الخطية لدوال من الشكل $a^k, \sin bk, \cos bk, k^n$ حيث a و b اي ثوابت و n عدد صحيح موجب.

الجدول التالي يعطي شكل الدلة $r(k)$ والحل التجريبي المقترح

$r(k)$	x_k^*
a^k	Aa^k
$\sin bk / \cos bk$	$A\sin bk + C\cos bk$
k^n	$A_0 + A_1k + A_2k^2 + \cdots + A_nk^n$
$k^n a^k$	$a^k\left(A_0 + A_1k + A_2k^2 + \cdots + A_nk^n\right)$
$a^k \sin bk / a^k \cos bk$	$a^k\left(A\sin bk + C\cos bk\right)$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$x_{k+2} - 4x_{k+1} + 4x_k = 3k + 2^k$$

المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ لها الجذرين المكررة $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ وعلية تكون الدالة الخاصة $x_{CF} = (C_1 + C_2k)2^k$. الحل الخاص يستنتج من النظر الى الطرف الأيمن من المعادلة والإستعانة بالجدول فنجد انه على الشكل $x_k^* = A_0 + A_1k + Ak^2 2^k$ ونحدد قيم A_0, A_1, A بالتعويض

$$x_{k+2}^* - 4x_{k+1}^* + 4x_k^* = (A_0 - 2A_1) + A_1k + 8A2^k$$

بالمقارنة مع $x_{k+2} - 4x_{k+1} + 4x_k = 3k + 2^k$ نجد

$$A_0 - 2A_1 = 0, \quad A_1 = 3, \quad 8A = 1$$

أي $A_0 = 6, \quad A_1 = 3, \quad A = \frac{1}{8}$ ويكون الحل العام

$$x_k = (C_1 + C_2k)2^k + 6 + 3k + \tfrac{1}{8}k^2 2^k$$

التصرف النهائي للحلول بإستخدام Excel :

سوف ندرس تصرف الحلول الناتجة من حل معادلة فروقية لقيم أولية معطاة وندرس التصرف النهائي للمتتابعات العددية على أمثلة مستخدمين Excel كالتالي:

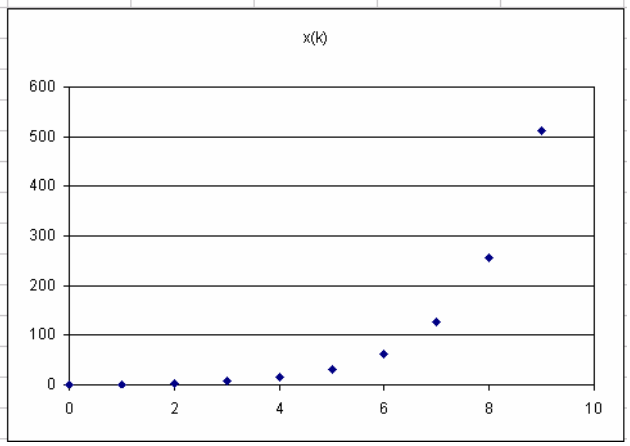
1) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = 0$$

بقيم أولية $x_1 = 1 \quad x_0 = 0,$ و $x_1 = -2 \quad x_0 = -1,$ و $x_0 = x_1 = 2$

الحل: للقيم الأولية $x_1 = 1 \quad x_0 = 0,$

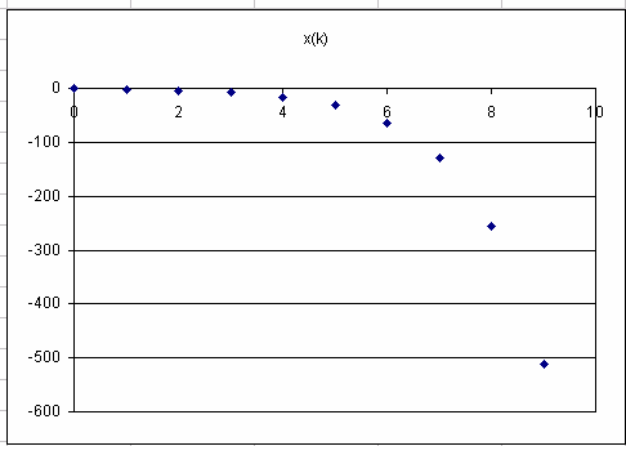
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	x(k)						
2	0	0						
3	1	1						
4	2	3						
5	3	7						
6	4	15						
7	5	31						
8	6	63						
9	7	127						
10	8	255						
11	9	511						
12	10	1023						
13	11	2047						
14	12	4095						
15	13	8191						



نلاحظ ان الحل يتباعد إلى ∞.

و للقيم الأولية $x_1 = -2 \quad x_0 = -1,$

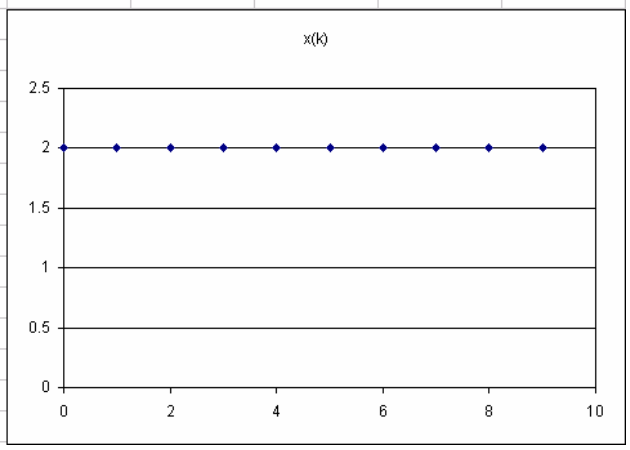
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	x(k)						
2	0	-1						
3	1	-2						
4	2	-4						
5	3	-8						
6	4	-16						
7	5	-32						
8	6	-64						
9	7	-128						
10	8	-256						
11	9	-512						
12	10	-1024						
13	11	-2048						
14	12	-4096						
15	13	-8192						



نلاحظ ان الحل يتباعد إلى $-\infty$.

و للقيم الأولية $x_0 = x_1 = 2$

	A	B
1	k	x(k)
2	0	2
3	1	2
4	2	2
5	3	2
6	4	2
7	5	2
8	6	2
9	7	2
10	8	2
11	9	2
12	10	2
13	11	2
14	12	2
15	13	2



نلاحظ ان الحل قيمة ثابتة وهذا ينطبق على جميع القيم الأولية $x_0 = x_1$.

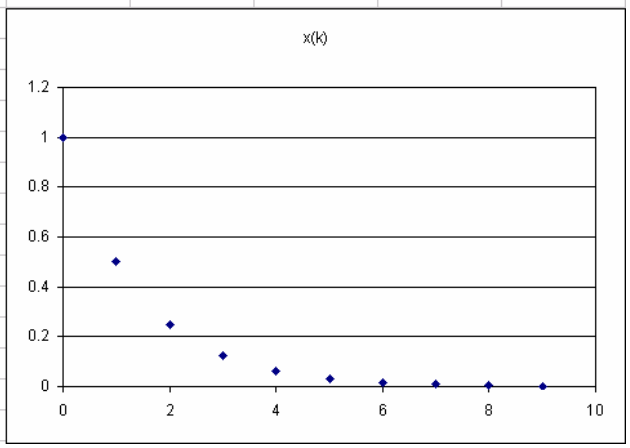
2) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$2x_{k+2} + 3x_{k+1} - 2x_k = 0$$

بقيم أولية $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, و $x_1 = -2$, $x_0 = 1$, و $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_0 = 2$.

الحل: للقيم الأولية $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$

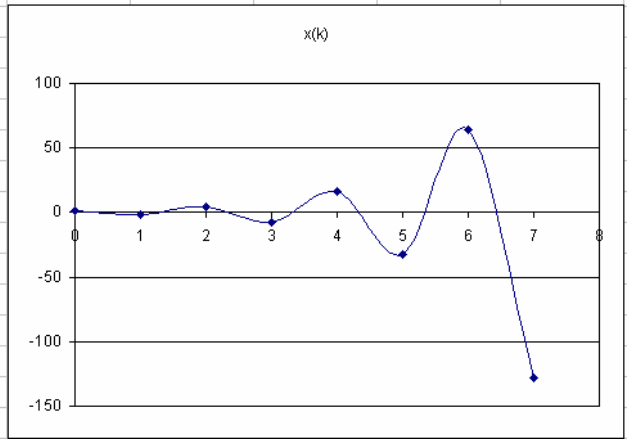
	A	B
1	k	x(k)
2	0	1
3	1	0.5
4	2	0.25
5	3	0.125
6	4	0.0625
7	5	0.03125
8	6	0.015625
9	7	0.007813
10	8	0.003906
11	9	0.001953
12	10	0.000977
13	11	0.000488
14	12	0.000244
15	13	0.000122



نلاحظ ان الحل يتقارب إلى 0.

وللقيم الأولية $x_1 = -2$, $x_0 = 1$

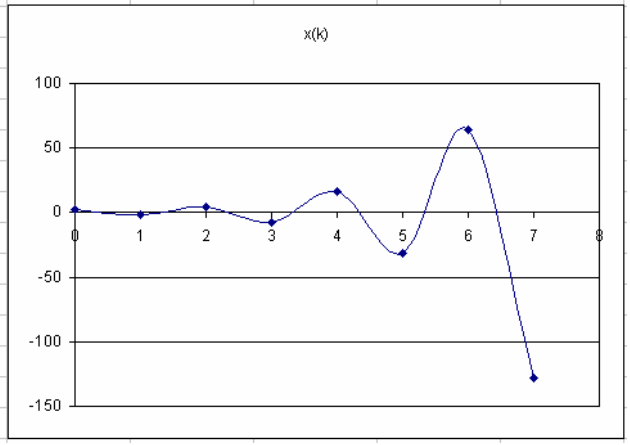
	A	B
1	k	x(k)
2	0	1
3	1	-2
4	2	4
5	3	-8
6	4	16
7	5	-32
8	6	64
9	7	-128
10	8	256
11	9	-512
12	10	1024
13	11	-2048
14	12	4096
15	13	-8192



نلاحظ ان الحل يتباعد مترددا بين قيم موجبة وسالبة.

وللقيم الأولية $x_0 = 2, \quad x_1 = -\frac{3}{2}$

	A	B
1	k	x(k)
2	0	2
3	1	-1.5
4	2	4.25
5	3	-7.875
6	4	16.0625
7	5	-31.9688
8	6	64.01563
9	7	-127.992
10	8	256.0039
11	9	-511.998
12	10	1024.001
13	11	-2048
14	12	4096
15	13	-8192



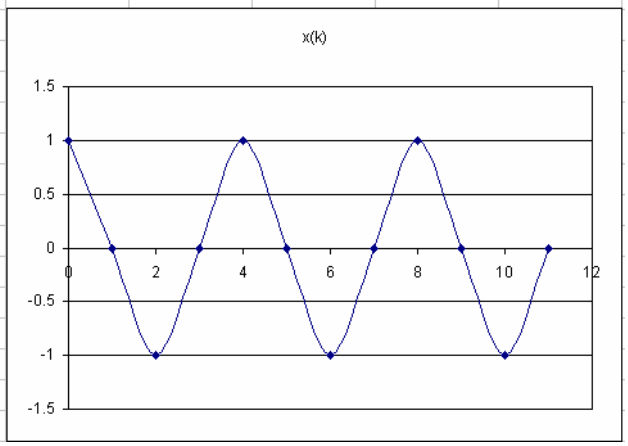
نفس التصرف النهائي السابق.

3) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$x_{k+2} + x_k = 0$$

بقيم أولية $x_0 = 1, \quad x_1 = 0$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	x(k)						
2	0	1						
3	1	0						
4	2	-1						
5	3	0						
6	4	1						
7	5	0						
8	6	-1						
9	7	0						
10	8	1						
11	9	0						
12	10	-1						
13	11	0						
14	12	1						
15	13	0						



الحل يتردد محدودا.

لاحظ أن

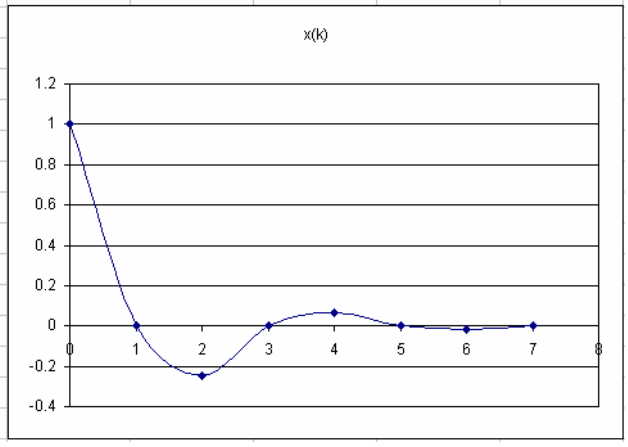
$$\cos\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}1, & \text{if } k=0,4,8,12,...\\ -1, & \text{if } k=2,6,10,14,...\\ 0, & \text{if } k=1,3,5,7,...\end{cases}$$

4) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$4x_{k+2}+x_k=0$$

بقيم أولية $x_0=1,\quad x_1=0$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	x(k)						
2	0	1						
3	1	0						
4	2	-0.25						
5	3	0						
6	4	0.0625						
7	5	0						
8	6	-0.01563						
9	7	0						
10	8	0.003906						
11	9	0						
12	10	-0.00098						
13	11	0						
14	12	0.000244						
15	13	0						



الحل يتخامد جيبيا إلى 0.

لقد وجدنا الحل العام لهذه المعادلة سابقا وكان $x_k = A\left(\frac{1}{2}\right)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}+C\right)$ ولقيم أولية $x_0 = 1, \quad x_1 = 0$ يصبح الحل العام $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos\frac{k\pi}{2}$. لاحظ ان $\cos\frac{k\pi}{2}$ يسبب التردد و $(1/2)^k$ يسبب التخامد.

مناقشة:

1) إذا كانت متتابعة الحل متقاربة قد تظل ثابتة او تتزايد اوتتناقص ببطء او تتخامد جيبيا. أما إذا كانت متباعدة فإنها قد تتزايد بشكل مستمر إلى ∞ مالانهاية أو تتناقص بشكل مستمر إلى $-\infty$ أو تبدي ترددا مستمر نهائي او منفجرا لانهائي.

2) يعتمد تصرف متتابعة الحل على كل من المعادلة الفروقية والقيم الأولية.

3) جذور المعادلة المساعدة تعتبر من العوامل المهمة في تحديد التصرف النهائي للحل.

ملاحظة هامة:

لقد ذكرنا أن الحل العام x_{GS} للمعادلات التفاضلية والفروقية يتكون من الدالة المكملة x_{CF} والحل الخاص x_{PS} أي $x_{GS} = x_{CF} + x_{PS}$. التصرف النهائي للحل يعتمد على تصرف كل من x_{CF} و x_{PS} وغالبا مايكون تصرف x_{CF} مرحلي او إنتقالي Transient لفترة قصيرة ويضمحل ويتلاشى بعد فترة طويلة ويستمر في التأثير x_{PS}.

الفصل الرابع:

جبر وحساب المصفوفات Matrix Algebra and Calculus:

تعتبر المصفوفات من الأدوات المهمة جدا في التحليل الرياضي وبناء النماذج، ولهذا سوف نتطرق إلى القليل من جبر وحساب المصفوفات بما يخدم هذا المقرر.

تعرف المصفوفة على انها تركيب من الأشياء في شكل سطور وأعمدة. وعلى الخصوص للأعداد الحقيقية $a_{ij} \in \mathbb{R}$ تعرف المصفوفة A كالتالي:

$$A = \left[a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

العمليات الأساسية على المصفوفات:

1- جمع مصفوفات

1- $C = A + B \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2- الضرب بعدد

2- $C = \alpha A \Rightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}$

3- الضرب بمصفوفة

3- $C = AB \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

4- معكوس (منقول) مصفوفة

4- $C = A^T \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ji}$

5- المصفوفة المربعة

5- $A = \left[a_{ij} \right], \quad i = 1,...,n; \quad j = 1,...,n$

6- مصفوفة الوحدة

6- $I_n = \left[e_k^{(n)} \right], \quad e_k^{(n)} = \left(0,...,0,1(\text{k th position}),0,...,0 \right)^T$

7- مقلوب مصفوفة

7- $AB = I \Rightarrow \quad B = A^{-1}$

على شرط الاتكون A شاذة Singular

8- معكوس المقلوب

8- $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-T}$

9- محددة المصفوفة

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det\left(A_{1j}\right)$$

حيث A_{1j} مصفوفة $(n-1)\times(n-1)$ نحصل عليها بحذف السطر الأول والعمود j من المصفوفة A.

<u>بعض الخواص المفيدة للمحددات:</u>

$(i)\ \det(AB) = \det(A)\det(B)$

$(ii)\ \det\left(A^T\right) = \det(A)$

$(iii)\ \det(cA) = c^n \det(A)$

$(iv)\ \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ is nonsingular

تعريف: متجه العمود هو عبارة عن مصفوفة $m\times 1$ أي $y = [y_i],\quad i = 1,2,...,m$.

إذا كان A مصفوفة و x متجه فإن $y = Ax$ يعني

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\quad i = 1,2,...,m$$

تعريف: الضرب الخارجي للمتجهين $x = [x_i],\quad i = 1,...,m$ و $y = \left[y_j\right],\quad j = 1,...,n$ يعطى بالعلاقة

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{bmatrix}$$

تعريف: الضرب الداخلي للمتجهين $x = \left[x_j\right],\quad j = 1,...,n$ و $y = \left[y_j\right],\quad j = 1,...,n$ يعطى بالعلاقة

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x$$

تعريف: التمثيل العمودي للمصفوفة A هو $A = [c_1,...,c_n]$ حيث c_k العمود k في A.

تعريف: التمثيل السطري للمصفوفة A هو $A = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{bmatrix}$ حيث r_k^T السطر k في A.

تعريف: يقال ان المصفوفة المربعة A متناظرة إذا كان $\forall i,j = 1,...,n, i \neq j$. $a_{ij} = a_{ji},$

تعريف: يقال ان المصفوفة المربعة المتناظرة A متعامدة إذا تحقق

$$A^T A = AA^T = I$$

أو

$$A^{-1} = A^T$$

أي

$$c_k^T c_j = 0, \quad , k = 1,...,n \, ; \, j = 1,...,n, k \neq j$$

أو

$$r_k r_j^T = 0, \quad k = 1,...,n \, ; \, j = 1,...,n, k \neq j$$

تعريف: إذا كانت $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m$ و $1 \le j_1 < \cdots < j_s \le n$ فإن المصفوفة $B = \left[b_{pq} \right], \quad p = 1,...,r \, ; \, q = 1,...,s$ المعرفة بالعلاقة $b_{pq} = a_{i_p j_q}$ هي مصفوفة جزئية Submatrix من A، وإذا كانت $r = s$ و $i_p = j_p$ لقيم $p = 1,...,r$ فإن B مصفوفة جزئية رئيسية Principal Submatrix وإذا كان إضافة على ذلك $i_p = j_p = p$ لقيم $p = 1,...,r$ فإن B مصفوفة جزئية رئيسية متقدمة Leading Principal Submatrix.

تعريف: المصفوفة القطرية Diagonal Matrix وهي مصفوفة مربعة يكون فيها $a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$ أي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & a_{ii} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ويرمز لها $A = \text{diag}(a_{ii}), \quad i = 1,...,n$.

تعريف: القيم المميزة Eigenvalues لمصفوفة مربعة A هي مجموعة من القيم $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ والتي تحقق المعادلة

$$\det(A - \lambda_i I) = 0, \quad \forall i = 1,...,n$$

تعريف: المتجهات المميزة Eigenvectors لمصفوفة مربعة A هي مجموعة من المتجهات التابعة للقيم المميزة $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ والتي تحقق

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1,...,n$$

أو

$$(A-\lambda_i I)v_i = 0, \quad \forall i = 1,...,n$$

تعريف: القيمة المميزة ومتجة مميز تابع لها يسميان الزوج المميز.

تعريف: مصفوفة القياس Modal Matrix التابعة للمصفوفة المربعة A هي المصفوفة التي تتكون اعمدتها من متجهات مميزة للمصفوفة A والتي تحقق

$$A = M\Lambda M^{-1}$$

حيث $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ هي المصفوفة القطرية المكونة عناصرها من القيم المميزة للمصفوفة A.

لاحظ أن $AM = M\Lambda$.

مثال: أوجد القيم المميزة ومتجهات مميزة ومصفوفة قياس للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

$$\therefore \lambda^T = [1 \quad 2 \quad 0]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نوجد المتجهات المميزة ومصفوفة القياس كالتالي

$$(A-\lambda_i I)v_i = \begin{bmatrix} -2-\lambda_i & -3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda_i & 0 \\ -2 & -2 & 4-\lambda_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين: تحقق أن $AM = M\Lambda$ و $A = M\Lambda M^{-1}$.

<u>تعريف: رفع مصفوفة مربعة لقوة</u> A^k حيث k عدد صحيح غير سالب يحسب كالتالي:

$$A^k = M\Lambda^k M^{-1}$$

و $\Lambda^k = \text{diag}\left(\lambda_i^k\right)$.

تعريف: أثر Trace المصفوفة المربعة A هو

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

يمكن برهنة أن:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

و

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ملاحظات:

1) لاحظ أن $(A - \lambda I)$ مصفوفة شاذة ولهذا لايوجد متجه وحيد v_i يحقق $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ لكل λ_i فإذا كان v_i متجه مميز تابع للقيمة المميزة λ_i فكذلك αv_i حيث $\alpha \neq 0$ وهذا يوضح ان أهمية المتجه المميز تكون في إتجاهه وليس مقداره.

2) هناك نوعين من المتجهات المميزة اليمينية واليسارية Right and Left Eigenvectors التابعة للقيم المميزة $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$، سبق أن عرفنا المتجه المميز اليميني بالعلاقة $Av_i = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1, ..., n$ والذي حصلنا عليها من $AM = M\Lambda$ ، المتجه المميز اليساري يعرف من العلاقة $u_i^T (A - \lambda_i I) = 0, \quad \forall i = 1, ..., n$ أو $u_i^T A v_i = u_i^T \lambda_i, \quad \forall i = 1, ..., n$ والذي نحصل

عليه من العلاقة $M^{-1}A = \Lambda M^{-1}$ فإذا كانت أعمدة M تتكون من v_i فإن سطور M^{-1} تتكون من u_i^T. لاحظ أن القيم المميزة وحيدة.

تعريف: رفع e لقوة مصفوفة مربعة

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$
$$= M\ \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i t}\right) M^{-1}$$

تفكيك القيمة الشاذة Singular Value Decomposition (SVD) :

إذا كانت $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ فإنه يوجد مصفوفتين متعامدتين

$$U = [u_1, ..., u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

و

$$V = [v_1, ..., v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

بحيث

$$U^T AV = \mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_p), \quad p = \min(m,n)$$

و بحيث $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$. تسمي σ_i القيم الشاذة للمصفوفة A والمتجهات u_i و v_i المتجه i الأيسر الشاذ والمتجه i الأيمن الشاذ على التوالي.

حساب المصفوفات Matrix Calculus :

لتكن $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$ و $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]$ مصفوفات تعتمد على المتغير t بحيث عناصرها $a_{ij}(t)$ و $b_{ij}(t)$ تكون دوال قابلة للإشتقاق.

تعريف: مشتقة المصفوفة

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]$$

تعريف: تكامل المصفوفة

$$\int A(t)\,dt = \left[\int a_{ij}(t)\,dt\right]$$

تعريف: قاعدة الضرب

$$\frac{d}{dt}A(t)B(t) = A(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(t)$$

$$\int A(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)\right)dt = A(t)B(t)\Big|_{\text{limits}} - \int\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(t)\,dt$$

تعريف: مشتقة المعكوس

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t)$$

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ و $C=\left[c_{ij}\right]$ مصفوفات ثابتة فإن

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$
$$\int e^{At}dt = A^{-1}e^{At} + C$$

الفصل الخامس:

تمثيل فضاء الحالة State Space Representation :

معادلات فضاء الحالة وحلها في المجال الزمني The State Space Equations and their Time Domain Solution :

سوف نركز هنا على ثلاثة نقاط هي:

1- التمثيل العام لمتغير الحالة في الأنظمة الحركية ويسمى شكل فضاء الحالة القياسي.

2- طرق وضع الأنظمة العامة على الشكل القياسي.

3- طرق ايجاد حل لمعادلات الحالة في المجال الزمني.

يستخدم تمثيل فضاء الحالة لمعالجة الأنظمة الحركية بواسطة متغيرات الحالة State Variables ووضعها في شكل فضاء الحالة القياسي Standard State Space Form .

الشكل العام لمتغير الحالة لنظام حركي مستمر يكتب للدوال المتجه x, y, u, f, g والمصفوفات الثابتة A, C, D على الشكل

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + f(x,t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

حيث $f(x,t)$ تحوي كل المعاملات المتغيرة والحدود غير الخطية. مصفوفة النظام A يجب أن تكون مربعة والمصفوفات B و C و D يمكن ان يكون لها اي شكل عام.

مثال1:

ضع معادلة النظام من الدرجة الثانية التالية في شكل قياس

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = 7x_1(t) + 3x_2(t) + 4tx_1(t) + x_1(t)x_2(t) - u_1(t) + 2u_3(t)$$
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = 9x_1(t) - 5x_2(t) - 3x_2^2(t) + 4u_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2u_2(t)$$

الحل:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + f(x,t) + Bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + d^T u(t)$$

حيث

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}, \quad f(x,t)=\begin{bmatrix} 4tx_1(t)+x_1(t)x_2(t) \\ -3x_2^2(t) \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d^T=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

التحويل الى شكل الحالة:

هدفنا هنا هو إعطاء طريقة لتحويل بعض الأنظمة إلى شكل الحالة وعلى الخصوص تمثيل فضاء الحالة لأنظمة من الدرجة n والمعادلات التفاضلية والجبرية المختلطة وتحويل الأنظمة غير خطية إلى خطية.

1- تحويل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة n :

معطى النظام التالي من الدرجة n

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}y(t)+a_n y(t)=$$
$$b_0\frac{d^n}{dt^n}u(t)+b_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t)+\cdots+b_{n-1}\frac{d}{dt}u(t)+b_n u(t)$$

نضع

$$x_1(t)=y(t)-\beta_0 u(t)$$
$$x_2(t)=\frac{d}{dt}y(t)-\beta_0\frac{d}{dt}u(t)-\beta_1 u(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)-\beta_1 u(t)$$
$$x_3(t)=\frac{d^2}{dt^2}y(t)-\beta_0\frac{d^2}{dt^2}u(t)-\beta_1\frac{d}{dt}u(t)-\beta_2 u(t)=\frac{d}{dt}x_2(t)-\beta_2 u(t)$$
$$\vdots$$
$$x_j(t)=\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}y(t)-\beta_0\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}u(t)-\beta_1\frac{d^{j-2}}{dt^{j-2}}u(t)-\cdots-\beta_{j-1}u(t)=\frac{d}{dt}x_{j-1}(t)-\beta_{j-1}u(t)$$

حيث

$$\beta_0=b_0$$
$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0$$
$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0$$
$$\vdots$$
$$\beta_j=b_j-a_1\beta_{j-1}-\cdots-a_{j-1}\beta_1-a_j\beta_0$$

وهكذا نحصل على

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

حيث

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}, \quad d = \beta_0 = b_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

مثال2:

حول المعادلة التالية إلى تمثيل فضاء الحالة

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 6\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 8\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = 2\frac{d}{dt}u(t) + 7u(t)$$

مستخدمين الطريقة السابقة بتعويض

$$x_j(t) = \frac{d}{dt}x_{j-1}(t) - \beta_{j-1}u(t)$$

نجد

$$x_1(t) = y(t) - \beta_0 u(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t) - \beta_0\frac{d}{dt}u(t) - \beta_1 u(t) = \frac{d}{dt}y(t)$$
$$x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) - \beta_0\frac{d^2}{dt^2}u(t) - \beta_1\frac{d}{dt}u(t) - \beta_2 u(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2u(t)$$

وكذلك

$$\beta_j = b_j - a_1\beta_{j-1} - \cdots - a_1\beta_0$$
$$\beta_0 = b_0 = 0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 2$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 7 - 6(2) - 5$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 8 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0]u(t)$$

<u>تحويل نظام من الدرجة 3 إلى شكل الحالة:</u>

معطى

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + a_1\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_2\frac{d}{dt}y(t) + a_3 y(t) = u(t)$$

حول هذا النظام الى شكل حالة، ملاحظا ان الطرف الأيمن لايحوى مشتقات $u(t)$. بين ايضا ان القيم المميزة لمصفوفة النظام الناتجة متطابقة مع جذور المعادلة المساعدة الناتجة من حل المعادلة المتجانسة التابعة للمعادلة المعطاة.

<u>الحل:</u> لهذه الحالة لنعوض الكميات

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = y'(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = x_1'(t)$$

وبشكل عام

$$x_j(t) = \frac{d}{dt}x_{j-1}(t)$$

مع $x_1(t) = y(t)$ الآن من المعادلة المعرفة بوضع $y'''('t) = \frac{d}{dt}x_3(t) = x_3'(t)$ نجد

$$\frac{d}{dt}x_3(t) = -a_1 x_3(t) - a_2 x_2(t) - a_3 x_1(t) + u(t)$$

وهكذا فإن المعادلات في $x_1'(t)$ و $x_2'(t)$ و $x_3'(t)$ توضع على شكل مصفوفي كالتالي

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

و

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0]u(t)$$

المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة هي

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

والقيم المميزة لمصفوفة الحالة تعطى من حل

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحددة بالسطر الأول نجد

$$\begin{aligned} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_3 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} \\ = -\lambda(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) - 1(a_3) \\ = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا أي ان القيم المميزة لمصفوفة الحالة لنظام خطي مستقر تتطابق مع جذور المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة.

<u>2- حالة المعادلات التفاضلية والجبرية المختلطة :</u>

ضع النظام التالي على شكل فضاء الحالة القياسي

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) + \frac{d}{dt}x_2(t) &= -4x_1(t) + x_4(t) + x_5(t) + u(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= x_2(t) - 5x_3(t) + 3u(t) \\ 0 &= x_3(t) + x_4(t) \\ 0 &= x_1(t) - 3x_2(t) + x_3(t) + 7u(t) \\ 0 &= x_1(t) - x_2(t) + x_5(t) \end{aligned}$$

لنكتب هذه المعادلات على الشكل المصفوفي

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_3(t) \\ \frac{d}{dt}x_4(t) \\ \frac{d}{dt}x_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

لنقسم المصفوفات كالتالي

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_3(t) \\ \frac{d}{dt}x_4(t) \\ \frac{d}{dt}x_5(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} u(t)$$

لقد اصبحت على الشكل

$$\begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_d(t) \\ \frac{d}{dt}x_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_d \\ b_a \end{bmatrix} u(t)$$

والتي لها الحل

$$\frac{d}{dt}x_d(t) = Ax_d(t) + wu(t)$$

حيث

$$A = E_{11}^{-1}\left(C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}\right)$$
$$w = E_{11}^{-1}\left(b_d - C_{12}C_{22}^{-1}b_a\right)$$

3- تحويل الأنظمة غير خطية إلى خطية:

أوجد تقريب خطي للنظام

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} x_2^2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad bu(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

سوف نإخذ حالة المرجع Reference State نقطة التوازن Equilibrium Point مع $dx_0(t)/dt = 0$. $u_0(t)$

الحل:

سوف نفك النظام حول $x_0(t)$ و $u_0(t)$ ونحدد الحالة المرجع وهي

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = 0$$
$$Ax_0(t) + f\left(x_0(t), u_0(t)\right) + 0 = 0$$

أو

$$0 = -x_{10}(t) + 2x_{20}(t) + x_{20}^2(t)$$
$$0 = -x_{10}(t) - 3x_{20}(t)$$

وبإعادة الترتيب نجد

$$x_{10}(t) = -3x_{20}(t)$$
$$3x_{20}(t) + 2x_{20}(t) + x_{20}^2(t) = \left(5 + x_{20}(t)\right)x_{20}(t) = 0$$

وهكذا حالتي الإستقرار هي

$$x_{10}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{20}(t) = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الجاكوبية Jacobian Matrix التابعة لمتجه الحالة يمكن التعبير عنه علما بأن $J_{u(t)} = 0$

$$J_{x(t)} = \left[\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1(t)} f_1\left(x(t),u(t)\right) & \frac{\partial}{\partial x_2(t)} f_1\left(x(t),u(t)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1(t)} f_2\left(x(t),u(t)\right) & \frac{\partial}{\partial x_2(t)} f_2\left(x(t),u(t)\right) \end{matrix}\right]_{x_0(t),u_0(t)} = \left[\begin{matrix} 0 & 2x_2(t) \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]_{x_0(t),u_0(t)}$$

للحالة المرجع مع $x_0^T(t) = [0 \quad 0]$ النظام الخطي (الذي جعل خطيا) هو

$$\frac{d}{dt}\delta x(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\delta x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta u(t)$$

وللحالة المرجع $x_0^T(t) = [15 \quad -5]$ النظام الخطي هو

$$\frac{d}{dt}\delta x(t) = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\delta x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta u(t)$$

هذه الأنظمة الخطية المستقرة تمثل تقريب خطي للنظام الأصلي حول حالات اولية مختلفة.

حل الأنظمة الخطية المستقرة:

الأنظمة الخطية المستقرة المتجانسة:

سوف نقارن بين الحل لمعادلة في متغير عادي Scalar بمعادلة لمتغير مصفوفي (متجة)

الحالة العادية:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t), \quad x_0(0) = x_0$$

بالطرق السابقة لحل المعادلات التفاضلية نجد الحل

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

الحالة المصفوفية:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad x_0(0) = x_0$$

بنفس الطريقة الحل هو

$$x(t) = e^{At}x_0$$

المصفوفة e^{At} تسمى مصفوفة إنتقال الحالة State Transition Matrix

خواص مصفوفة إنتقال الحالة:

1. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $\int e^{At}dt = A^{-1}e^{At} = e^{At}A^{-1}$
3. $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}$
4. $let\ \tau = -t, \quad e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{-At} = I \quad or \quad \left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$
5. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}, \quad if \quad AB = BA$

الأنظمة الخطية المستقرة غيرالمتجانسة:

الحالة العادية:

$$\frac{d}{dt}x(t) - ax(t) = bu(t)$$

بالطرق السابقة لحل المعادلات التفاضلية نجد الحل

$$x(t) = x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

الحالة المصفوفية:

$$\frac{d}{dt}x(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

بنفس الطريقة الحل هو

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية:

تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية أسهل بكثير من نظيره للمعادلات التفاضلية كما ان حل النظام الناتج يتم عن طريق حل تكراري للنظام ويستخدم برنامج مثل Excel لإيجاد الحل كما سنرى لاحقا.

توضع أي معادلة فروقية من أي درجة بشكل تمثيل فضاء الحالة كالتالي:

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k$$

حيث x_k متجه الحالة عند التكرار k و G مصفوفة الحالة (مربعة) و H مصفوفة حدود غير التجانس.

مثال1:

حول المعادلة الفروقية التالية من الدرجة الثانية ومتغير حالة إلى معادلتين من الدرجة الأولى ومتغيري حالة.

$$x_{k+2} + 5x_{k+1} - 7x_k = 2k$$

الحل:

نضع أولا المعادلة على الشكل:

$$x_{k+2} = -5x_{k+1} + 7x_k + 2k$$

ضع $x_{k+1} = y_k$ فينتج

$$x_{k+1} = y_k$$
$$y_{k+1} = -5y_k + 7x_k + 2k$$

أي

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} k$$

وهي على الشكل $x_{k+1} = Gx_k + Hu_k$ حبث

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

و

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لقيم أولية $x_0 = 1, \quad y_0 = 1$ أوجد حل للنظام السابق

الحل بإستخدام Excel:

أدخل التالي:

	A	B	C
1	k	x(k)	y(k)
2	0	1	1
3	1	=C2	=-5*C2+7*B2+2*A3
4	2	=C3	=-5*C3+7*B3+2*A4
5	3	=C4	=-5*C4+7*B4+2*A5
6	4	=C5	=-5*C5+7*B5+2*A6
7	5	=C6	=-5*C6+7*B6+2*A7
8	6	=C7	=-5*C7+7*B7+2*A8

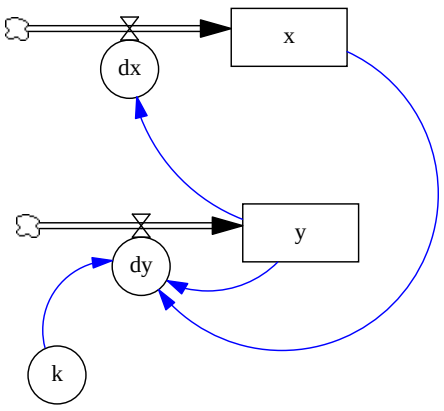
نجد

	A	B	C
1	k	x(k)	y(k)
2	0	1	1
3	1	1	4
4	2	4	-9
5	3	-9	79
6	4	79	-450
7	5	-450	2813
8	6	2813	-17203

أهمية تمثيل فضاء الحالة هو سهولة برمجتها في برامج تحليل ومحاكاة الأنظمة الحركية مثل برنامج Vensim و STELLA وغيرها.

تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية بواسطة Vensim:

تمثيل النظام السابق بواسطة Vensim :



dx = y

dy = -5*y+7*x+2*k

k = LOOKUP([(0,0)-(10,10)],(0,0),(1,1),(10,10))

x = INTEG (dx, 1)

y = INTEG (dy, 1)

الفصل السادس:

بعض النماذج الأساسية:

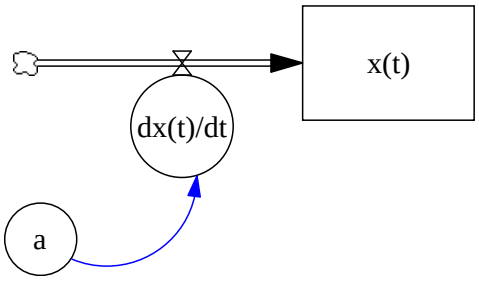
سوف نبني وندرس بعض النماذج الأساسية التي تعتبر تركيبات اولية لبناء نماذج أكثر تعقيدا واقرب إلى العالم الحقيقي

1- نموذج النمو (الانحلال) الخطي :

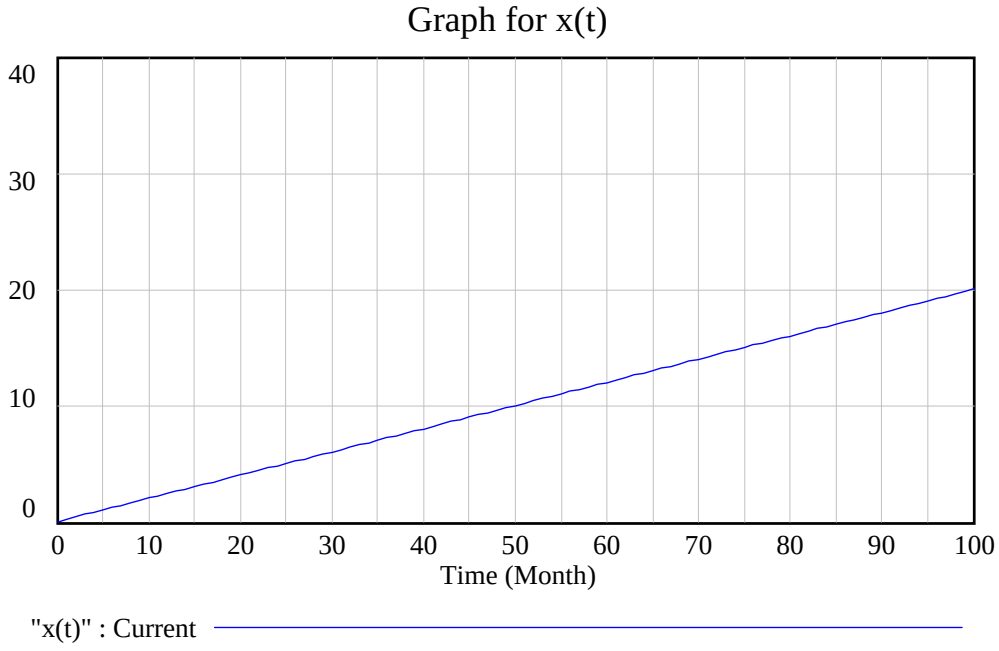
هذا ابسط تركيب لنظام يزداد أو يتناقص بمعدل ثابت، فلو فرضنا ان المستوى او المتاع عند الزمن t يمثل بالمقدار $x(t)$ فإن معدل الزيادة $(a>0)$ أو النقص $(a<0)$ يعطى بالعلاقة

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = a$$

ويمثل بالشكل:



و لـ $(a>0)$ تعطى بالشكل



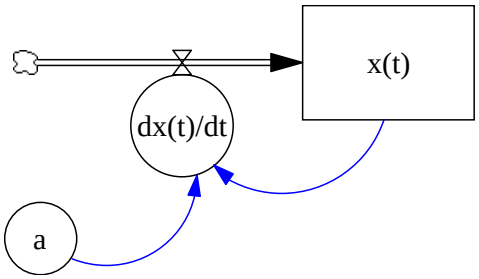
ملاحظة: سوف نرمز دائما لـ $\frac{dx(t)}{dt}$ بالرمز $\dot{x}(t)$

2- نموذج النمو (الانحلال) الاسي:

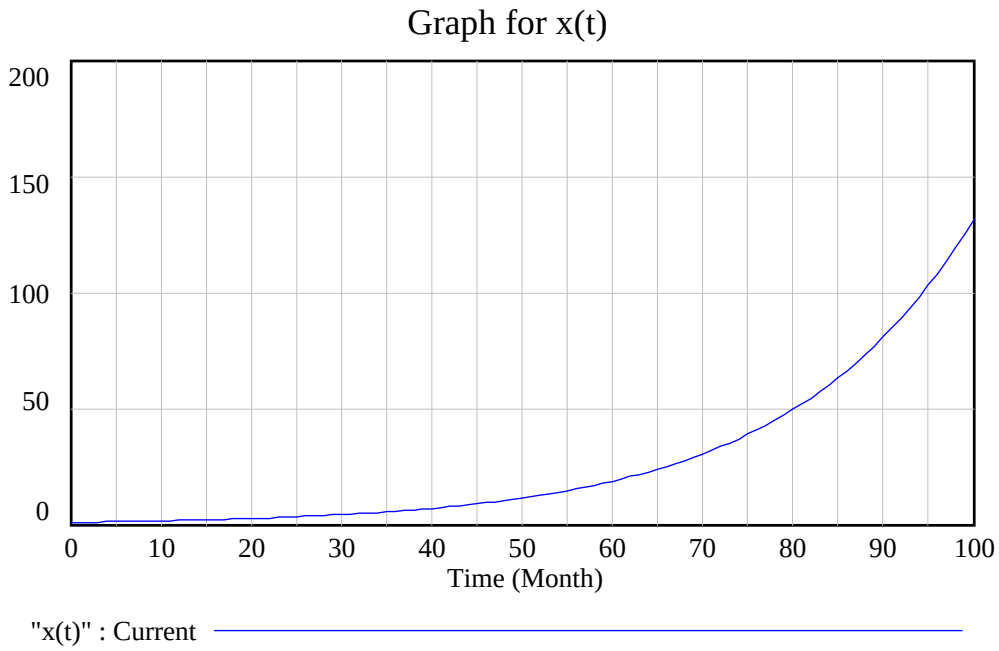
هذا النموذج يتعلق بمستوى أو متاع يتزايد أو ينقص بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة، فلو فرضنا ان المستوى او المتاع عند الزمن t يمثل بالمقدار $x(t)$ فإن معدل الزيادة $(a>0)$ او النقص $(a<0)$ يعطى بالعلاقة

$$\dot{x}(t)=ax(t)$$

ويمثل بالشكل:



و لـ $(a>0)$ تعطى بالشكل

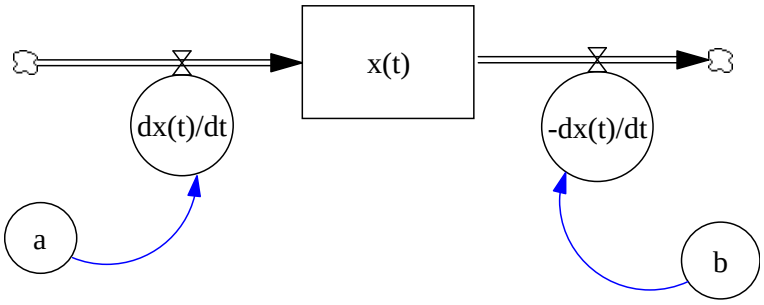


تمرين: أرسم الشكلين السابقين لقيمة $(a<0)$

3- نموذج النمو والانحلال الخطي :

ويمثل متاع او مستوى يتزايد بمعدل ثابت $(a > 0)$ وفي نفس الوقت يتناقص بمعدل ثابت آخر $(b < 0)$ ويمثل كالتالي:

$$\dot{x}(t) = a - b$$

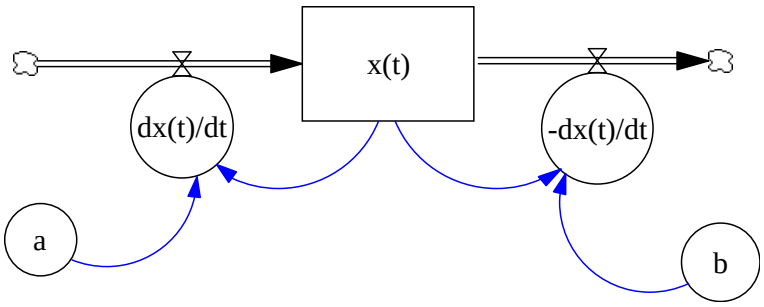


4- نموذج النمو والانحلال الاسي:

هذا النموذج يتعلق بمستوى أو متاع يتزايد و ينقص بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة، فلو فرضنا ان المستوى او المتاع عند الزمن t يمثل بالمقدار $x(t)$ فإن معدل الزيادة $(a > 0)$ و النقص $(b < 0)$ يعطى بالعلاقة

$$\dot{x}(t) = (a - b)\,x(t)$$

ويمثل بالشكل:

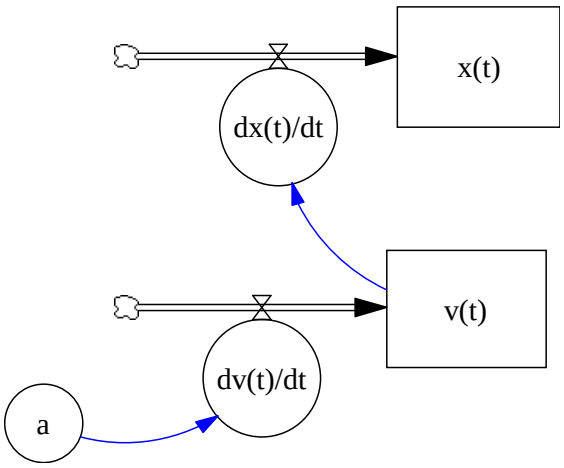


5- النموذج التربيعي:

هذا النموذج يجمع عمليتين خطيتين معا لكي يعطي نتيجة مركبة ، فمثلا لوكان $x(t)$ يمثل موقع مركبة فإن $\dot{x}(t)$ يمثل سرعتها الافقية الثابتة ولو رمزنا للسرعة بالرمز $v(t)$ (لاحظ أن $v(t)=\dot{x}(t)$) فإن التعجيل يكون $\frac{dv(t)}{dt}=\dot{v}(t)=\ddot{x}(t)$ وتكتب معادلات الحركة بشكل المعادلة

$$\ddot{x}(t)=a$$

حيث $a>0$ تعجيل زيادة و $a<0$ تعجيل نقص

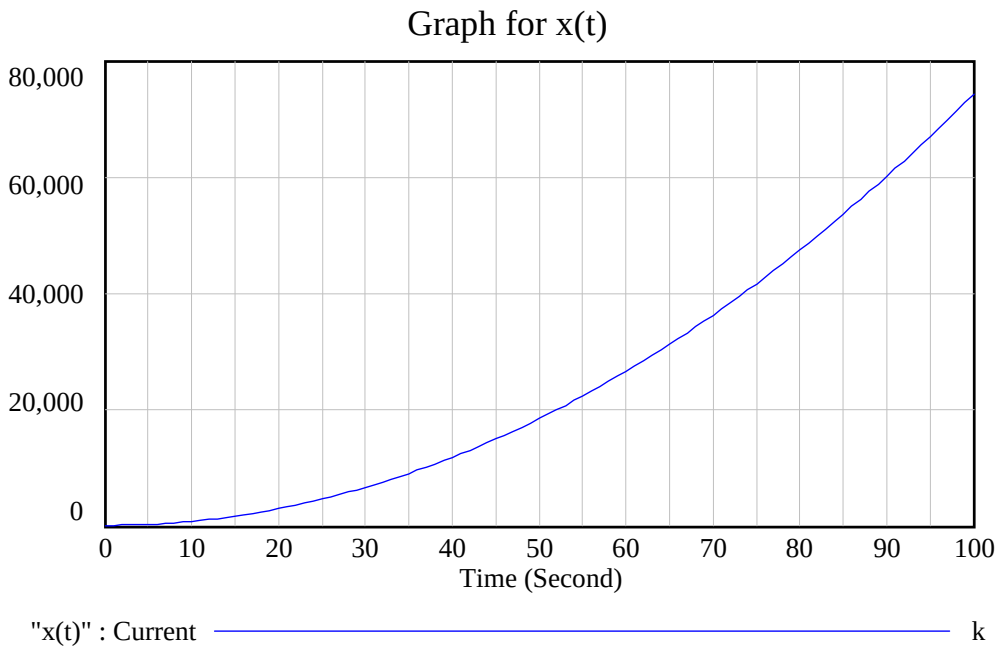


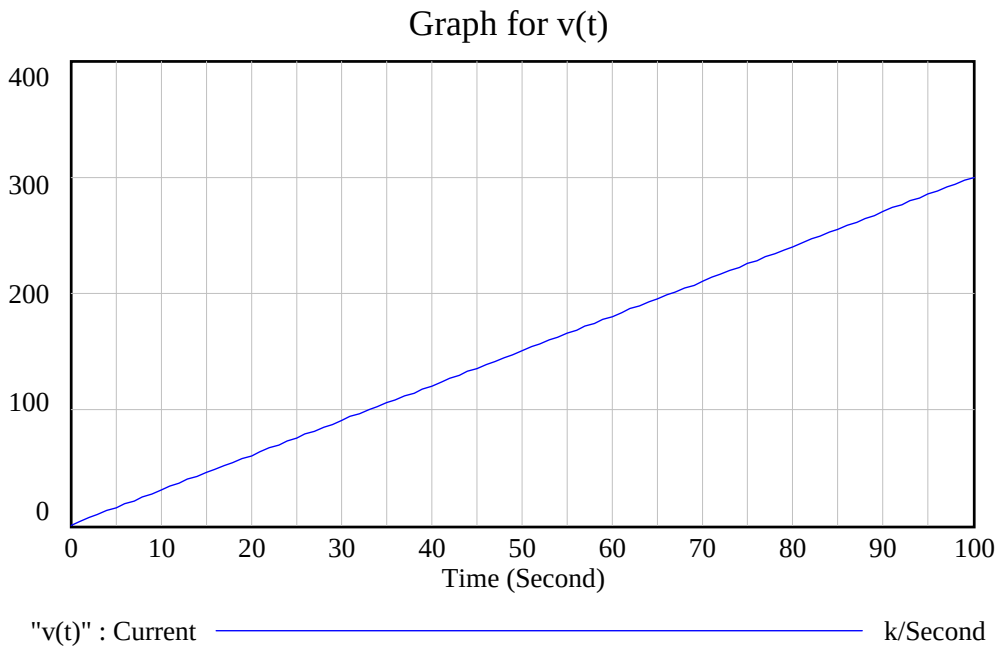
وتكتب المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية على شكل معاداتين تفاضلية من الدرجة الأولى (معادلات الحالة State Equations) كالتالي:

$$\dot{x}(t)=v(t)$$
$$\dot{v}(t)=a$$

ولقيم اولية

$$x(0)=0\ \text{k}$$
$$v(0)=0\ \text{k/sec}$$
$$\dot{x}(t)=5\ \text{k/sec}$$
$$\dot{v}(t)=3\ \text{k/sec}^2$$


Graph for x(t)
80,000
60,000
40,000
20,000
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Time (Second)
"x(t)" : Current
k


Graph for v(t)
400
300
200
100
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Time (Second)
"v(t)" : Current
k/Second

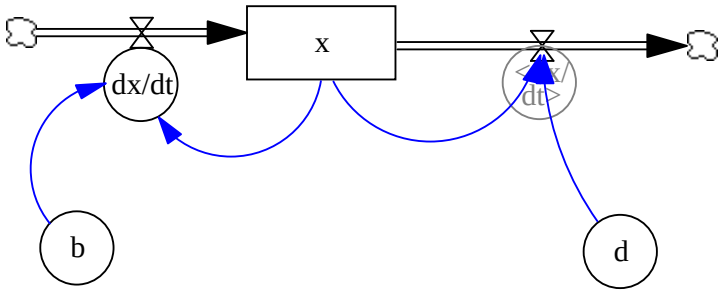
(3) نموذج الولادة والموت Birth-Death Model

ويوصف بالمعادلة التفاضلية

$$\dot{x} = (b - d)\,x$$

أو الفروقية

$$x_t = x_{t-1} + (b - d)\,x_{t-1}$$



dx/dt=(b-d)x

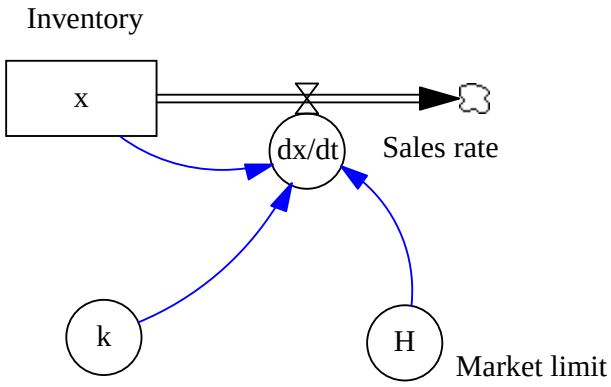
(1)نموذج منحنى النمو اللوجستي Logistic Growth Model

ويوصف بالمعادلة التفاضلية

$$\dot{x} = k\,(H - x)$$

أو الفروقية

$$x_t = x_{t-1} + k\,(H - x_{t-1})$$



dx/dt=k(H-x)

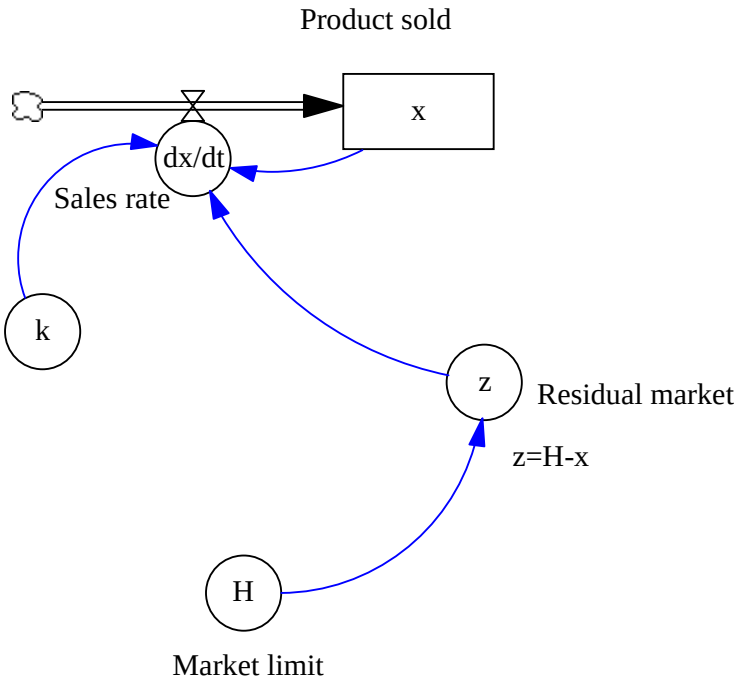
(5) نموذج النمو المحدود بشروط (لوجستي) Product Limit Growth

ويوصف بالمعادلة التفاضلية

$$\dot{x} = kx(h - x)$$

او الفروقية

$$x_t = x_{t-1} + kx_{t-1}(h - x_{t-1})$$



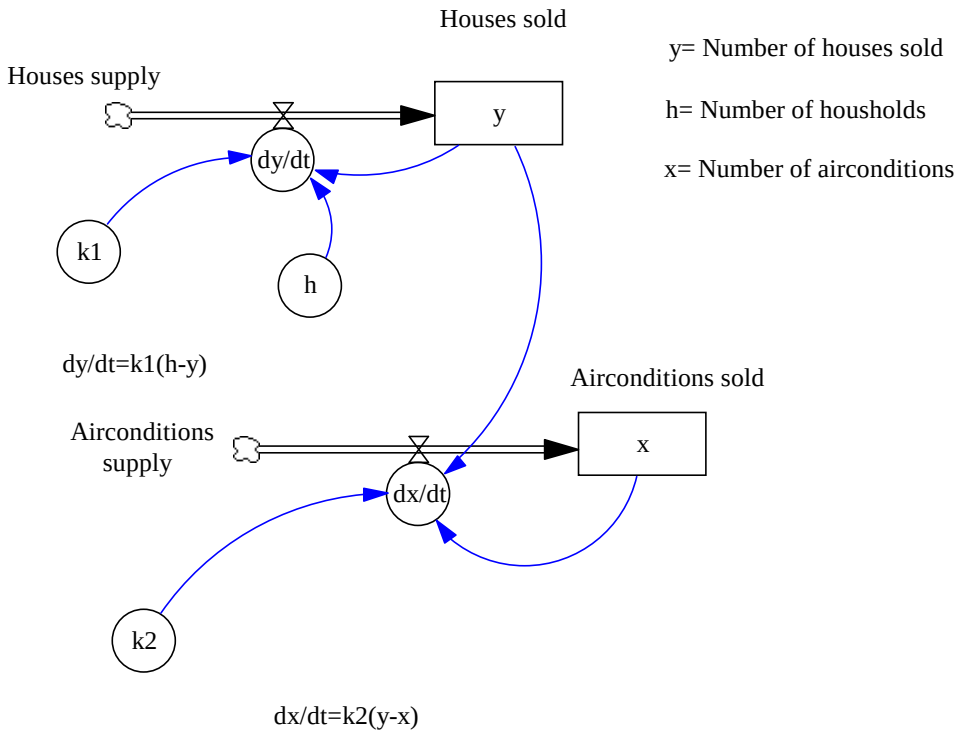
dx/dt=kx(h-x)

(6) نموذج يوصف بالمعادلات التفاضلية لمتغيري حالة:

$$\dot{y} = k_1 (h - y)$$
$$\dot{x} = k_2 (y - x)$$

أو الفروقية

$$y_t = y_{t-1} + k_1 (h - y_{t-1})$$
$$x_t = x_{t-1} + k_2 (y_t - x_{t-1})$$

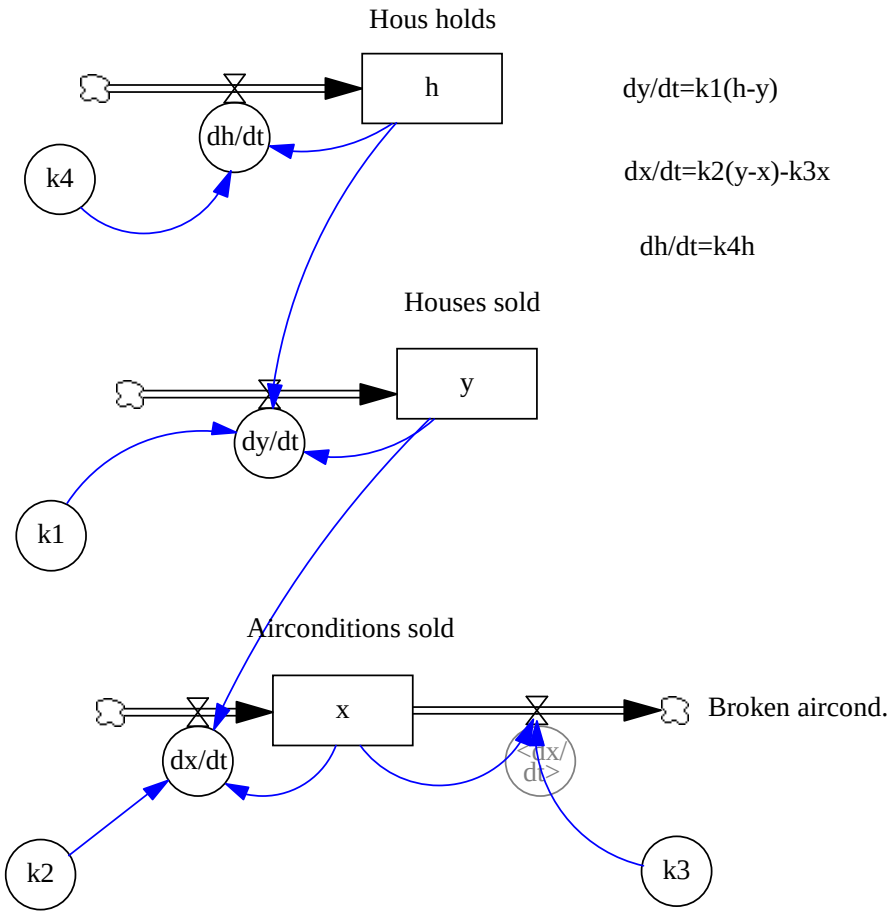


(7) نموذج يوصف بالمعادلات التفاضلية لثلاث متغيرات حالة:

$$\dot{h} = k_4 h$$
$$\dot{y} = k_1 (h - y)$$
$$\dot{x} = k_2 (y - x) - k_3 x$$

أو الفروقية

$$h_t = h_{t-1} + k_4 h_{t-1}$$
$$y_t = y_{t-1} + k_1 (h_t - y_{t-1})$$
$$x_t = x_{t-1} + k_2 (y_t - x_{t-1}) - k_3 x_{t-1}$$


Hous holds
h
dh/dt
k4
dy/dt=k1(h-y)
dx/dt=k2(y-x)-k3x
dh/dt=k4h
Houses sold
y
dy/dt
k1
Airconditions sold
x
Broken aircond.
dx/dt
<dx/dt>
k2
k3

الفصل السابع:

حالات دراسية لبناء بعض النماذج:

1- مثال على بناء نموذج لحركية السوق:

في هذا المثال سوف نستعرض بناء نموذج لحركية تسويق منتج دائم. النموذج يوضح نمو السوق الكلي لمنتج جديد طور بحيث يتم شرائه مرة واحدة لكل زبون. سوف نعتبر ان انتشار المعرفة عن هذا المنتج تعتمد على الزبائن الذين اشتروا هذا المنتج ولهذا فإن معدل شراء المنتج يعتمد على:

(1) عدد الزبائن الذين اشتروا المنتج

(2) عدد الزبائن الباقين الذين يتوقع ان يشتروا المنتج

(3) درجة إقتناع الزبائن المتوقعين برضاء الزبائن الذين إشتروا المنتج عند إحتكاكهم ببعضهم البعض

أولا: سوف نناقش الحالة التي يكون فيها عدد الزبائن المتوقعين كبير جدا (لانهائي)، سوف نطلق على الزبائن الذين اشتروا المنتج فعلا ActualCustomers (مشترين) وعلى الذين يتوقع ان يشتروا PotentialCustomers (متوقعين) وسوف نعتبر الحالة التي فبها عدد المتوقعين اكبر بكثير من المشترين ويظل تقريبا ثابت بغض النظر عن زيادة المشترين.

لنفترض انه لفترة زمنية قصيرة Δt كل واحد من المشترين يحول $c\Delta t$ من المتوقعين إلي مشترين، حيث c ثابت موجب (معامل التحويل conversion coefficient) والذي يعطي مقياسا لمدى فعالية المشترين لإقناع المتوقعين لكي يصبحوا مشترين.

إذا إفترضنا ان عند الزمن t يوجد $n(t)$ من المشترين كل واحد منهم حول $c\Delta t$ من المتوقعين إلى مشترين في الفترة الزمنية Δt فعند الزمن $t+\Delta t$ عدد المشترين يصبح

$$n(t+\Delta t) = n(t) + n(t)\,c\Delta t$$

أو

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = \frac{dn(t)}{dt} = cn(t) \quad (1)$$

أو على شكل معادلة تكاملية

$$n(t) = n_0 + \int_0^t cn(\tau)\,d\tau \quad (2)$$

حيث n_0 هو عدد المشترين عند الزمن $t = 0$ ، حل المعادلة السابقة هو

$$n(t) = n_0 e^{ct}, t \geq 0 \quad (3)$$

ملاحظة: سوف نصيغ العلاقات السابقة من (1)-(3) علي شكل معادلة فروقية:

$$n(t+\Delta t) - n(t) = n(t)\, c\Delta t$$

for $\Delta t = 1$ (one time unit)

$$n_{t+1} = n_t + n_t c$$

$$n_{t+1} = (1+c) n_t$$

when $t = 0, \quad n_t = n_0$

$$n_1 = (1+c) n_0$$

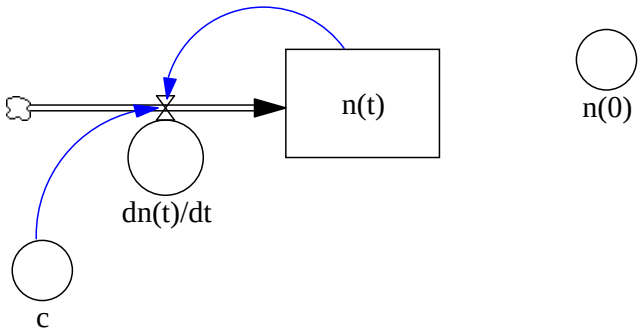
$$n_2 = (1+c) n_1 = (1+c)(1+c) n_0 = (1+c)^2 n_0$$

$$n_3 = (1+c) n_2 = n_0 (1+c)^3$$

or

$$n_t = n_0 (1+c)^t, \quad t \geq 0$$

الشكل التالي يمثل النموذج بلغة Vensim



(1) c = 1 Units: **undefined**

(2) "dn(t)/dt" = c*"n(t)" Units: **undefined**

(3) FINAL TIME = 100 Units: Month The final time for the simulation.

(4) INITIAL TIME = 0 Units: Month The initial time for the simulation.

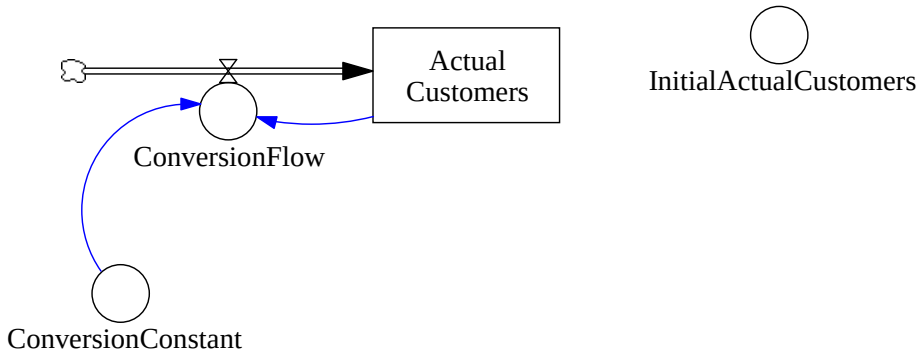
(5) "n(0)" = 1 Units: **undefined**

(6) "n(t)"= INTEG ("dn(t)/dt", "n(0)") Units: **undefined**

(7) SAVEPER = TIME STEP Units: Month The frequency with which output is stored.

(8) TIME STEP = 1 Units: Month The time step for the simulation.

أو:



(1) ActualCustomers = INTEG (ConversionFlow, InitialActualCustomers)
Units: **undefined**

(2) ConversionConstant = 1 Units: **undefined**

(3) ConversionFlow = ConversionConstant*ActualCustomers
Units: **undefined**

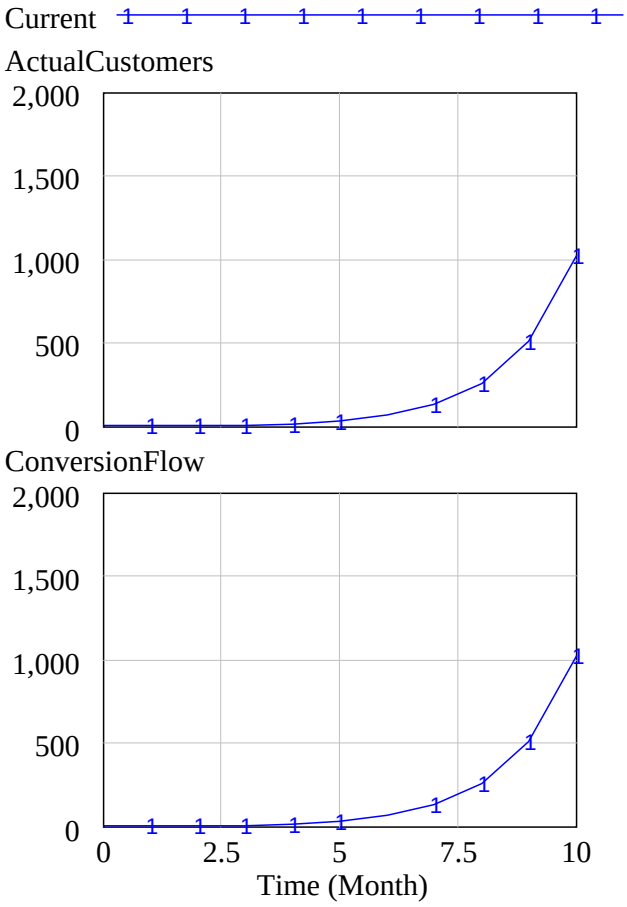
(4) FINAL TIME = 10 Units: Month The final time for the simulation.

(5) INITIAL TIME = 0 Units: Month The initial time for the simulation.

(6) InitialActualCustomers = 1 Units: **undefined**

(7) SAVEPER = TIME STEP Units: Month The frequency with which output is stored.

(8) TIME STEP = 1 Units: Month The time step for the simulation.



لاحظ نمط النمو الاسي لكل من عدد المشترين و معدل إنسياب المتوقعين إلى مشترين.

ثانيا: الآن نناقش الحالة التي يكون فيها عدد المتوقعين محدود (نهائي)، لأن في الحقيقة النمو الاسي لايمكن ان يستمر للأبد وذلك لأن المتوقعين سيتحولوا كلهم إلى مشترين إذا كان عددهم محدود.

لنفترض ان العدد الكلي للمتوقعين هو M فيكون عدد الزبائن المتبقين عند الزمن t هو $M-n(t)$ حيث $n(t)$ هو عدد المشترين عند الزمن t و لنفترض ان c هو معدل التحويل لكل مشتري عندما يوجد M متوقعين، سوف نفترض ان معدل التحويل يتناسب خطيا مع العدد الكلي للمتوقعين المتبقيين عند اي لحظة زمنية، فمثلا لو كان تبقى نصف المتوقعين فإن معدل التحويل لكل مشتري هو $c/2$ وإذا تبقي ربع المتوقعين فإن معدل التحويل لكل مشتري هو $c/4$ وهكذا.

تحت هذه الفرضيات فإن عدد المتوقعين المحولين بمشترى واحد في الفترة الزمنية Δt هو

$$\{[M-n(t)]/M\}\times c\Delta t$$

ويكون عدد المتوقعين المحولين بكل $n(t)$ مشترى هو

$$n(t)\times\{[M-n(t)]/M\}\times c\Delta t$$

عند الزمن $t+\Delta t$ عدد المشترين يصبح

$$n(t+\Delta t)=n(t)+n(t)\times\{[M-n(t)]/M\}\times c\Delta t$$

$$\frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{\Delta t}=c\times\{[M-n(t)]/M\}\times n(t)$$

أو

$$\frac{dn(t)}{dt}=c\times\frac{M-n(t)}{M}\times n(t) \qquad (4)$$

أو بشكل معادلة تكاملية

$$n(t)=n_0+\int_0^t c\times\frac{M-n(\tau)}{M}\times n(\tau)\,d\tau \qquad (5)$$

حيث n_0 هو عدد المشترين عند الزمن $t=0$ ، حل المعادلة السابقة هو

$$n(t)=\frac{M}{1+[(M-n_0)/n_0]e^{-ct}},\quad t\geq 0 \qquad (6)$$

المعادلة (6) لمنحنى يسمى المنحنى اللوجستي logistic curve

ملاحظة: سوف نصيغ العلاقات السابقة من (4)-(6) علي شكل معادلة فروقية:

$$n_{t+1}-n_t=c\times\frac{M-n_t}{M}\times n_t$$

$$n_{t+1}=n_t+c\left(1-\frac{n_t}{M}\right)n_t$$

$$n_{t+1}=n_t+c(1-\alpha n_t)n_t$$

where $\alpha=1/M$

وهذه معادلة فروقية غير خطية سوف نحلها بطريقة التكرار فإذا فرضنا أن $n_0=1$ هو عدد المشترين عند الزمن $t=0$ ومعدل التحويل $c=1$ والعدد الكلي للمتوقعين هو $M=100$ فإن $\alpha=1/M=0.01$

$$n_{t+1}=n_t+c(1-\alpha n_t)n_t$$

$$n_1=n_0+c\times(1-\alpha n_0)n_0$$
$$=1+1\times(1-0.01\times 1)\times 1=1.99$$

$$n_2 = n_1 + c \times (1 - \alpha n_1) n_1$$
$$= 1.99 + 1 \times (1 - 0.01 \times 1.99) \times 1.99 = 3.94$$

$$n_3 = n_2 + c \times (1 - \alpha n_2) n_2$$
$$= 3.94 + 1 \times (1 - 0.01 \times 3.94) \times 3.94 = 7.73$$

$n_4 = 14.85$

$n_5 = 27.50$

$n_6 = 47.44$

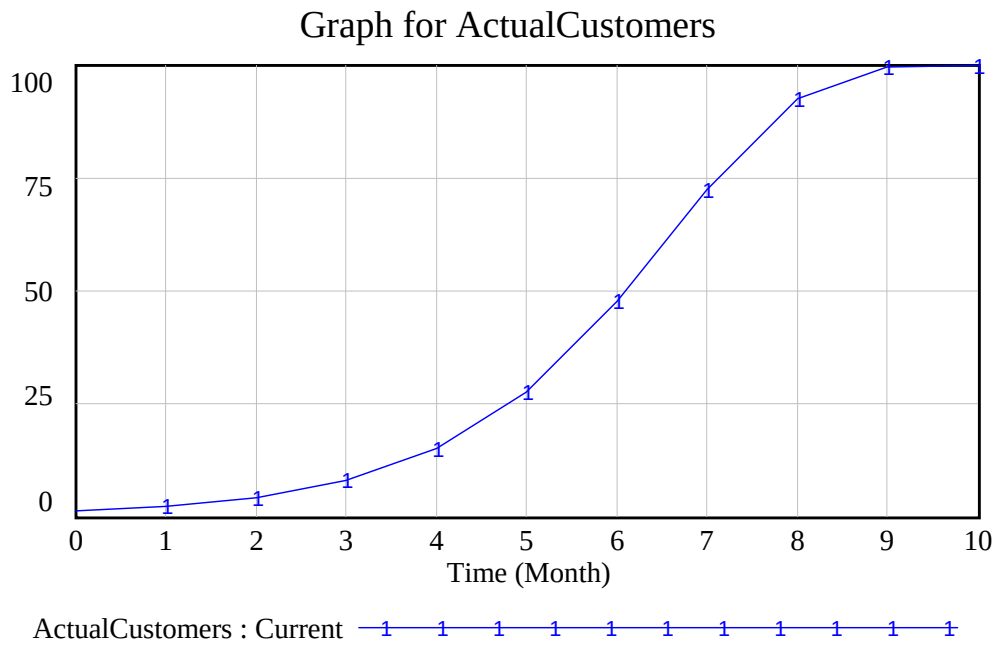
$n_7 = 72.37$

$n_8 = 92.37$

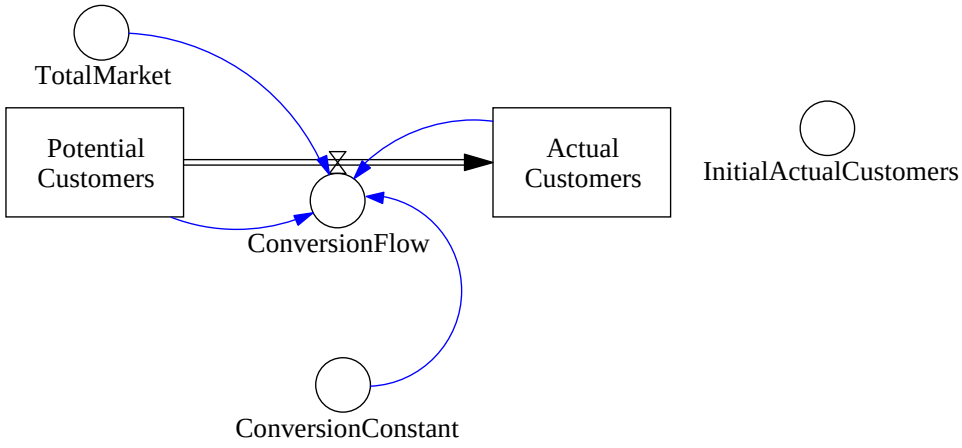
$n_9 = 99.42$

$n_{10} = 99.996$

ولها الشكل التالي:



سننفذ النموذج السابق بإستخدام Vensim كالتالي:



(01) ActualCustomers = INTEG (ConversionFlow, InitialActualCustomers)
Units: **undefined**

(02) ConversionConstant = 1 Units: **undefined**

(03) ConversionFlow =
ConversionConstant*(PotentialCustomers/TotalMarket)*ActualCustomers
Units: **undefined**

(04) FINAL TIME = 10 Units: Month The final time for the simulation.

(05) INITIAL TIME = 0 Units: Month The initial time for the simulation.

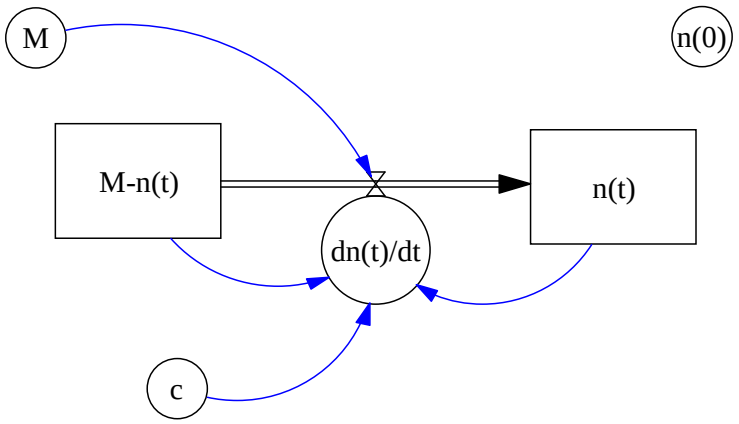
(06) InitialActualCustomers = 1 Units: **undefined**

(07) PotentialCustomers = INTEG (-ConversionFlow,
TotalMarket-InitialActualCustomers)
Units: **undefined**

(08) SAVEPER = TIME STEP Units: Month The frequency with which output is stored.

(09) TIME STEP = 1 Units: Month The time step for the simulation.

(10) TotalMarket = 100 Units: **undefined**



(01) c = 1 Units: **undefined**

(02) "dn(t)/dt" = c*("M-n(t)"/M)*"n(t)" Units: **undefined**

(03) FINAL TIME = 10 Units: Month The final time for the simulation.

(04) INITIAL TIME = 0 Units: Month The initial time for the simulation.

(05) M = 100 Units: **undefined**

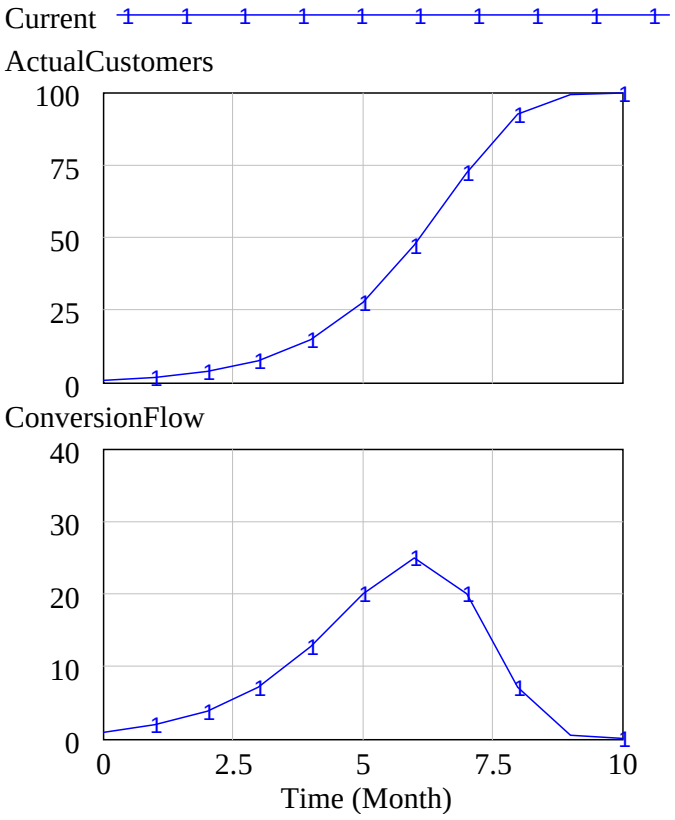
(06) "M-n(t)" = INTEG (-"dn(t)/dt", M-"n(0)") Units: **undefined**

(07) "n(0)" = 1 Units: **undefined**

(08) "n(t)" = INTEG ("dn(t)/dt", "n(0)") Units: **undefined**

(09) SAVEPER = TIME STEP Units: Month The frequency with which output is stored.

(10) TIME STEP = 1 Units: Month The time step for the simulation.



الشكل الأعلى يبين نمط حرف S التقليدي للمشترين $n(t)$ المرتبط بمنحنيات النمو اللوجستية وشكل منحني معدل التحويل الذي يشبه شكل الجرس (او فنجان القهوة المقلوب) والذي هو ايضا احد خصائص معدلات التحويل في النمو اللوجستي.

تعيين معالم النموذج Determining Model Parameters :

من الضروري جدا تعيين قيم المعالم لكي نستخدام النموذج، فللمنحنى اللوجستي من الضروري تحديد c و n_0 و M. سوف نستعرض طريقة لتحديد هذه المعالم بالمثال التالي:

البيانات التالية هي نسبة قيمة السوق لمنتجات مكروسوفت و إنتل من سنة 1984 وحتى سنة 1994

Year	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Market Value	3.0	2.5	4.0	7.5	7.0	13.0	17.0	29.0	46.5	50.0	49.5

اولا بإستخدام برنامج Curve Expert تدخل بيانات السنة في العامود تحت x وقيمة السوق في العمود تحت y ويعين النموذج بإختيار User-Defined Model كالتالي:

User-Defined Model: y=a/(1+b*exp(-c*x))

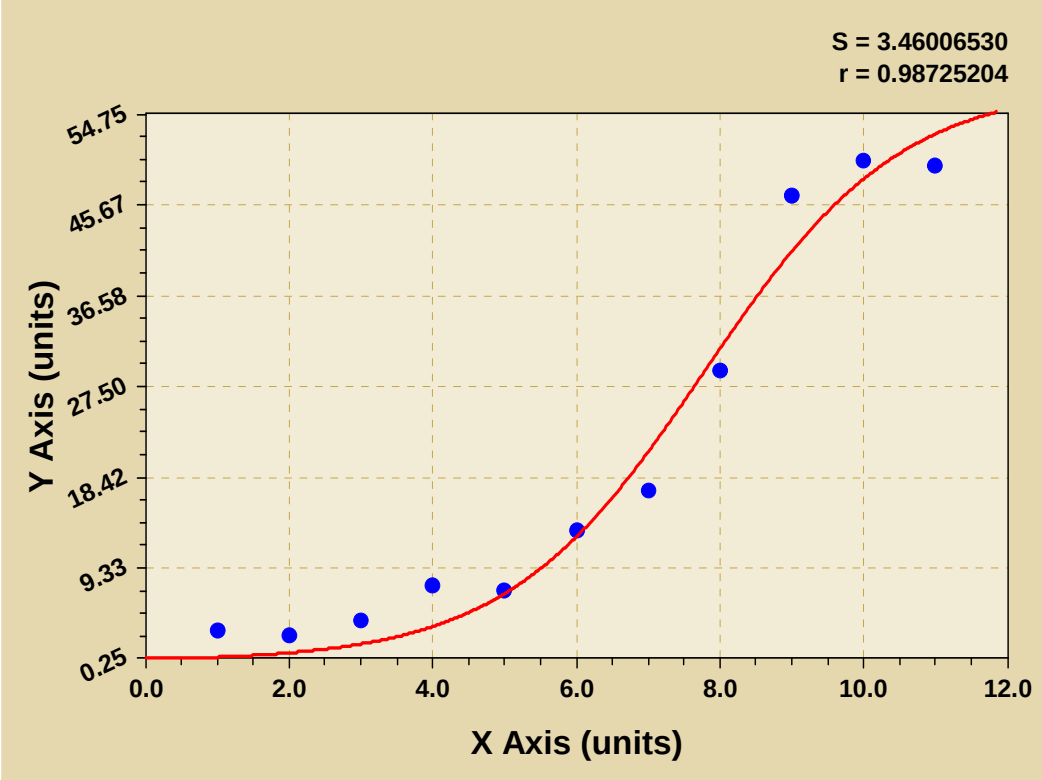
نحدد قيم اولية

Coefficient Data:

a = 57.760559

b = 286.77098

c = 0.72892383



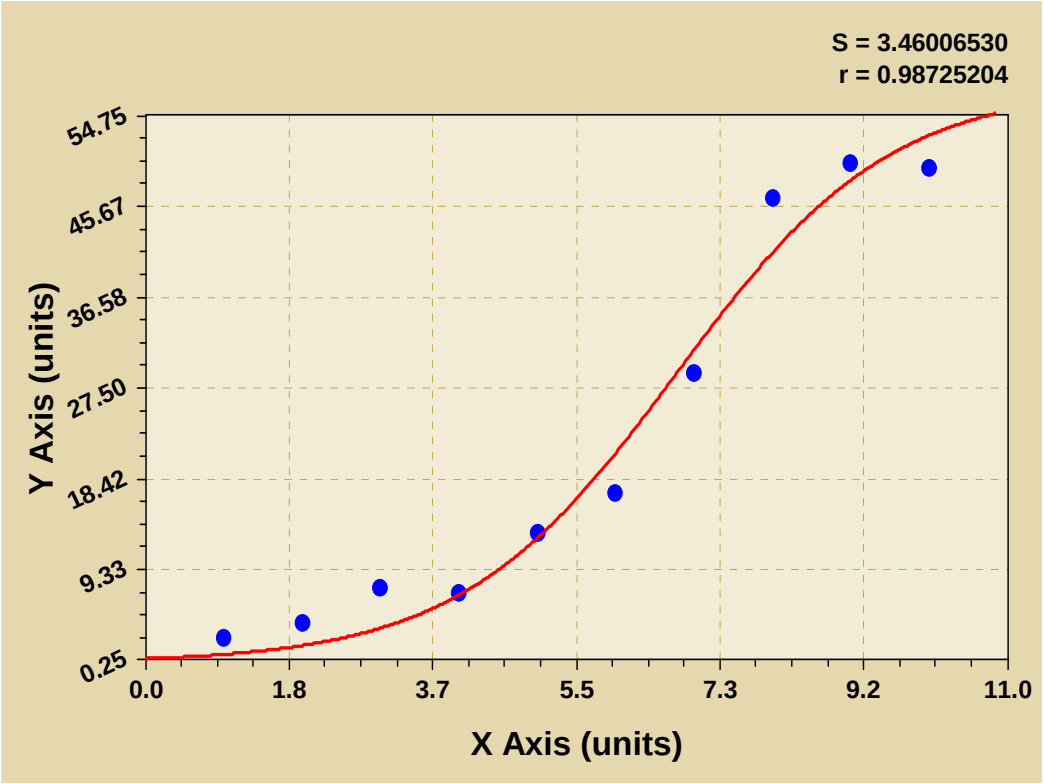
User-Defined Model: y=a/(1+b*exp(-c*x))

Coefficient Data:

a = 57.760567

b = 138.3462

c = 0.72892364

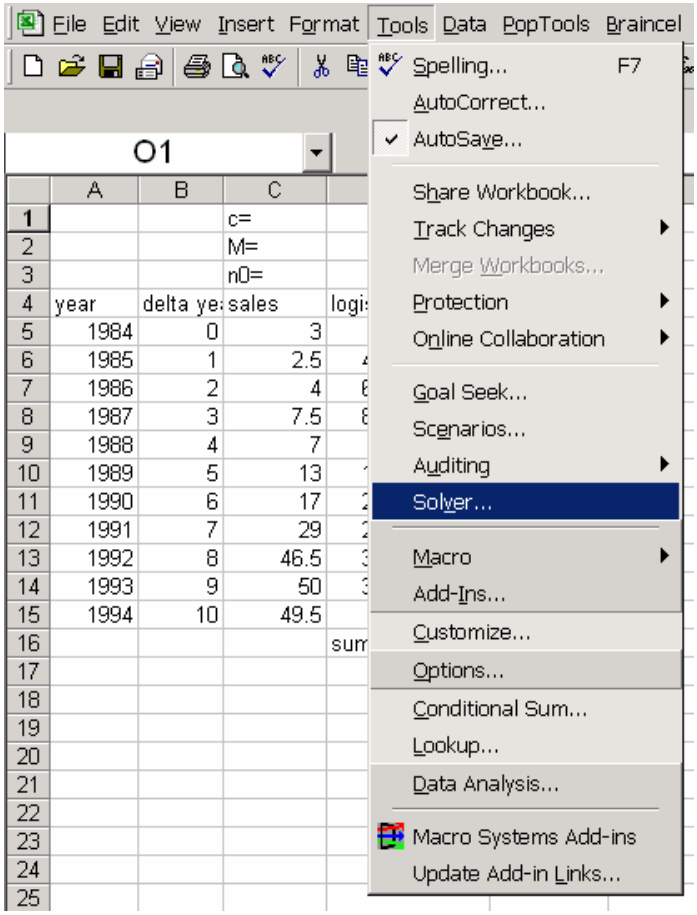


تعيين معالم النموذج بإستخدام Excel

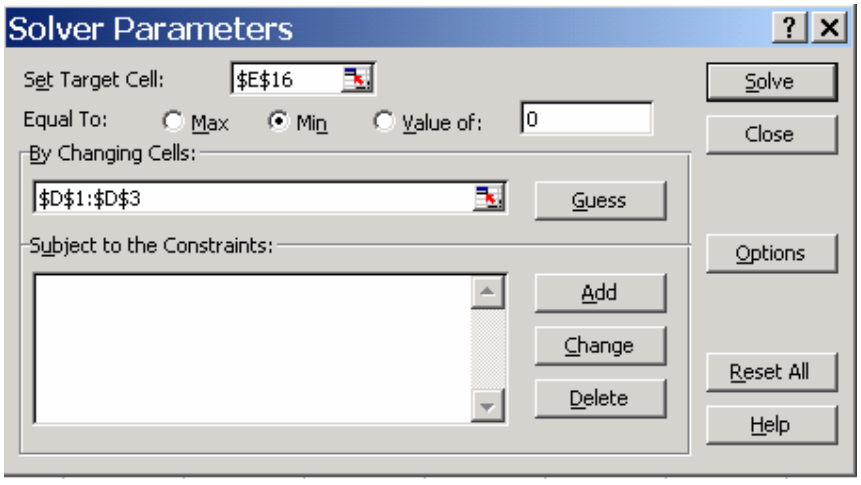
أدخل التالي في صفحة جديدة

	A	B	C	D	E
1			c=	0.4	
2			M=	55	
3			n0=	3	
4	year	delta year	sales	logistic	s error
5	1984	0	3	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B5))	=(D5-C5)^2
6	1985	1	2.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B6))	=(D6-C6)^2
7	1986	2	4	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B7))	=(D7-C7)^2
8	1987	3	7.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B8))	=(D8-C8)^2
9	1988	4	7	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B9))	=(D9-C9)^2
10	1989	5	13	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B10))	=(D10-C10)^2
11	1990	6	17	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B11))	=(D11-C11)^2
12	1991	7	29	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B12))	=(D12-C12)^2
13	1992	8	46.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B13))	=(D13-C13)^2
14	1993	9	50	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B14))	=(D14-C14)^2
15	1994	10	49.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B15))	=(D15-C15)^2
16				sum=	=SUM(E5:E15)
17					

من سطر الأدوات أختار التالي

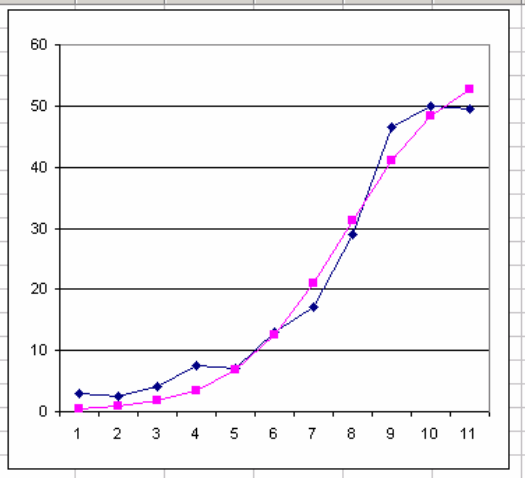


تظهر نافذة Solver



لاحظ أن Set Target Cell تحوي قيمة مجموع المربعات المراد تصغيره وفي Equal To أخترنا Min للتصغير ويتم تصغير مجموع المربعات بتغيير القيم By Changing Cells التي في خلايا القيم الأولية $D$1:$D$3 وباضغط على Solve نحصل على

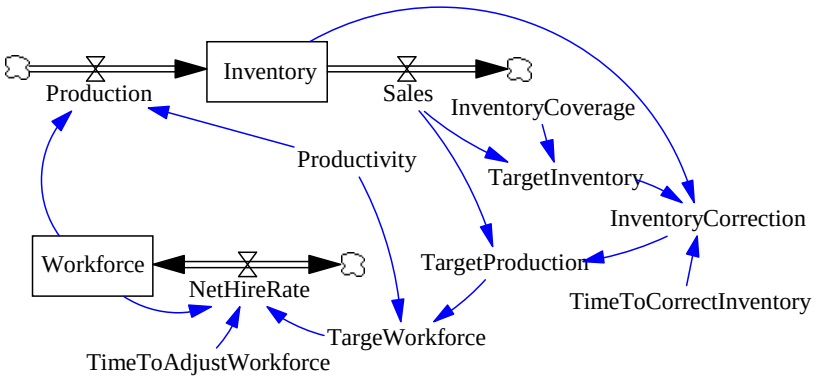
	A	B	C	D	E
1			c=	0.728908494	
2			M=	57.76106927	
3			n0=	0.414547642	
4	year	delta ye	sales	logistic	s error
5	1984	0	3	0.414547642	6.6845639
6	1985	1	2.5	0.852715829	2.7135451
7	1986	2	4	1.739966533	5.1077513
8	1987	3	7.5	3.493725224	16.050238
9	1988	4	7	6.800562739	0.0397752
10	1989	5	13	12.51549785	0.2347423
11	1990	6	17	21.04931992	16.396992
12	1991	7	29	31.36790081	5.6069542
13	1992	8	46.5	41.08405122	29.332501
14	1993	9	50	48.30198346	2.8832602
15	1994	10	49.5	52.77507135	10.726092
16				sum=	95.776415
17					
18					
19					
20					



لاحظ ان الخلايا D1 و D2 و D3 تحوى الآن القيم النهائية المقدرة للمعالم و E16 تحوى اقل قيمة لمجموع مربعات الأخطاء.

2- نموذج مخزون لقوة عاملة: The Workforce Inventory Example

هذا النموذج البسيط مهم جدا لإعطاء فكرة جيدة عن ميكانكية بناء نموذج ديناميكي فهو يبين كيفية التفاعل في سياسات إدارة المخزون واسلوب توظيف القوة العاملة قد تؤدي إلى عدم الإستقرار في الإنتاج. كما انة ايضا يبين نتيجة غير منطقية وهي ان الإندفاع في توظيف وتسريح العمال يمكن ان يؤدي الي قوة عاملة اكثر إستقرارا. الشكل التالي يوضح ديناميكة النموذج:



النموذج يحتوي على

ا) نوعين من المتاع Stocks (أو المستوى Level)

1) المخزون Inventory
2) القوة العاملة Workforce

ب) أربعة أنواع من الإنسياب Flows

1) الإنتاج Production وتزيد من متاع المخزون (إنسياب داخل Inflow)
2) المبيعات Sales وتقلل من متاع المخزون (أنسياب خارجي Outflow)
3) و 4) صافي معدل الإستخدام NetHireRate وهو يقلل أو يزيد من متاع القوة العاملة

ج) متغيرات مساعدة Auxiliary Variables

1) المخزون المستهدف TargetInventory
2) تصحيح المخزون InventoryCorrection
3) الإنتاج المستهدف TargetProduction
4) القوة العاملة المستهدفة TargetWorkforce

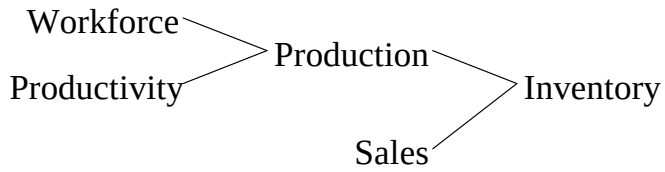
د) ثوابت النموذج Constants

1) الإنتاجية Productivity

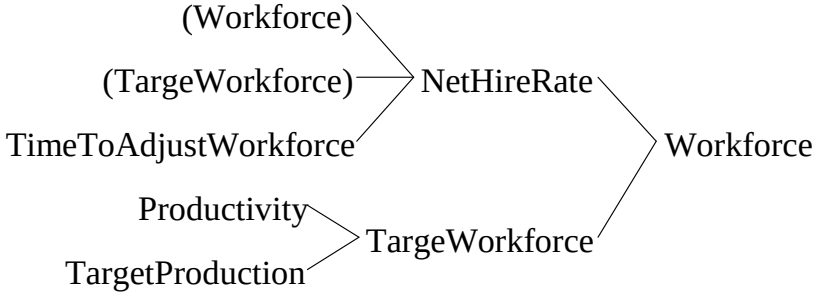
2) تغطية المخزون InventoryCoverage
3) الزمن المطلوب لتصحيح المخزون TimeToCorrectInventory
4) الزمن المطلوب لتعديل القوة العاملة TimeToAdjustWorkforce

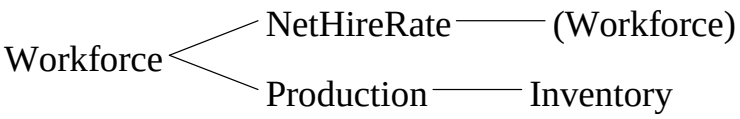
العلاقات السببية في النموذج: Causal Relationships between Variables

أولا: متاع المخزون:

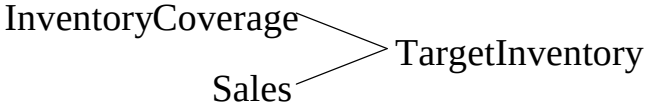


ثانيا: متاع القوة العاملة:



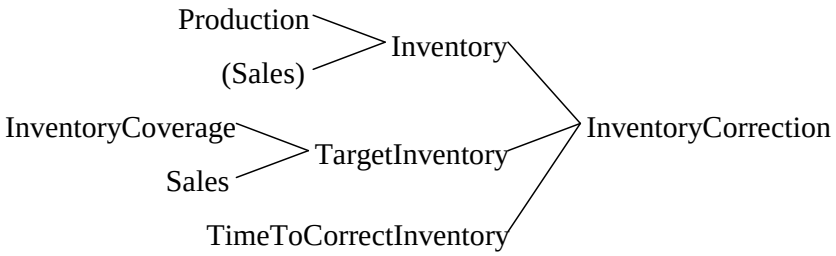


ثالثا: المتغير المساعد المخزون المستهدف



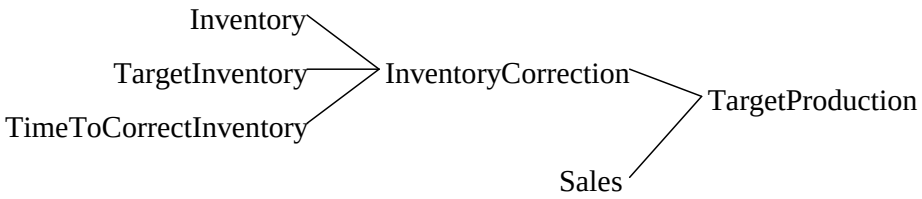
TargetInventory——— InventoryCorrection——— TargetProduction

رابعاً: المتغير المساعد تصحيح المخزون

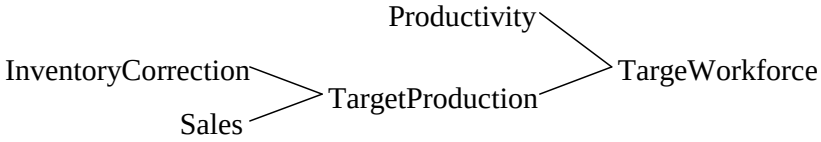


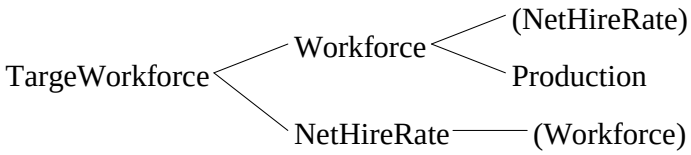
InventoryCorrection——— TargetProduction——— TargeWorkforce

خامساً: المتغير المساعد الإنتاج المستهدف



سادساً: القوة العاملة المستهدفة





دورات التغذية الخلفية Feedback Loops

دورة التغذية الخلفية لمتاع المخزون:

Loop Number 1 of length 6
Inventory
InventoryCorrection
TargetProduction
TargeWorkforce
NetHireRate
Workforce
Production

دورة التغذية الخلفية لمتاع القوة العاملة:

Loop Number 1 of length 1
Workforce
NetHireRate
Loop Number 2 of length 6
Workforce
Production
Inventory
InventoryCorrection
TargetProduction
TargeWorkforce
NetHireRate

دورة التغذية الخلفية للمتغير المساعد الإنتاج المستهدف:

Loop Number 1 of length 6
TargetProduction
TargeWorkforce
NetHireRate
Workforce

Production

Inventory

InventoryCorrection

دورة التغذية الخلفية للمتغير المساعد تصحيح المخزون:

Loop Number 1 of length 6

TargetProduction

TargeWorkforce

NetHireRate

Workforce

Production

Inventory

InventoryCorrection

دورة التغذية الخلفية للمتغير المساعد القوة العاملة المستهدفة:

Loop Number 1 of length 6

TargetProduction

TargeWorkforce

NetHireRate

Workforce

Production

Inventory

InventoryCorrection

معادلات النموذج:

(01) FINAL TIME = 100 Units: Month
The final time for the simulation.

(02) INITIAL TIME = 0 Units: Month
The initial time for the simulation.

(03) Inventory = INTEG(Production-Sales ,300)
Units: Widget

(04) InventoryCorrection = (TargetInventory - Inventory)/
TimeToCorrectInventory
Units: Widget/Month

(05) InventoryCoverage = 3 Units: Month

(06) NetHireRate = (TargeWorkforce -
Workforce)/TimeToAdjustWorkforce
Units: Person/Month

(07) Production = Workforce*Productivity

Units: Widget/Month

(08) Productivity = 1 Units: Widget/Month/Person

(09) Sales = 100 + STEP(50,20) Units: Widget/Month

(10) SAVEPER = TIME STEP Units: Month

The frequency with which output is stored.

(11) TargetInventory = Sales * InventoryCoverage

Units: Widget

(12) TargetProduction = Sales + InventoryCorrection

Units: Widget/Month

(13) TargeWorkforce = TargetProduction/Productivity

Units: Person

(14) TIME STEP = 1 Units: Month

The time step for the simulation.

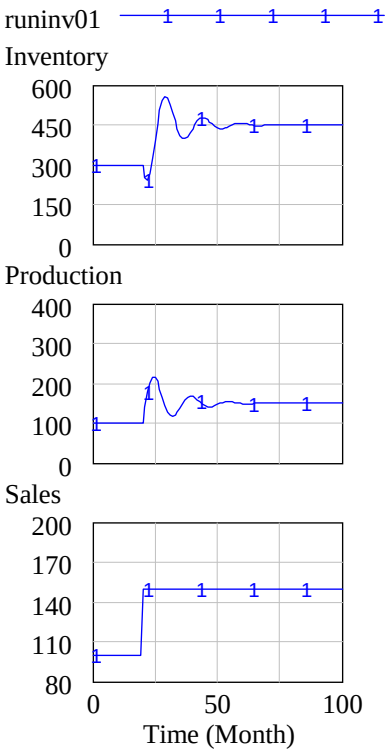
(15) TimeToAdjustWorkforce = 3 Units: Month

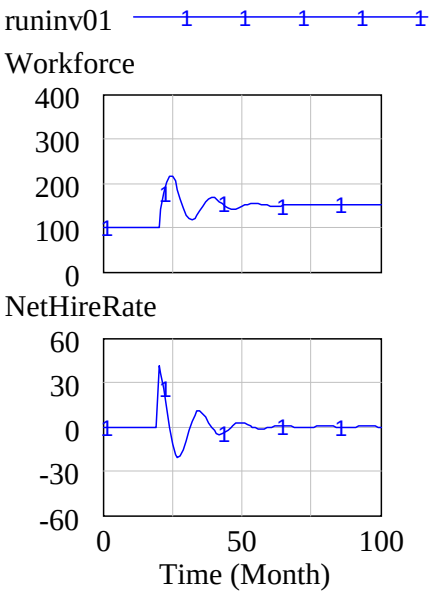
(16) TimeToCorrectInventory = 2 Units: Month

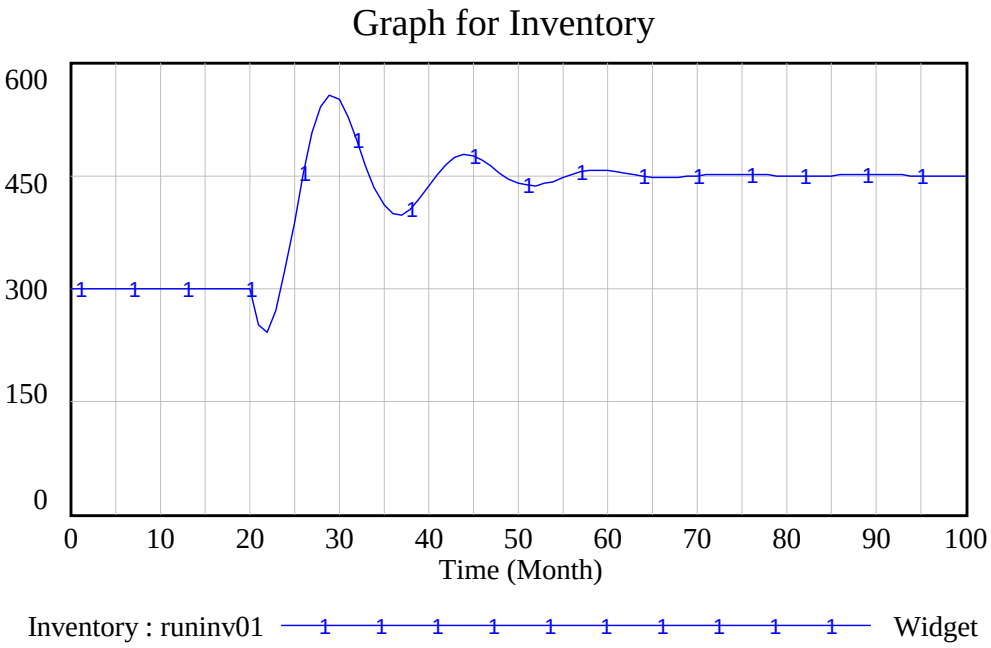
(17) Workforce = INTEG(NetHireRate, TargeWorkforce)

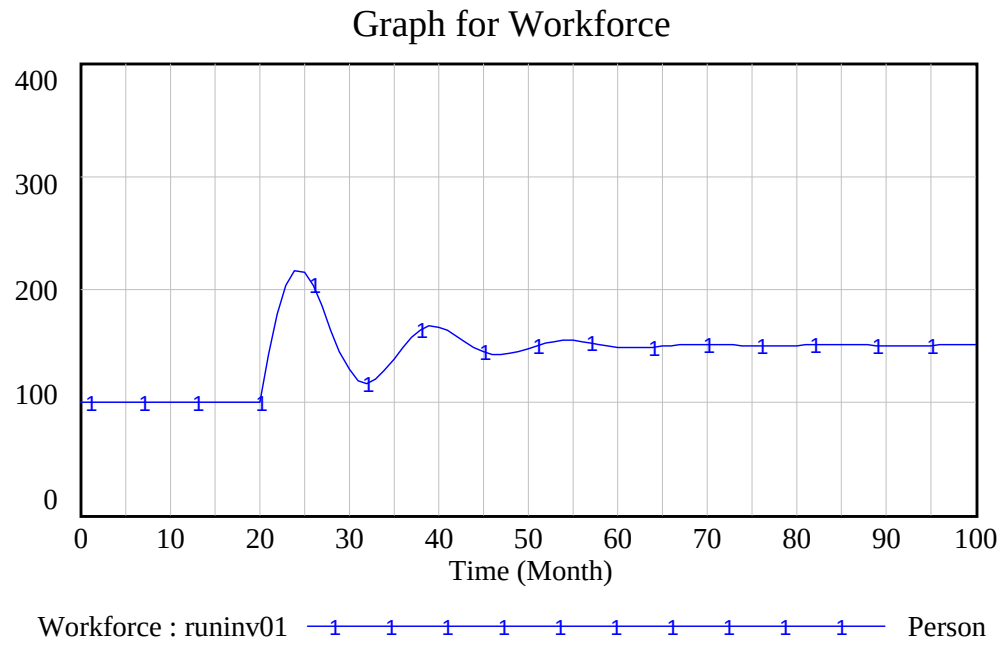
Units: Person

الأشكال التالية نتيجة محاكات النموذج بالقيم الأولية المعطاة في الفقرة السابقة:




runinv01
Workforce
400
300
200
100
0
NetHireRate
60
30
0
-30
-60
0
50
100
Time (Month)


Graph for Inventory
600
450
300
150
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Time (Month)
Inventory : runinv01
Widget



Time (Month)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100								
"Inventory"	Runs:	runinv01								
Inventory	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300
300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300
250	241.667	269.444	322.685	388.272	453.215	506.799	541.985	555.977	549.973	
528.308	497.203	463.414	433.022	410.524	398.355	396.822	404.408	418.328	435.206	
451.737	465.224	473.925	477.189	475.377	469.638	461.582	452.939	445.246	439.628	
436.675	436.435	438.496	442.13	446.471	450.676	454.068	456.216	456.971	456.438	
454.92	452.836	450.626	448.68	447.279	446.565	446.542	447.099	448.047	449.163	
450.232	451.084	451.614	451.786	451.632	451.232	450.693	450.128	449.636	449.287	
449.115	449.119	449.269	449.516	449.802	450.074	450.288	450.418	450.457	450.414	
450.308	450.169	450.025	449.9	449.813	449.772	449.776	449.816	449.88	449.954	

Time (Month)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100								
"Workforce"	Runs:	runinv01								
Workforce	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
141.667	177.778	203.241	215.586	214.943	203.584	185.187	163.991	143.997	128.335	
118.894	116.212	119.607	127.502	137.831	148.467	157.585	163.92	166.879	166.531	
163.486	158.701	153.264	148.188	144.261	141.944	141.357	142.307	144.382	147.047	
149.76	152.061	153.635	154.341	154.205	153.392	152.148	150.754	149.467	148.483	
147.916	147.79	148.054	148.598	149.286	149.977	150.557	150.948	151.115	151.069	
150.852	150.53	150.172	149.846	149.6	149.461	149.435	149.508	149.651	149.828	
150.004	150.15	150.247	150.286	150.272	150.214	150.13	150.039	149.956	149.895	
149.861	149.856	149.876	149.913	149.959	150.004	150.04	150.064	150.074	150.069	

3- نموذج متتابعة فيبونتشي: Fibonacci Sequence Model

من الدرجة الثانية وبمتغير حالة واحد

$$y(k+2)=y(k+1)+y(k),\quad y(1)=1,\ y(2)=1,\ k=1,2,3,\cdots$$
$$k=1\Rightarrow y(3)=y(2)+y(1)=1+1=2$$
$$k=2\Rightarrow y(4)=y(3)+y(2)=2+1=3$$
$$k=3\Rightarrow y(5)=y(4)+y(3)=3+2=5$$
$$\vdots$$

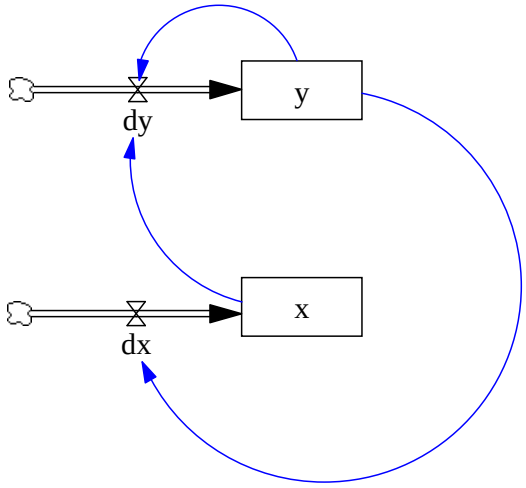
نحولها إلى الدرجة الأولى وبمتغيرين حالة نعوض:

$$x(k+1)=y(k),\quad k=1,2,3,\cdots,\quad x(2)=y(1)=1$$

فتصبح المعادلة المعرفة لمتتابعة فيبونتشي بعد التعويض في شكل فضاء الحالة:

$$y(k+2)=y(k+1)+x(k+1)$$
$$x(k+2)=y(k+1)$$
$$k=1,2,3,\ldots$$
$$y(1)=1,y(2)=1,x(2)=y(1)=1$$
$$k=1\Rightarrow y(3)=y(2)+x(2)=1+1=2$$
$$x(3)=y(2)=1$$
$$k=2\Rightarrow y(4)=y(3)+x(3)=2+1=3$$
$$x(4)=y(3)=2$$
$$k=3\Rightarrow y(5)=y(4)+x(4)=3+2=5$$
$$x(5)=y(4)=3$$
$$\vdots$$

نموذج شكل فضاء الحالة لمتتابعة فيبونتشي بإستخدام Vensim



(1) dx = y

(2) dy = y+x

(3) FINAL TIME = 10

(4) INITIAL TIME = 1

(5) SAVEPER = TIME STEP

(6) TIME STEP = 1

(7) x= INTEG (dx,1)

(8) y= INTEG (dy,1)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765
x	1	2	5	13	34	89	233	610	1597	4181

لاحظ ان متتابعة فيبونتشي منقسمة بين y (تحوى الحدود الزوجية) و x (تحوي الحدود الفردية)

k	1		2		3		4		5		6	
y	1		3		8		21		55		144	
	↑	↘	↑	↘	↑	↘	↑	↘	↑	↘	↑	⋯
x	1		2		5		13		34		89	

4- النماذج الديناميكية العشوائية Dynamic Stochastic Models

تعريف: **الخاصية الماركوفية** من الدرجة k Markovian Property of order

تقول على ان قيمة الظاهرة العشوائية عند الزمن t تعتمد على قيمها عند الأزمنة $t-1, t-2, ..., t-k$ فقط. فمثلا إذا كانت $\{y_t, -\infty < t < \infty\}$ فإن

$$P\left(y_t < s \mid y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-k}, y_{t-(k+1)}, ...\right) = P\left(y_t < s \mid y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-k}\right)$$

هناك الكثير من الظواهر الإقتصادية اللتي تتبع الخاصية الماركوفية.

تمثيل النماذج الحركية العشوائية الماركوفية بإستخدام Vensim :

مثال 1: وجد أحد الإقتصاديين بالمشاهدة والقياس ان سعر الإقفال لأحد المواد في نهاية يوم تداول يعتمد على سعر الإقفال للمادة في نهاية اليومين السابقين مع خطأ عشوائي له توزيع طبيعي بمتوسط صفري وتباين σ^2 لذلك اليوم. كون نموذج يصف هذه الظاهرة.

الحل: نفترض أن سعر الإقفال في نهاية اليوم هو y_t والخطأ العشوائي هو ε_t فيكون حسب الخاصية المركوفية

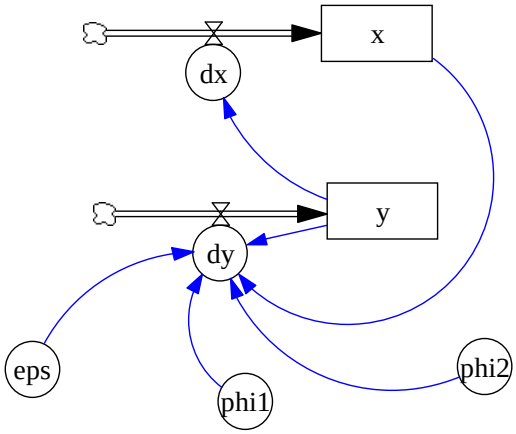
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right), \forall t$$

وهذه معادلة فروقية Difference Equation من الدرجة الثانية غير متجانسة بمتغير حالة واحد. سوف نحولها إلي درجة اولي بحالتين، لنفترض $x_{t-1} = y_{t-2}$ فيكون

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right), \forall t$$
$$x_t = y_{t-1}$$

مثال 2: في المثال السابق إذا كانت $\phi_1 = 1.7, \phi_2 = -0.72, and\ \sigma^2 = 1$ فحل المعادلات السابقة لقيم أولية $y_0 = 0, x_0 = 0$

الحل: بإستخدام Vensim



(01) dx = y

(02) dy = phi1*y+phi2*x+eps

(03) eps= RANDOM NORMAL(-3.99,3.99 ,0 ,1 ,19)

(04) FINAL TIME = 2 The final time for the simulation.

(05) INITIAL TIME = 0 The initial time for the simulation.

(06) phi1 = 1.7

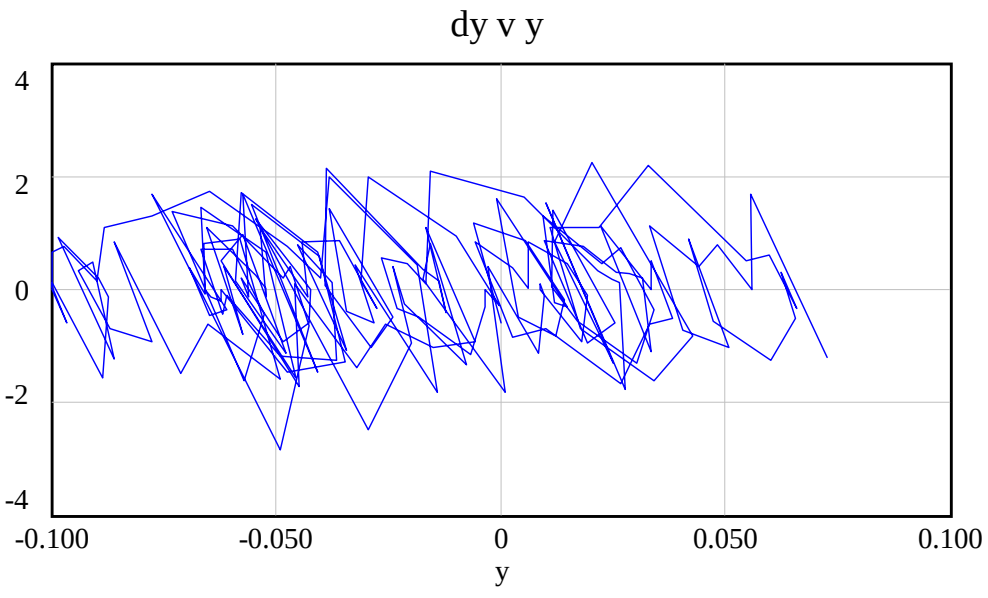
(07) phi2 = -0.72

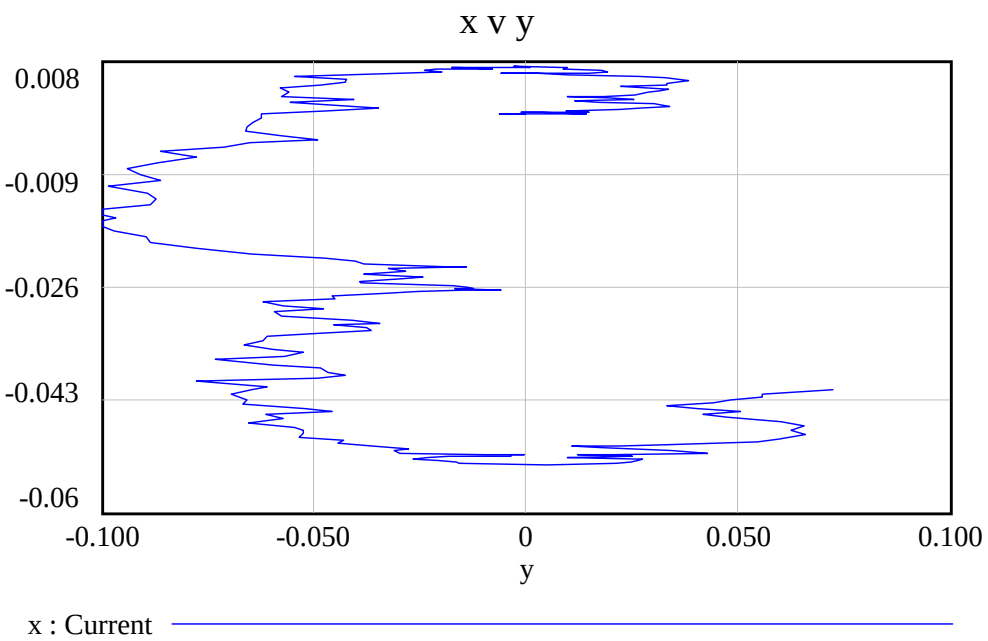
(08) SAVEPER = TIME STEP The frequency with which output is stored.

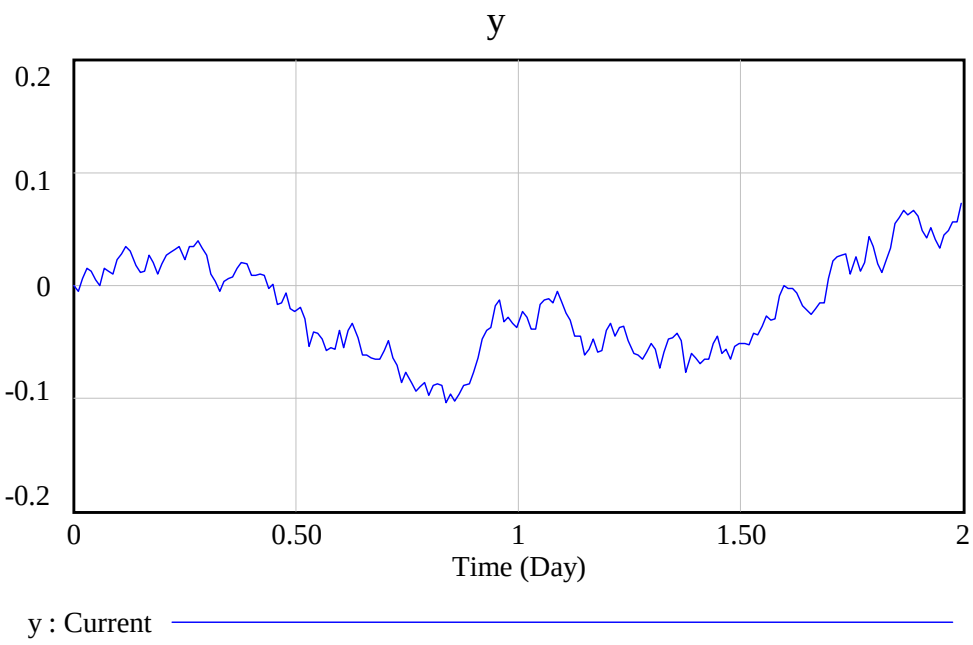
(09) TIME STEP = 0.01 The time step for the simulation.

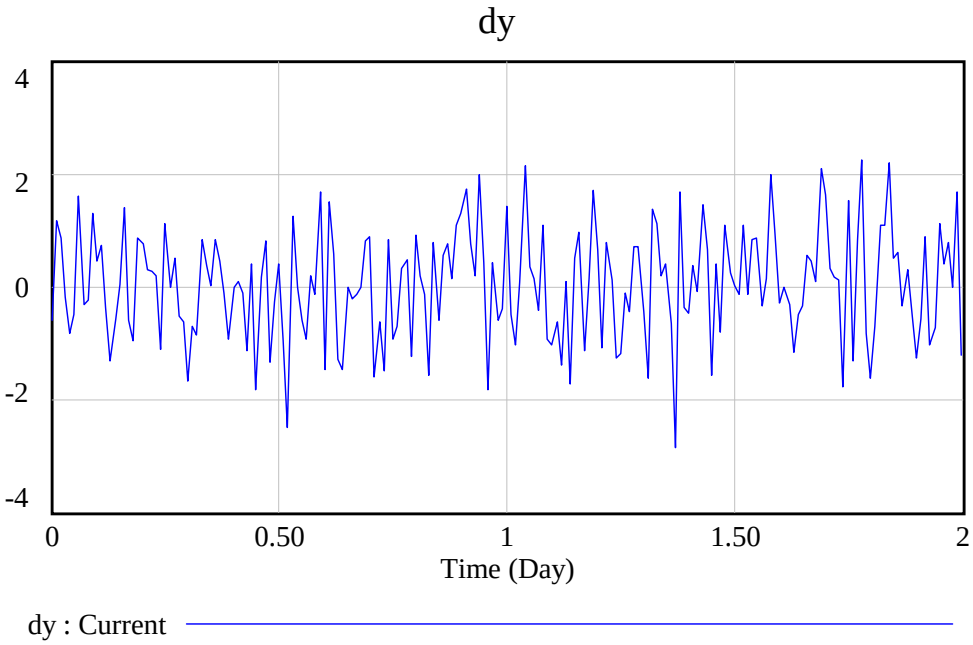
(10) x= INTEG (dx, 0)

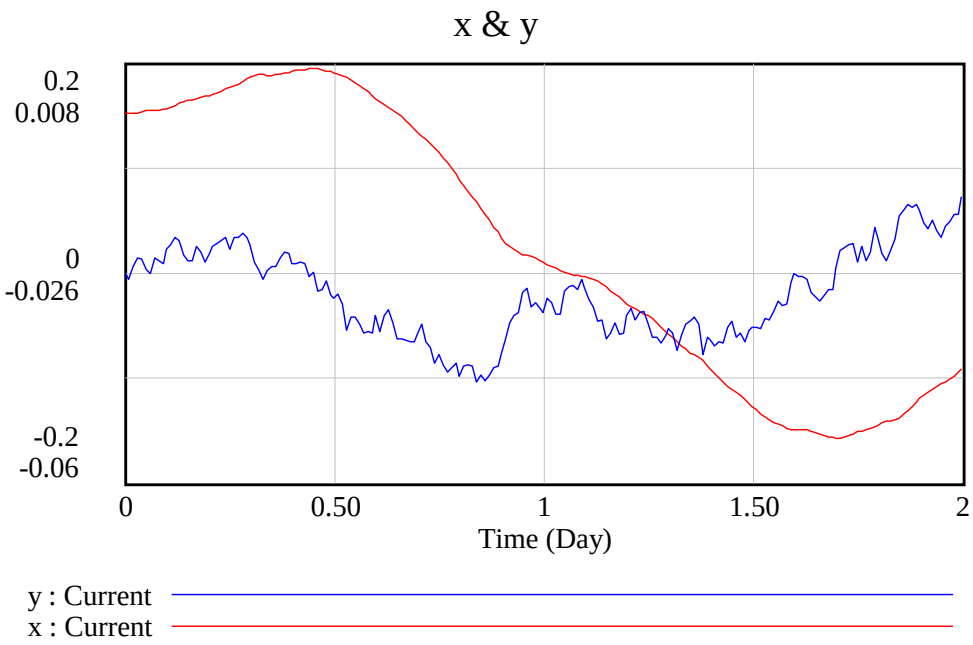
(11) y= INTEG (dy, 0)


dy v y
4
2
0
-2
-4
-0.100
-0.050
0
0.050
0.100
y
dy : Current


x v y
0.008
-0.009
-0.026
-0.043
-0.06
-0.100
-0.050
0
0.050
0.100
y
x : Current


y
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
0.50
1
1.50
2
Time (Day)
y : Current


dy
4
2
0
-2
-4
0
0.50
1
1.50
2
Time (Day)
dy : Current


x & y
0.2
0.008
0
-0.026
-0.2
-0.06
0
0.50
1
1.50
2
Time (Day)
y : Current
x : Current

5- نموذج التشعب bifurcation :

نماذج التشعب من أهم النماذج التي تدرس الآن بشكل مكثف بشكل رياضي لكونها تنتج من كثير من الظواهر الطبيعية والكونية، والنموذج التالي يمثل أحد هذه النماذج.

في هذا الدرس سوف نستعرض تصرف مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية

$$\dot{x} = -0.5x + ay, \quad |a| < 0.4$$
$$\dot{y} = x - 0.5y$$

ونكتبها بشكل فضاء الحالة

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & a \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.5 & a \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

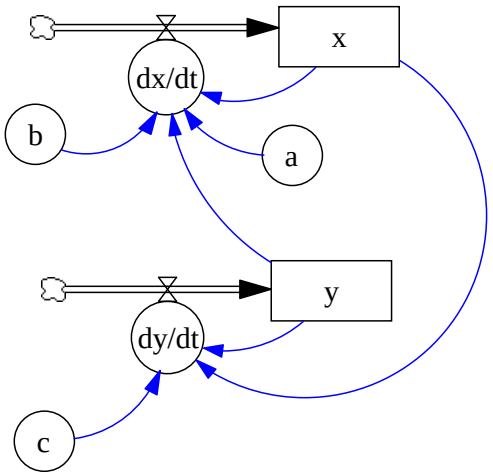
$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = \det \begin{pmatrix} -0.5 - \lambda & a \\ 1 & -0.5 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-0.5 - \lambda)^2 - a = 0$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{a} - 0.5$$

$$\lambda_2 = \sqrt{a} - 0.5$$

تمثيل نموذج التشعب بمخطط VenSim:



(01) a = -0.3 Units: **undefined**

(02) b = -0.5 Units: **undefined**

(03) c = -0.5 Units: **undefined**

(04) "dx/dt" = b*x+a*y Units: **undefined**

(05) "dy/dt" = x+c*y Units: **undefined**

(06) FINAL TIME = 10 Units: Month The final time for the simulation.

(07) INITIAL TIME = 0 Units: Month The initial time for the simulation.

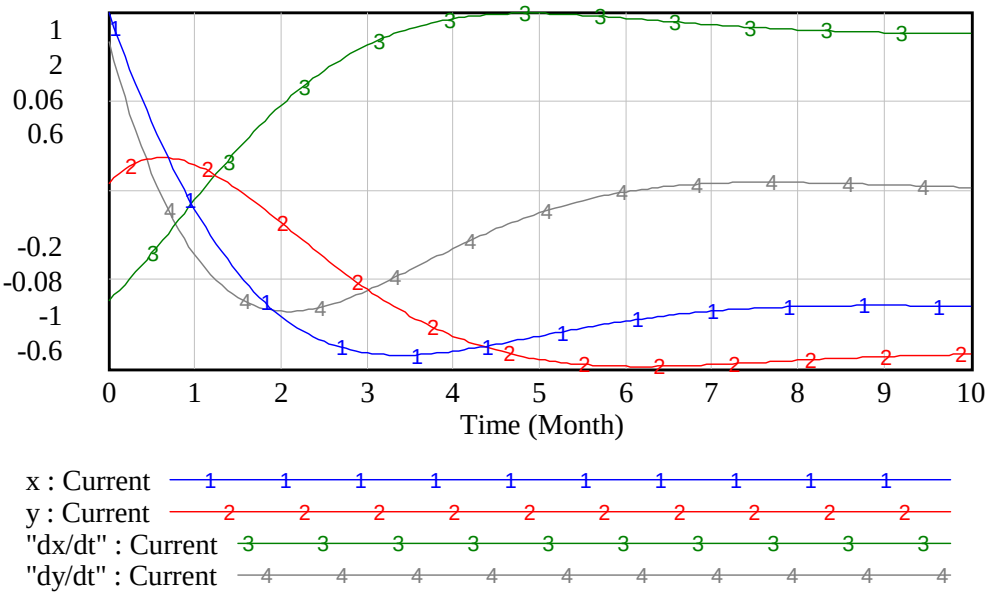
(08) SAVEPER = TIME STEP Units: Month The frequency with which output is stored.

(09) TIME STEP = 0.0625 Units: Month The time step for the simulation.

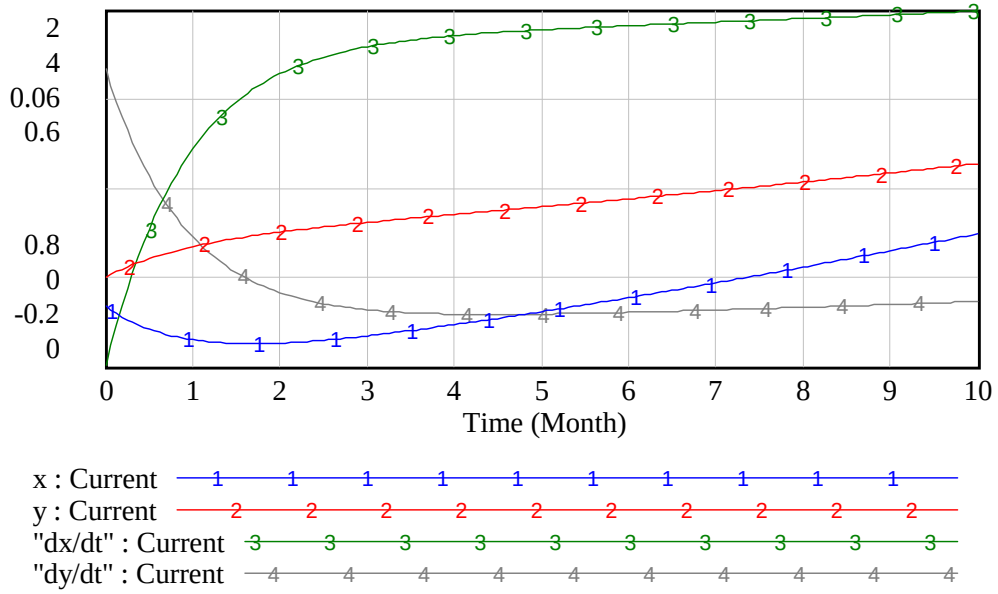
(10) x = INTEG ("dx/dt", 1) Units: **undefined**

(11) y= INTEG ("dy/dt", 1) Units: **undefined**

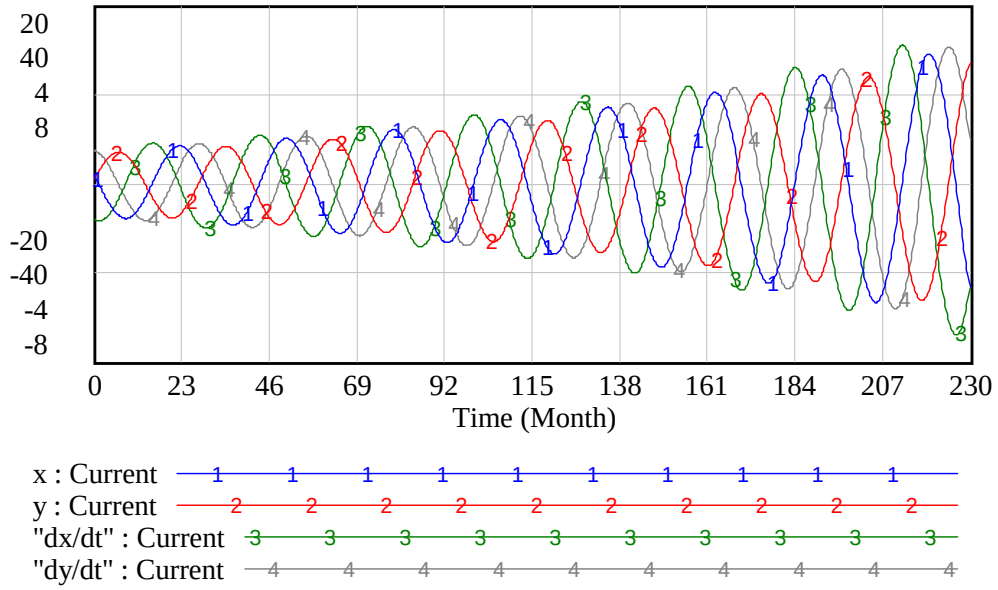
$a = -0.3$



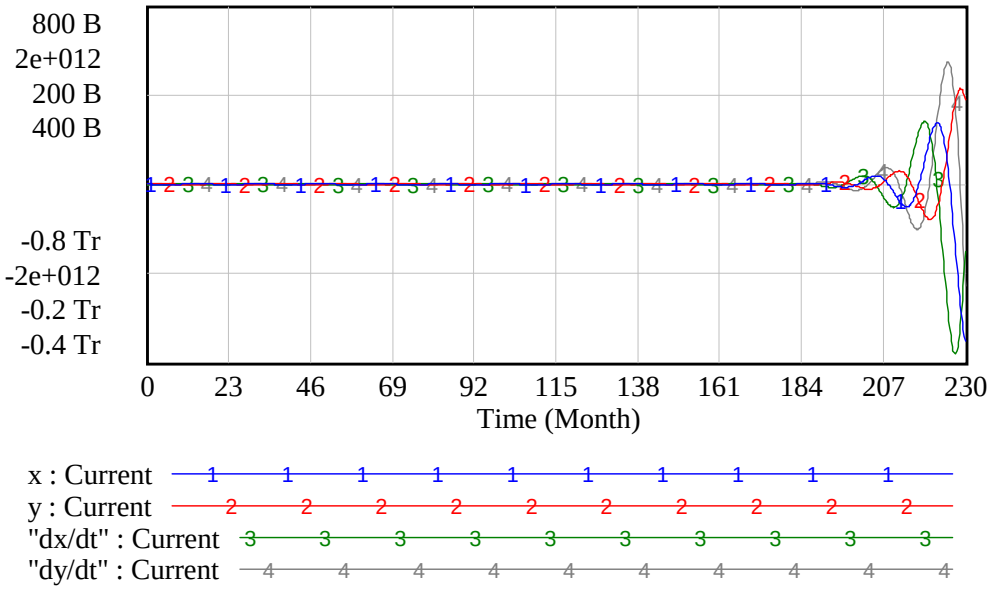
$a = 0.3$



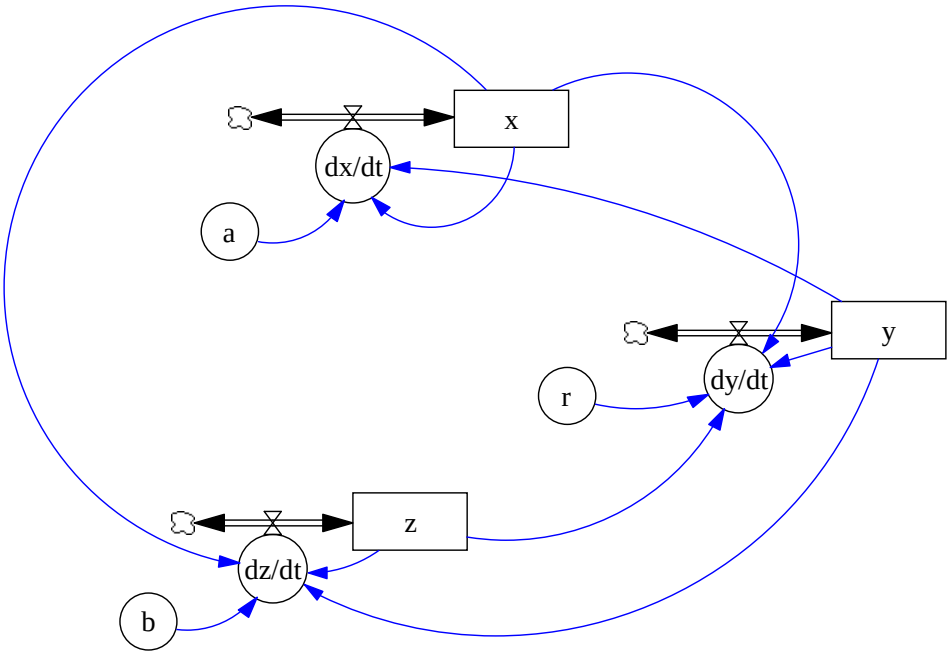
$a = -0.3, \quad b = -0.5, \quad c = 0.5$



$a = -0.3, \quad b = -0.3, \quad c = 0.5$

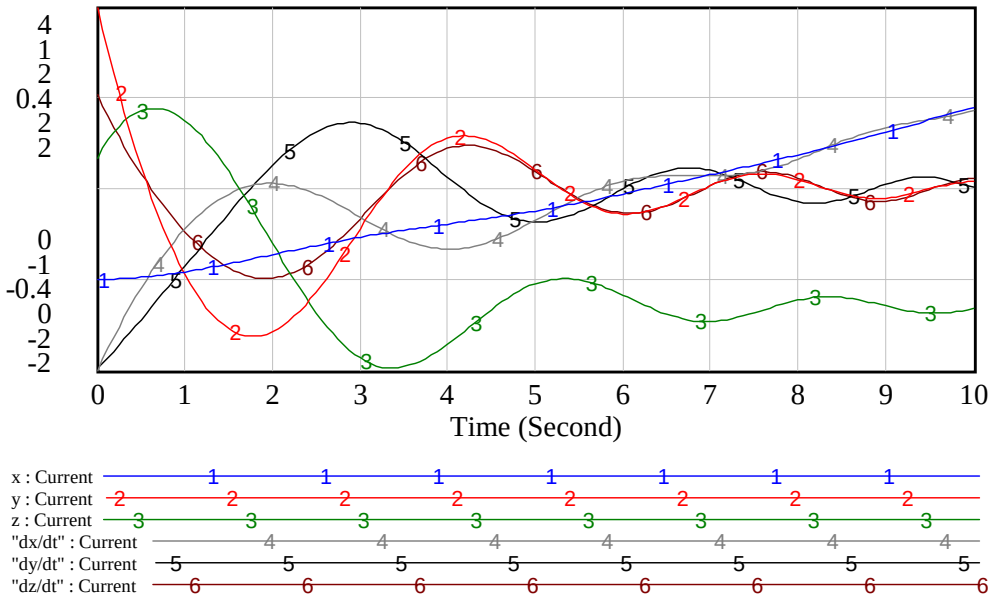


تمرين: أجر تجارب علي تصرف مجموعة المعادلات التفاضلية لقيم مختلفة لكل من a,b,c



$$\dot{x} = -a(x - y)$$
$$\dot{y} = -xz + bx - y$$
$$\dot{z} = xy - cz$$

$$a = -0.1, \quad b = 0.02, \quad c = -0.03$$



6- نموذج تقريبي لعضلة في القلب: The Pumping Heart Model

يمكن إعتبار قلب الإنسان كمضخة تنقل الدم الغني بالاكسجين من الرئة إلى جميع اجزاء الجسم. كما يمكن نمذجة قلب الإنسان (بشكل تقريبي جدا) كمتردد Oscillator . القلب كنظام يتردد بين حالتين بشكل عام: إنبساط Diastole أي حالة إرتخاء و إنقباض Systole أي حالة تقلص. يتسبب في إنقباض وإنبساط عضلات القلب محفز كهروكيميائي Electro-Chemical Stimulus . فإذا إفترضنا أن x هو طول ليفة عضلة Muscle Fiber في القلب و v كمية المحفز، فقد وجد من التجارب المعملية أن معدل الإنبساط والإنقباض في طول ليفة عضلة القلب يزداد مع كمية المحفز وينقص متناسبا (بثابت تناسب $\mu > 0$) مع الفرق بين ثلث حجم الليفة وطولها. كما وجد أن معدل كمية المحفز تتناقص مع طول الليفة.

أولا: كون المعادلات التفاضلية لنموذج حركية ليفة عضلية من القلب معتمدا على المعطيات السابقة.

ثانيا: كون نموذج Vensim بالقيم التالية وناقش النتائج:

$$\mu = 2\ cm/\sec, \quad x(0) = 2\ cm$$
$$v(0) = 1\ microgrm, \quad t = 0(0.1)100\ \sec$$

الحل:

أولا: بما أن معدل الإنبساط والإنقباض في طول ليفة عضلة القلب يزداد مع كمية المحفز وينقص متناسبا (بثابت تناسب $\mu > 0$) مع الفرق بين ثلث حجم الليفة وطولها إذا

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) - \mu\left[x^3(t)/3 - x(t)\right]$$

وبما أن معدل كمية المحفز تتناقص مع طول الليفة إذا

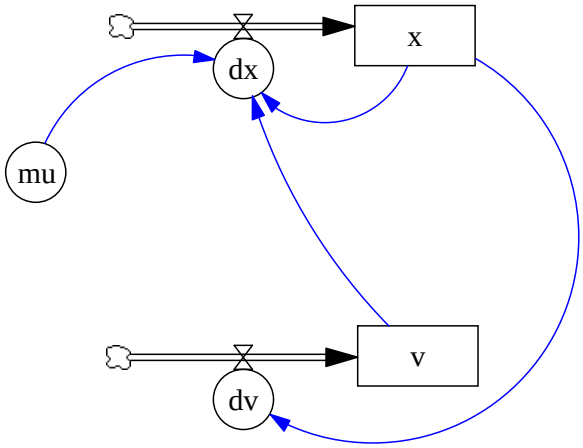
$$\frac{dv(t)}{dt} = -x(t)$$

ونكتبها بشكل مبسط

$$\frac{dx}{dt} = v - \mu\left(x^3/3 - x\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -x$$

ثانيا: النموذج ممثل ببرنامج Vensim



(01) dv = -x Units: microgrm/sec

(02) dx = v-mu*(((x^3)/3)-x) Units: cm/sec

(03) FINAL TIME = 100 Units: Second The final time for the simulation.

(04) INITIAL TIME = 0 Units: Second The initial time for the simulation.

(05) mu = 2 Units: cm/sec

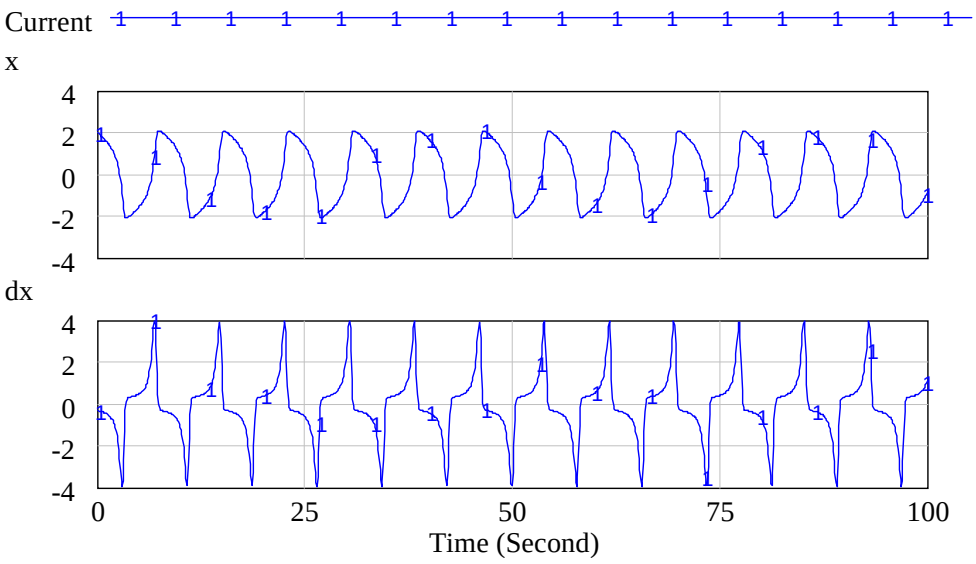
(06) SAVEPER = TIME STEP Units: Second

The frequency with which output is stored.

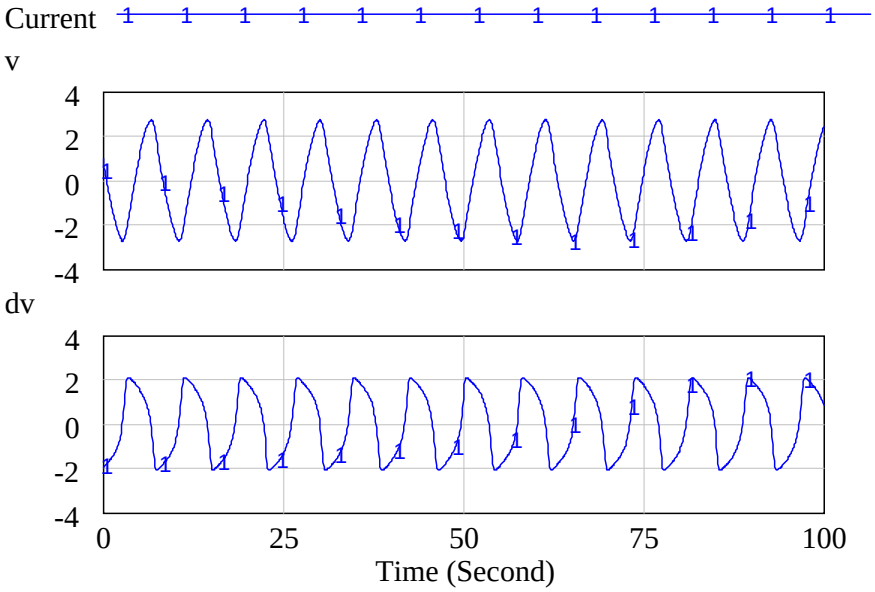
(07) TIME STEP = 0.1 Units: Second The time step for the simulation.

(08) v = INTEG (dv, 1) Units: microgrm

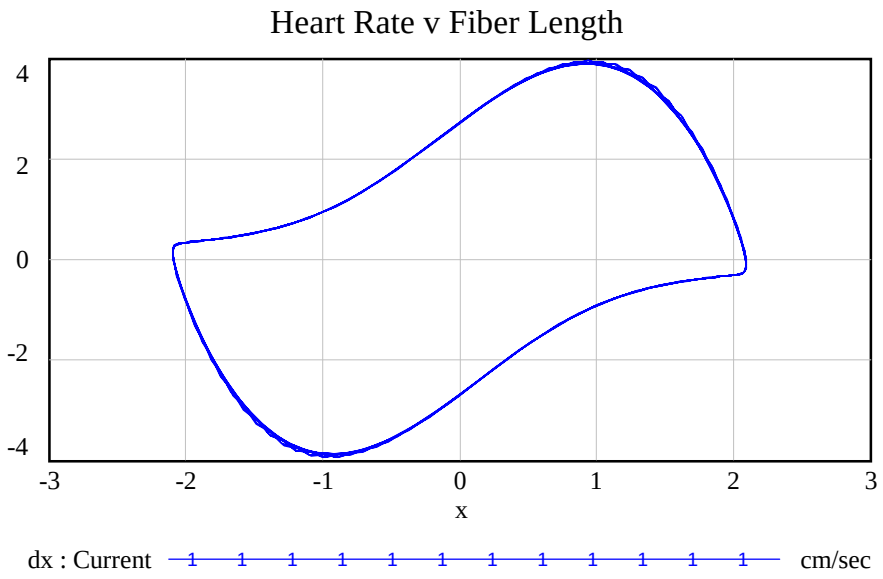
(09) x = INTEG (dx, 2) Units: cm


Current
x
4
2
0
-2
-4
dx
4
2
0
-2
-4
0
25
50
75
100
Time (Second)

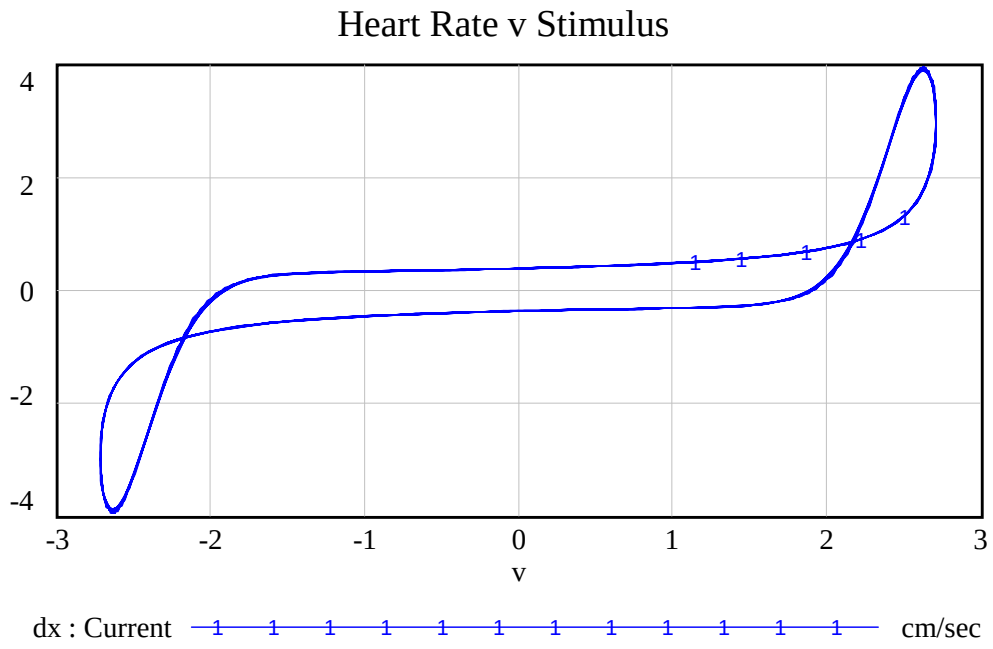
شکل (1)


Current
v
4
2
0
-2
-4
dv
4
2
0
-2
-4
0
25
50
75
100
Time (Second)

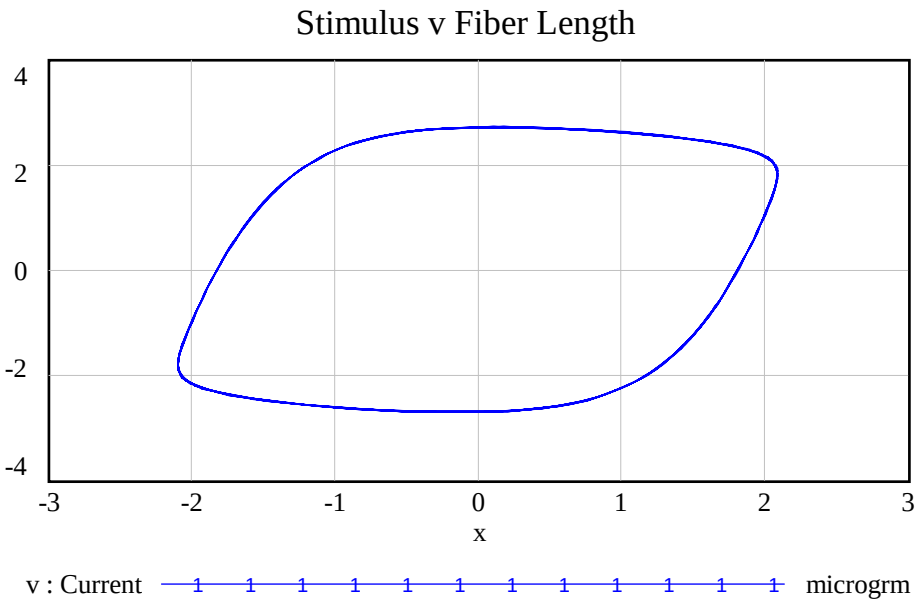
شکل (2)


Heart Rate v Fiber Length
4
2
0
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
dx : Current
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
cm/sec

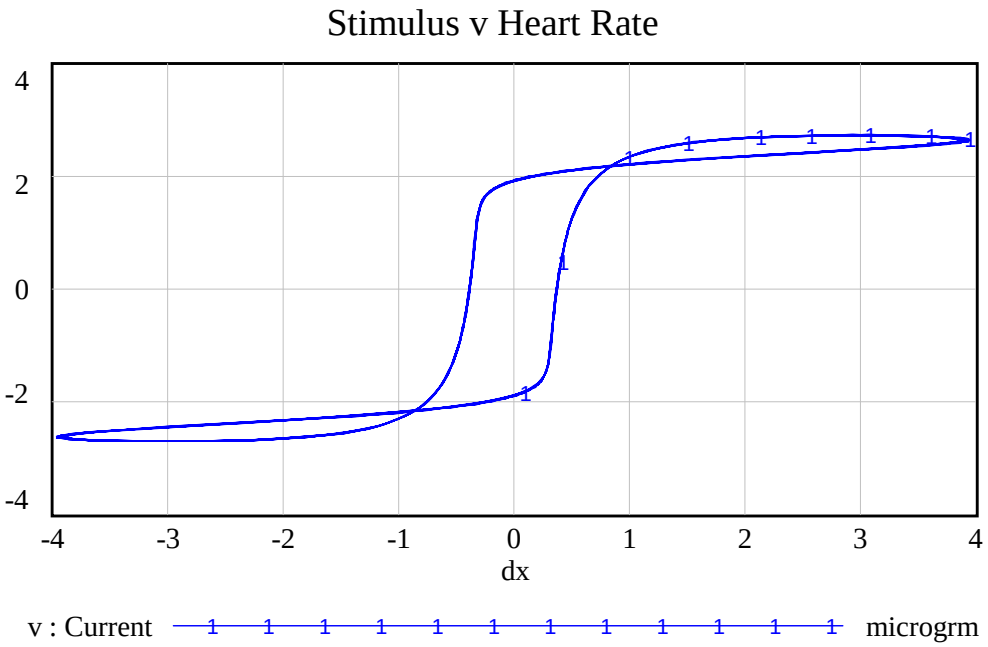
شکل (3)


Heart Rate v Stimulus
4
2
0
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
v
dx : Current
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
cm/sec

شکل (4)



شكل (5)



شكل (6)

مناقشة النتائج:

يلاحظ من شكل (1) أن الإنتقال من الإنبساط Diastole (ألياف طويلة) إلى الإنقباض Systole (ألياف قصيرة) تحدث فيها الإنقباض ببطء في الأول (حتي لايتسبب في إنسياب خلفي والذي

يؤذي القلب) ولكن عند كمية عالية من المحفذ فإن الألياف تنقبض بشكل سريع لدفع الدم إلى الخارج. شكل (2) يبين التردد Oscilation في مستوي المحفذ ومعدل تغيره. الأشكال من (3) إلى (6) توضح طبعة الترددات الدورية فى المستويات:

1- معدل نبضات عضلة القلب ضد طول العضلة شكل (3)

2- معدل نبضات عضلة القلب ضد كمية المحفذ شكل (4)

3- كمية المحفذ ضد طول العضلة شكل (5)

4- كمية المحفذ ضد معدل نبضات عضلة القلب شكل (6)

تمرين:

1- قم بإجراء تجارب على النموذج (بدون خوف من حدوث سكتة قلبية) لأطوال مختلفة لعضلة القلب وكميات مختلفة للمحفذ وقارن النتائج

2- متي يحدث إجهاد لعضلة القلب و عند اي مستويات للمحفذ؟

3- ماهو تأثير ثابت التناسب μ ؟

4- حدد عند أي مستوى من المحفذ أو عند أي قيمة للثابت μ تحدث سكتة قلبية ؟ (أي تتوقف عضلة القلب عن التردد بسبب خوف او فرح فجائي)

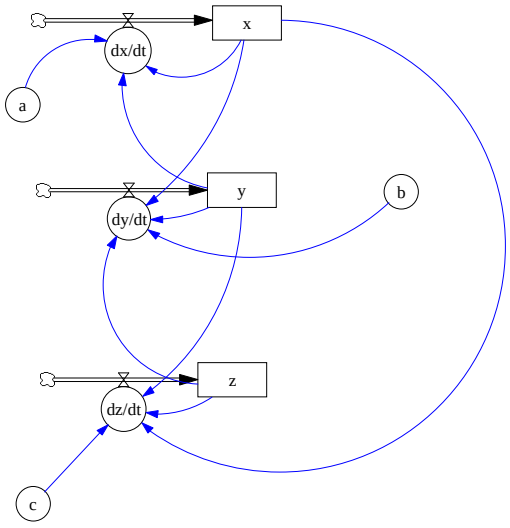
7- نموذج جاذبات لورينتس Lorenz Attractors Models:

جاذبات لورينتس هي مجموعة بسيطة من المعادلات المحددة طورت بواسطة العالم إدوارد لورينتس أثناء دراسته لأنماط الجو التي لاتتكرر. المشكلة الأساسية للتنبؤ عن الجو أن أي تغير ولو بسيط في الأنماط الأولية (تأثير مايسمى خفق جناح فراشة) والذي يعبر عنة علميا الأعتماد الحساس علي الشروط الأولية يؤدي إلى نتائج متضاربة أو عكسية.

جاذبة لورنتس هو عبارة عن شكل مسار لنظام حركي يتكون من ثلاث معادلات تفاضلية غير خطية من الدرجة الأولى، حل المعادلات هذة هو دالة متجهية لمتغير واحد، إذا اخذنا هذا المتغير على أساس انه الزمن فإن الحل يتتبع مسار مدار. المدار مكون من حلزونين بينهما زاوية في ثلاثة أبعاد. المعادلات هي كالتالي:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -ax(t) + ay(t)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = bx(t) - y(t) - z(t)x(t)$$
$$\frac{d}{dt}z(t) = -cz(t) + x(t)y(t)$$

تمثيل النموذج بواسطة Vensim



dx/dt=a(y-x)	a=10	x(0)=0	dt=0.02
dy/dy=bx-y-xz	b=28	y(0)=0.	start time=0
dz/dt=xy-cz	c=2.67	z(0)=25	end time=100

(01) a = 10 Units: **undefined**

(02) b = 28 Units: **undefined**

(03) c = 2.67 Units: **undefined**

(04) "dx/dt" = a*(y-x) Units: **undefined**

(05) "dy/dt" = b*x-y-x*z Units: **undefined**

(06) "dz/dt" = x*y-c*z Units: **undefined**

(07) FINAL TIME = 100 Units: Second The final time for the simulation.

(08) INITIAL TIME = 0 Units: Second The initial time for the simulation.

(09) SAVEPER = TIME STEP Units: Second

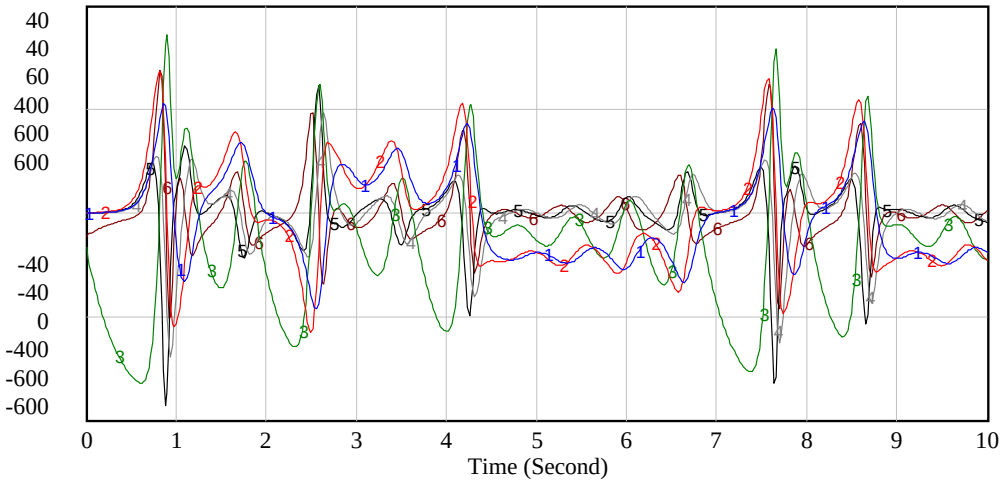
The frequency with which output is stored.

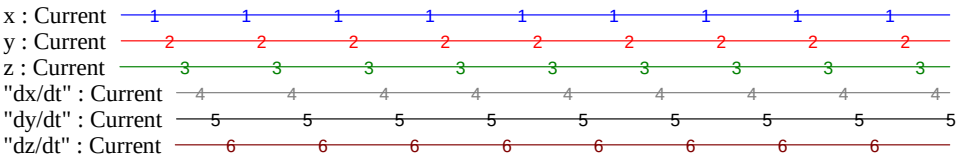
(10) TIME STEP = 0.02 Units: Second The time step for the simulation.

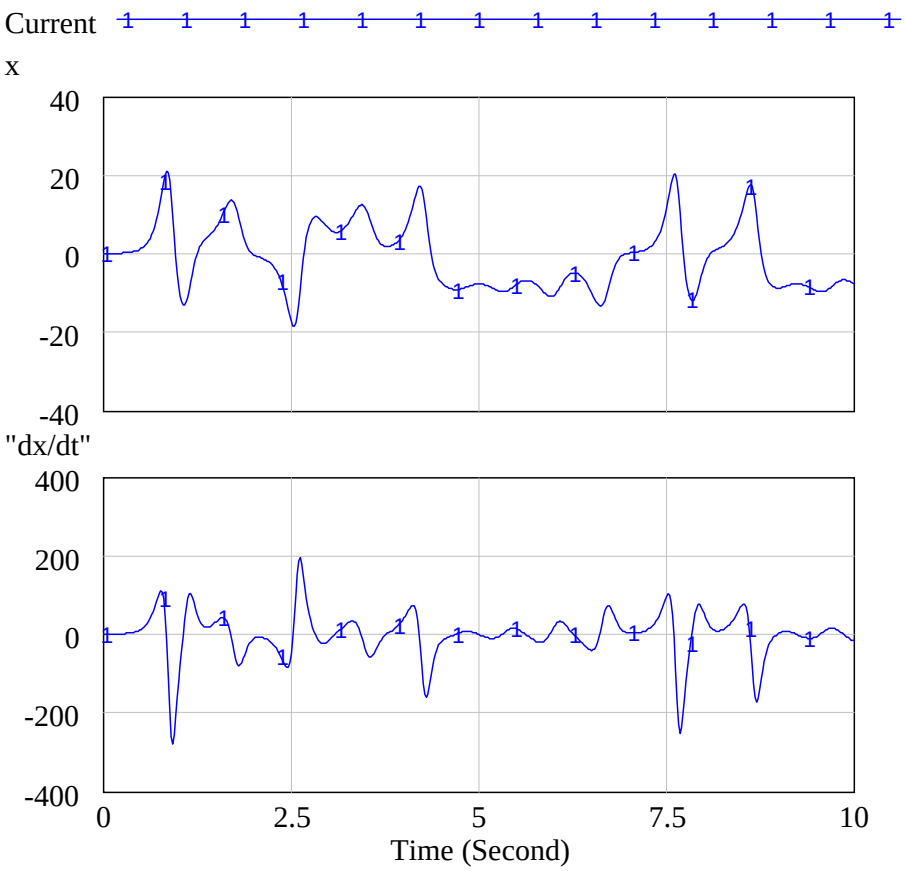
(11) x = INTEG ("dx/dt", 0) Units: **undefined**

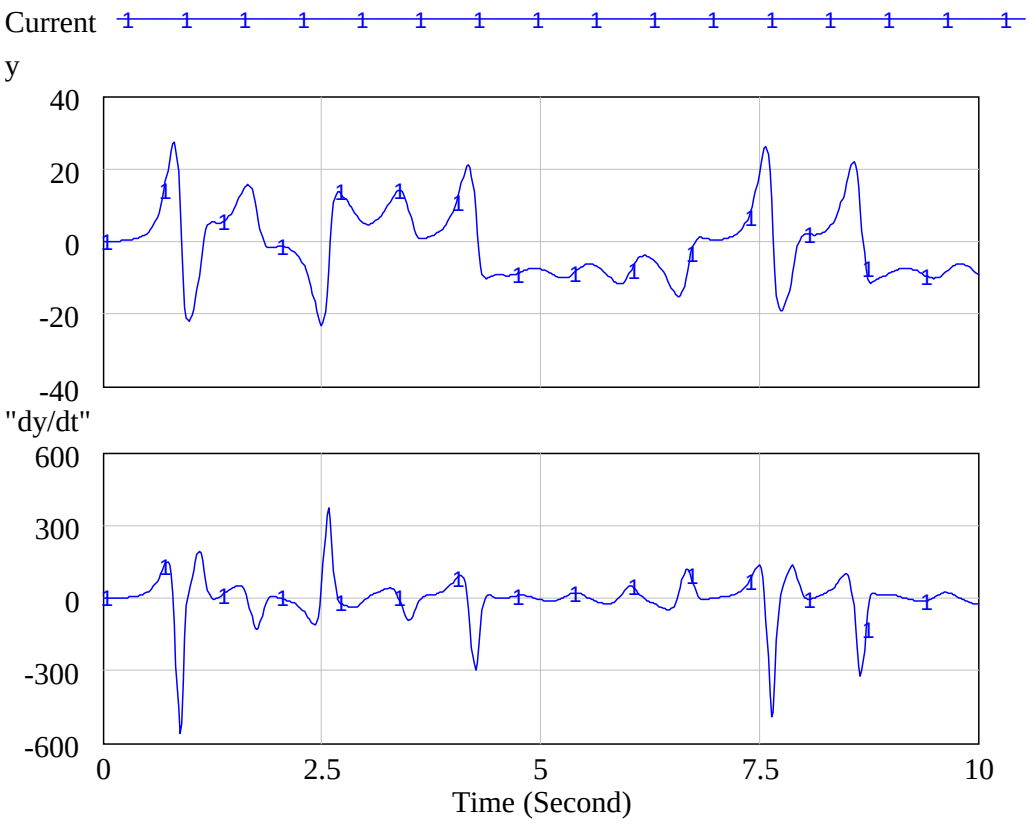
(12) y = INTEG ("dy/dt", 0.1) Units: **undefined**

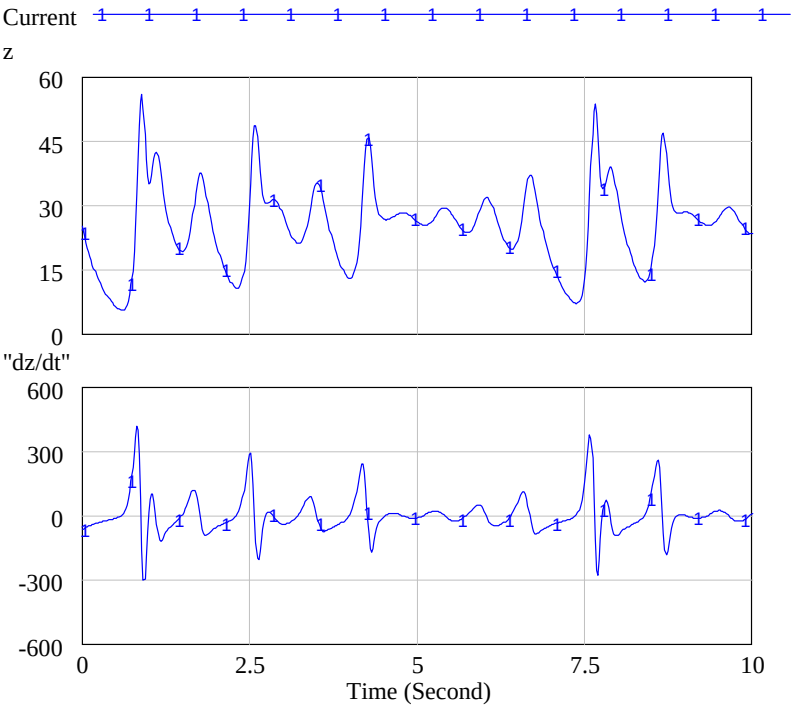
(13) z = INTEG ("dz/dt", 25) Units: **undefined**


40
40
60
400
600
600
-40
-40
0
-400
-600
-600
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Time (Second)

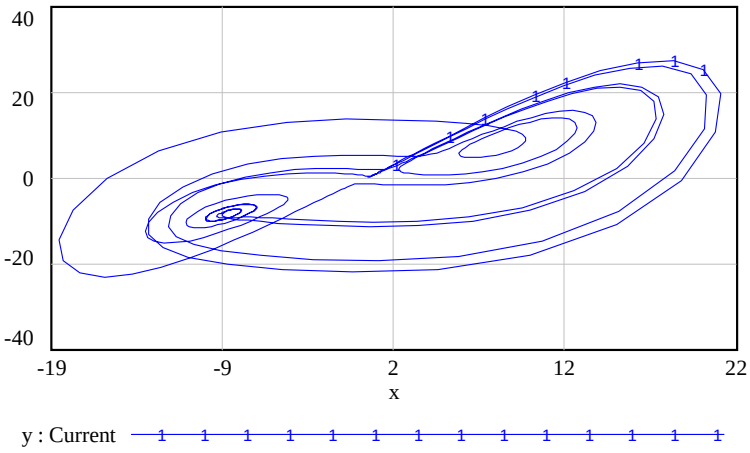

x : Current
y : Current
z : Current
"dx/dt" : Current
"dy/dt" : Current
"dz/dt" : Current


Current
x
40
20
0
-20
-40
"dx/dt"
400
200
0
-200
-400
0
2.5
5
7.5
10
Time (Second)

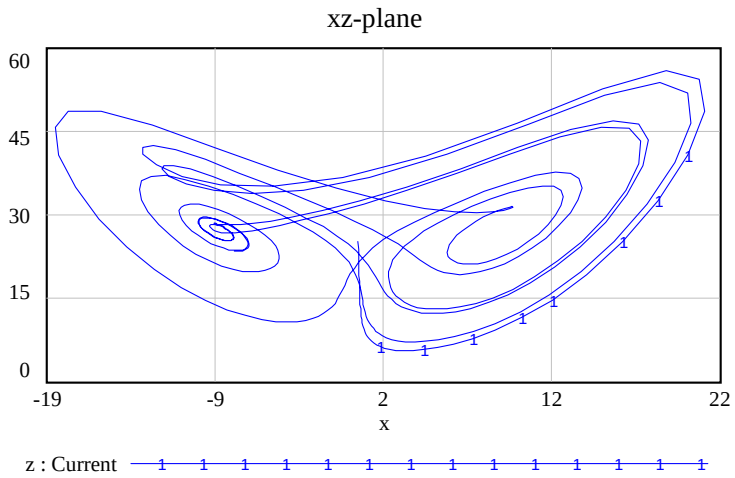

Current
y
40
20
0
-20
-40
"dy/dt"
600
300
0
-300
-600
0
2.5
5
7.5
10
Time (Second)

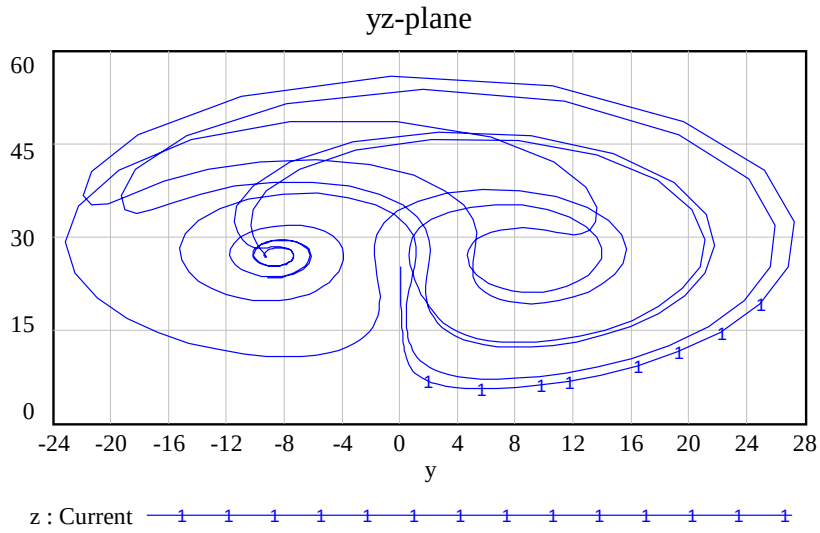


xy-plane



y : Current


xz-plane
60
45
30
15
0
-19
-9
2
12
22
x
z : Current
1


yz-plane
60
45
30
15
0
-24
-20
-16
-12
-8
-4
0
4
8
12
16
20
24
28
y
z : Current
1

8- نموذج المفترس والضحية Prey and Predator Model :

هذا نموذج لنظام يتكون من مورد ومستهلك والذي يعيش فقط على هذا المورد. النموذج هذا يستعرض إستنزاف الموارد وتأثيرة على المجتمع الطفيلي الذي يعيش عليها. فمثلا قد يكون المورد قطيع من الأرانب والمستهلك قطيع من الثعالب، تتكاثر الأرانب من دورة زمنية للأخرى بمعدل يتناسب مع عددها في الدورة السابقة مع ملاحظة أن الموارد المتوفرة للأرانب لاتسمح بأن يعيش أكثر من 500 أرنب. يقتات على هذه الأرانب مجتمع من الثعالب والذي ينمو ويزداد كلما كان هناك عدد كاف كن الأرانب. لندرس نظام المعادلات الفروقية التي تصف هذا النظام

المعادلة الحركية للأرانب

$$r_{k+1} = r_k + g\left(1-\frac{r_k}{500}\right)r_k - 0.001\, r_k\, f_k$$

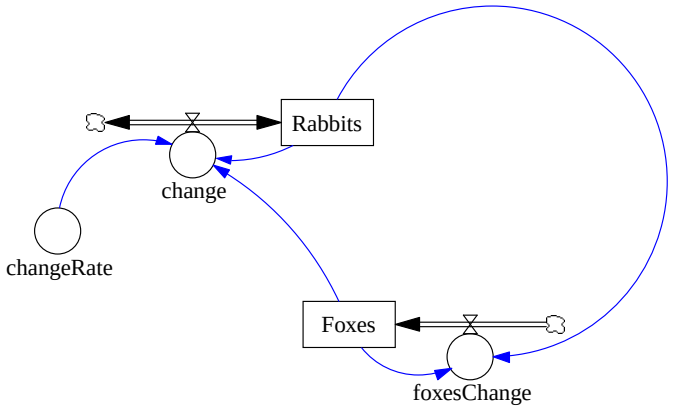
المعادلة الحركية للثعالب

$$f_{k+1} = f_k + 0.001\, r_k\, f_k - 0.02\, f_k$$

المعادلة الحركية للأرانب تبين أن الأرانب تزداد بمعدل يتناسب مع عددها على الايزيد عددها عن 500 أرنب وتتناقص بمقدار 0.001 من عدد الثعالب. المعدلة الحركية للثعالب تبين ان الثعالب يزداد عددها متناسبا مع 0.001 من عدد الأرانب وتتناقص بمقدار 0.02 من عددها كل دورة.

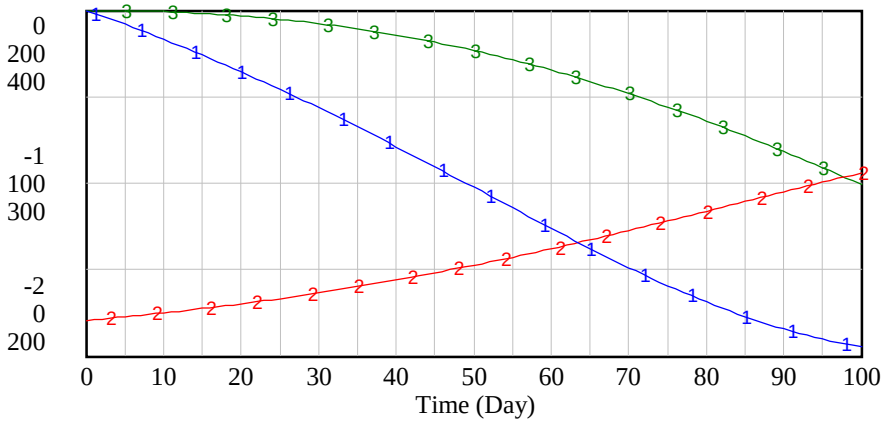
تمثيل النموذج بإستخدام Vensim:

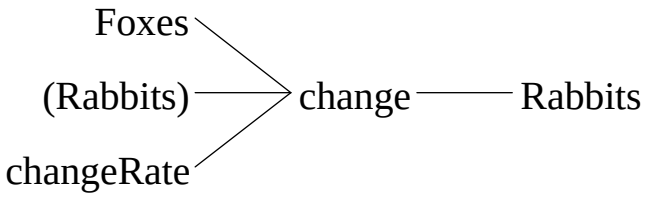
البرنامج التالي بإستخدام Vensim يصف حركية النظام

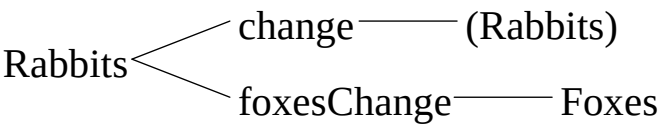


R(t)=R(t-1)+G[1-R(t-1)/500]R(t-1)-0.0001R(t-1)F(t-1)

F(t)=F(t-1)+0.0001R(t-1)F(t-1)-0.02F(t-1)







Loop Number 1 of length 1

Rabbits

change

Loop Number 2 of length 3

Rabbits

foxesChange

Foxes

Change

(01) change = changeRate*(1-Rabbits/500)*Rabbits-0.0001*Rabbits*Foxes

(02) changeRate = 0.01

(03) FINAL TIME = 100 Units: Day The final time for the simulation.

(04) Foxes = INTEG (foxesChange, 20)

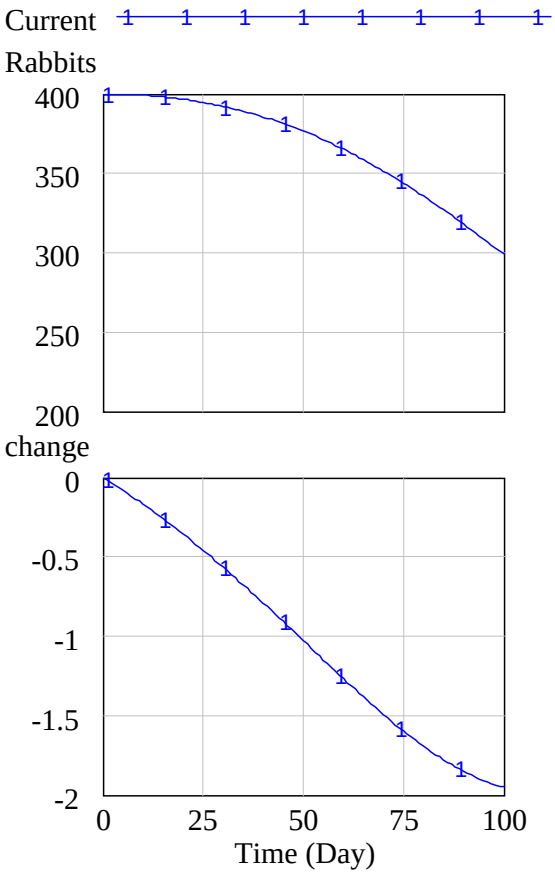
(05) foxesChange = 0.001*Rabbits*Foxes-0.02*Foxes

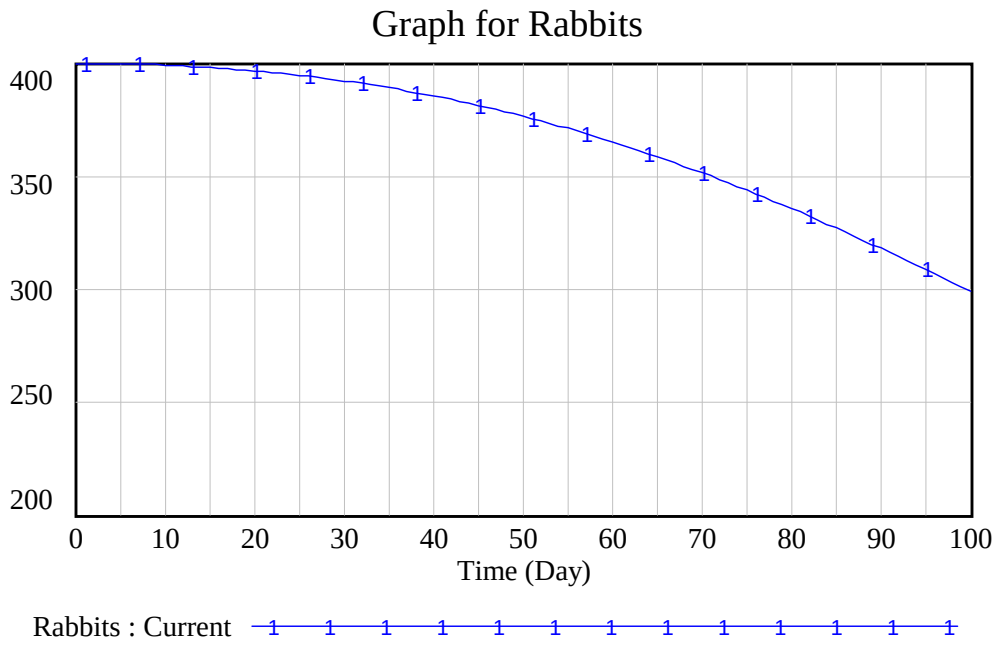
(06) INITIAL TIME = 0 Units: Day The initial time for the simulation.

(07) Rabbits = INTEG (change, 400)

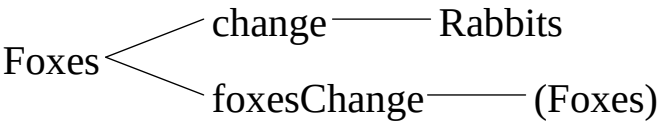
(08) SAVEPER = TIME STEP Units: Day The frequency with which output is stored.

(09) TIME STEP = 1 Units: Day The time step for the simulation.





ألعلاقات السببية:



الدورات الخلفية:

Loop Number 1 of length 1

Foxes

foxesChange

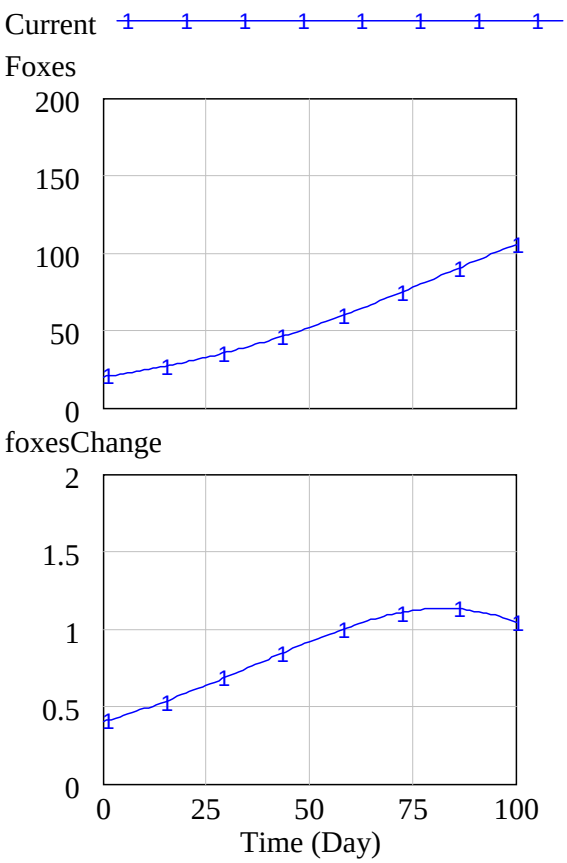
Loop Number 2 of length 3

Foxes

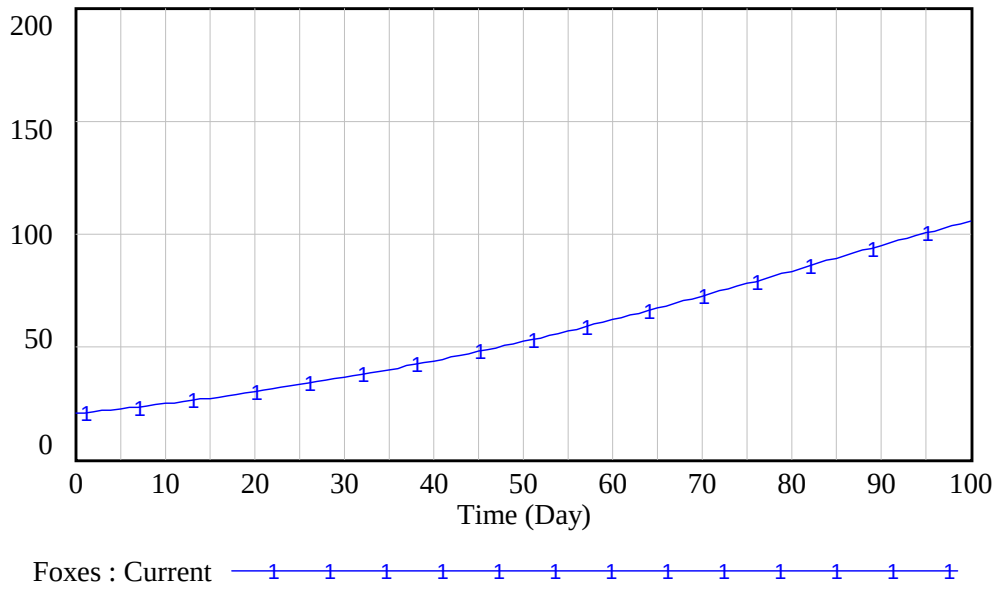
change

Rabbits

FoxesChange



Graph for Foxes



ملحق 1 :

الأسئلة والإجابات للإختبارات السابقة

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : بناء النماذج 203 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الثاني 1422/1421 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

عرف المصطلحات التالية وأعطي مثالا لكل منها:

(أ) المتاع Stock (ب) ألإنسياب Flow (ج) ألإنسياب الداخل Inflow (د) ألإنسياب الخارج Outflow (هـ) المصدر Source (و) الغور (البالوعة) Sink (ز) دورة تغذية خلفية Feedback Loop (ح) المتغير المساعد Auxiliary Variable (ط) نمذجة النظام System Modeling (ي) نموذج رياضي متحرك (ديناميكي) Dynamic Mathematical Model (خمسة علامات _ نصف علامة لكل فقرة)

السؤال الثاني:

لاحظ موزع ثلاجات منزلية أن المعدل الذي يبيع به الثلاجات يعتمد مباشرة علي عدد المنازل التي لايوجد بها ثلاجات بعد وأن هذا المعدل يتناقص بإزدياد عدد المنازل التي تملك ثلاجات. إذا إفترضنا أن H يمثل العدد الأصلي للمنازل التي لا تملك ثلاجة بعد ولكن تنوي على إمتلاكها و x عدد المنازل التي تملك ثلاجة.

(أ) بين أن المعادلة الفروقية Difference Equation لنمذجة النظام السابق (خذ وحدة الزمن اليوم) هي:

$$x_t = x_{t-1} + k\left(H - x_{t-1}\right)$$

(علامتين ونصف)

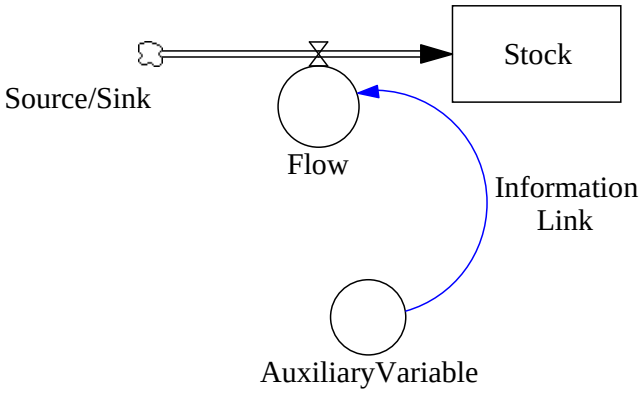
(ب) إفترض أن $x = 0$ عندما $t = 0$، حل هذا النموذج للعدد الأصلي للمنازل $H = 20000$ و ثابت تناسب $k = 0.05$ ، لقيم $t = 0,1,2,\cdots,10$ (علامتين ونصف)

(ج) عين المتاع و الإنسياب والمتغيرات المساعدة والمصدر ودورة التغذية الخلفية (علامة واحدة)

(د) أرسم شكل تخطيطي للمتاع وألإنسياب Stock and Flow Diagram ، ونفذه بإستخدام Vensim وسجل نتائجك. (أربعة علامات)

الإجابات النموذجية:

(1 –أ) المتاع Stock أي شيئ يتغير مع الزمن (ديناميكي، متحرك) يزداد وينقص ويسمى ايضا مستوى Level او متغير حالة State Variable ويمثل كالتالي:



أمثلة: كمية المياه في خزان، عدد الأسهم التي يمتلكها مستثمر الخ

(1-ب) الأنسياب Flow هو معدل Rate يزيد أو ينقص متاع. أمثلة: كمية المياه المغذية للخزان او المسحوبة منه، عدد الأسهم المشتراة أو المباعة

(1-ج) ألإنسياب الداخل هو معدل يزيد المتاع. أمثلة: كمية المياه المغذية للخزان، عدد الأسهم المشتراة

(1-د) ألإنسياب الخارج هو معدل ينقص المتاع. أمثلة: كمية المياه المسحوبة من الخزان، عدد الأسهم المباعة

(1-هـ) المصدر هو المنبع او الأصل الذي يغذي المتاع. أمثلة: خزان مصلحة المياة، الأسهم المطروحة للتداول

(1-و) الغور (البالوعة) هو القاع او المدفن او المجاري الذي ينقص المتاع. أمثلة: المجاري او الصرف الصحي للمياة الخارجة من الخزان، الأسهم المطروحة للتبادل (ملاحظة: قد يكون المصدر والغور نفس الشئ كما في المثال الأخير)

(1-ز) دورة تغذية خلفية هي التي يؤثر فيها المتاع على الأنسياب المغذي له. أمثلة: الخزان المغذى بالمياه من خلال انبوب مياه تتحكم به طافية، كلما ترتفع المياة في الخزان ترتفع معه الطافية وتقل كمية المياه الداخلة

(1-ح) المتغير المساعد هو متغير يدخل في وصف وعمل النظام ويؤثر في الإنسياب وقد يتأثر بالمتاع. أمثلة: السعة القصوى للخزان، رأس المال المتاح لإستثمار

(1-ط) نمذجة النظام، وضع نموذج رياضي يصف عمل النظام. مثل علاقات رياضية تصف معدل إمتلاء الخزان بالمياه، معادلات إقتصاد قياسي تصف حالة العرض والطلب على الأسهم

(1-ي) نموذج رياضي متحرك (ديناميكي) هو الذي يوصف بمعادلات تتغير مع الزمن و يتكون من معادلات تفاضلية او فروقية. مثل $\dot{x} = kx$ (النقطة فوق الرمز تدل على الإشتقاق بالنسبة للزمن) وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى وتمثل نظام في حالة نمو اسي

(2-أ)

$$\begin{aligned}
\frac{x(t)-x(t-dt)}{dt} &\propto \left[H - x(t-dt)\right] \\
&= k\left[H - x(t-dt)\right] \\
x(t)-x(t-dt) &= k\left[H - x(t-dt)\right]dt \\
x(t) &= x(t-dt) + k\left[H - x(t-dt)\right]dt \\
&= x(t-1) + k\left[H - x(t-1)\right]
\end{aligned}$$

في الإشتقاق من الأفضل لو نبدأ ببناء معادلة تفاضلية (للسهولة) ثم نحولها إلى معادلة فروقية،

$$x_t = x_{t-1} + k\left(H - x_{t-1}\right)$$

(2-ب)

$$\begin{aligned}
&x_t = x_{t-1} + 0.05\left(20000 - x_{t-1}\right), x_0 = 0, t = 0,1,2,\cdots,10 \\
&x_1 = x_0 + 0.05\left(20000 - 0\right) = 1000 \\
&x_2 = x_1 + 0.05\left(20000 - x_1\right) = 1000 + 0.05\left(20000 - 1000\right) = 1950 \\
&x_3 = 1950 + 0.05\left(20000 - 1950\right) = 2852.5 \\
&x_4 = 3709.875 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

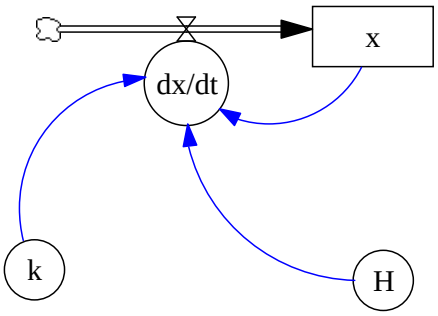
(2-ج) المتاع هو عدد المنازل التي تملك ثلاجة x

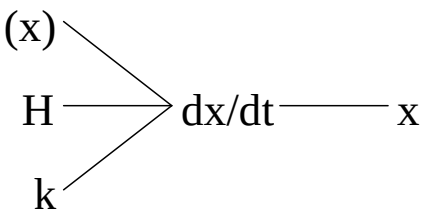
الإنسياب هو المعدل الذي تباع به الثلاجات $x_t - x_{t-1}$

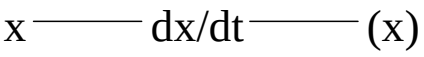
المتغير المساعد العدد الأصلي للمنازل التي لاتملك ثلاجة بعد ولكن تنوى إمتلاكها H

دورة التغذية الخلفية كلما يزداد x ينقص $H - x$ وبالتالي ينقص $x_t - x_{t-1}$ والإنسياب الداخل لايمكن ان يكون كمية سالبة ولهذا يزيد من x وهكذا.

(2-د)



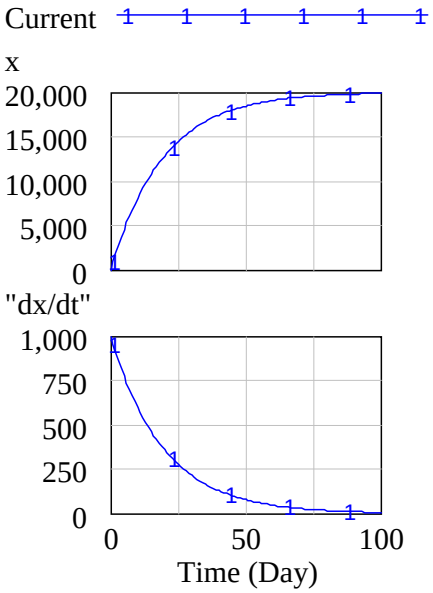


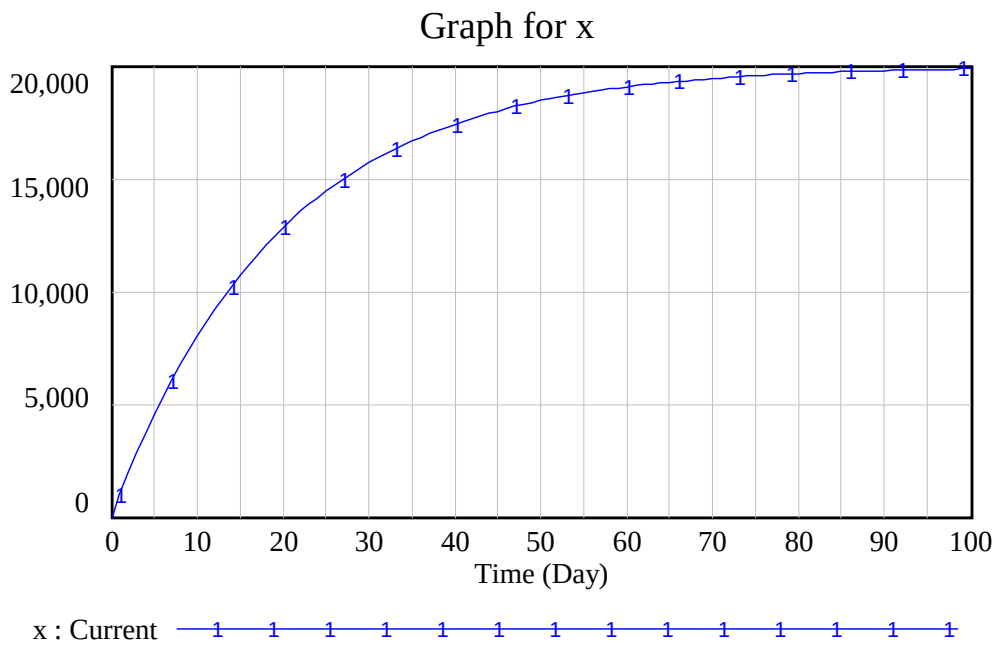


Loop Number 1 of length 1

x

dx/dt





x	0	1000	1950	2852.5	3709.88	4524.38	

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الإحصاء وبحوث العمليات

الإختبار الثاني لأعمال الفصل الثاني 1422/1421 هـ
لمادة 203 بحث (بناء النماذج)
الزمن: 2 ساعة

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

حل المعادلات الفروقية التالية للقيم الأولية المعطاة تكراريا (Iterate) لقيم $t = 1,2,...,15$

$$x_t + x_{t-1} - 2x_{t-2} = 0, \quad x_0 = 5, x_1 = -1$$
$$x_t + 6x_{t-1} + 9x_{t-2} = 0, \quad x_0 = 3, x_1 = -15$$

وفي كل حالة أرسم x_t مع $t = 1,2,...,15$.

السؤال الثاني:

هناك الكثير من الظواهر الطبيعية مثل الظواهر الحيوية والبيلوجية والإجتماعية والإقتصادية الخ (لمعلومات اكثر إقرأ عن Fibonacci Numbers) تكون فيها كمية نظام ديناميكي عند الزمن t تعتمد مباشرة علي كمية النظام عند الأزمنة $t-1$ و $t-2$. فإذا كانت $x_t, t \in T$ حيث T تمثل فترة زمنية معينة، تحقق من أن المعادلة الفروقية من الدرجة الثانية والتي تصف ديناميكية النظام عند أي لحظة زمنية هي:

$$x_t - x_{t-1} - x_{t-2} = 0, \quad \forall t \in T$$

(أ) بوضع $x_t = \lambda^t, \quad \lambda \neq 0$ بين أن المعادلة المساعدة تكتب على الشكل $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ ولها الحل التالي:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339$$

(ب) بين أن x_t تكتب علي الشكل

$$x_t = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t, \quad \forall t \in T$$

ولقيم أولية $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ فإن $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ وبالتالي فإن x_t تكتب علي الشكل:

$$x_t = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^t - \left(1-\sqrt{5}\right)^t\right], t = 0,1,2,... \quad \left(T = \{0,1,2,...\}\right)$$

(ج) بإستخدام Excel أوجد x_t لقيم $t = 1,2,...,25$ وذلك بوضع:

A1=1

A2=1

A3=A1+A2

.

.

.

A(n)=A(n-1)+A(n-2)

ملاحظة: إستخدم النسخ واللصق لملئ الخلايا A4-A25

بوضع B1=A2/A1 تحقق ان

$$B(n) \to \lambda_1 \approx 1.6180339, \quad \text{As } n \to \infty$$

وبوضع C1=A1/A2 تحقق ان

$$C(n) \to \lambda_2 \approx 0.6180339, \text{ As } n \to \infty$$

ملاحظة: خذ n=30

السؤال الثالث:

(أ) يقول أحد خبراء الإقتصاد أن ظاهرة إقتصادية معينة لها الخاصية المركوفية Markovian Property من الدرجة الثانية فماذا يعني؟

(ب) سعر الإقفال لسهم شركة ما يتبع الخاصية المركوفية من الدرجة الثانية حسب المعادلة الفروقية

$$x_t - ax_{t-1} - bx_{t-2} = \varepsilon_t, \forall t \in T, \quad \varepsilon_t \sim N(0,4)$$

حول هذه المعادلة من درجة ثانية بمتغير حالة واحد (Second Order one State Variable) إلى درجة أولى بمتغيرى حالة (First Order two State Variables) وذلك بوضع $y_{t-1} = x_{t-2}$.

(ج) بإستخدام Vensim كون نموذج لهذا النظام وأختبر إستقراره (Steady State) لقيم

1) $a = 1.2, \quad b = -0.7$
2) $a = -1.2, \quad b = -0.7$

ملاحظة: إستخدم القيم التالية

RANDOM NORMAL(-3.99,3.99 , mean ,standard deviation ,seed=Prime Number)

INITIAL TIME = 0

FINAL TIME = 2

SAVEPER = TIME STEP

TIME STEP = 0.01

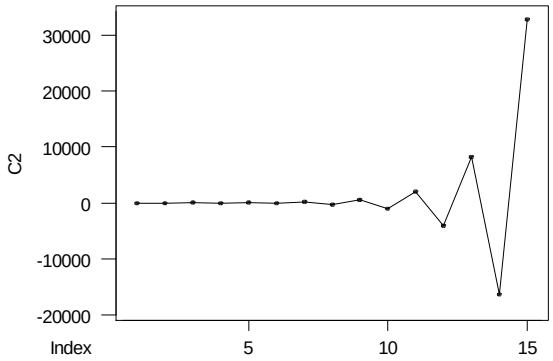
بسم الله الرحمن الرحيم

أحد الحلول الممكنة لإختبار 203 بحث

إجابه للسؤال الأول:

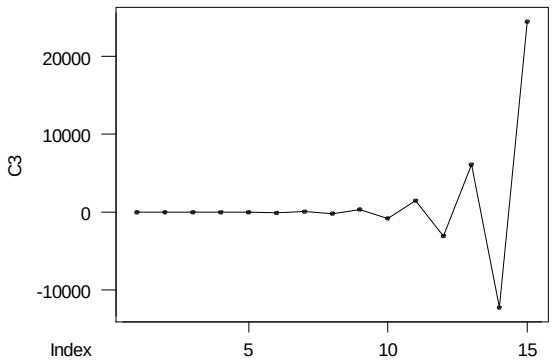
$x_t = -x_{t-1} + 2x_{t-2},\ x_0 = 5, x_1 = -1$

5,-1,11,-13,35,-61,131,-253,515,-1021,2051,-4093,8195,-16381,32771



$x_t = -6x_{t-1} - 9x_{t-2},\ x_0 = 3, x_1 = -15$

3,-15,-39,-57,-21,-93,51,-237,339,-813,1491,-3117,6099,-12333,24531



إجابة للسؤال الثاني:

لدينا x_t تعتمد علي x_{t-1} و x_{t-2} حسب منطوق المسألة أي

$$x_t = x_{t-1} + x_{t-2}$$
$$x_t - x_{t-1} - x_{t-2} = 0, \forall t \in T$$

(أ) بوضع $x_t = \lambda^t, \lambda \neq 0$ نجد

$$\lambda^t - \lambda^{t-1} - \lambda^{t-2} = 0$$
$$\lambda^{t-2}\left(\lambda^2 - \lambda - 1\right) = 0$$
$$\because \lambda \neq 0$$
$$\therefore \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \quad \left(if \quad ax^2 + bx + c = 0, then\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339$$

(ب) بما ان جزور المعادلة المساعدة حقيقية ومختلفة فإن الحل العام للمعادلة الفروقية هو

$$x_t = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t, \forall t \in T$$
$$x_t = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t, \forall t \in T$$
$$\because x_0 = 0, x_1 = 1$$
$$\therefore x_0 = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$
$$and\ x_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
$$\therefore -B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
$$\therefore B = \frac{-1}{\sqrt{5}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\therefore x_t = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^t + \left(1-\sqrt{5}\right)^t\right], t = 0,1,2,...$$

(ج)

A	B	C
1	1	1
1	1	1
2	2	0.5
3	1.5	0.666666667
5	1.666666667	0.6

8	1.6	0.625
13	1.625	0.615384615
21	1.615384615	0.619047619
34	1.619047619	0.617647059
55	1.617647059	0.618181818
89	1.618181818	0.617977528
144	1.617977528	0.618055556
233	1.618055556	0.618025751
377	1.618025751	0.618037135
610	1.618037135	0.618032787
987	1.618032787	0.618034448
1597	1.618034448	0.618033813
2584	1.618033813	0.618034056
4181	1.618034056	0.618033963
6765	1.618033963	0.618033999
10946	1.618033999	0.618033985
17711	1.618033985	0.61803399
28657	1.61803399	0.618033988
46368	1.618033988	0.618033989
75025	1.618033989	0.618033989
121393	1.618033989	0.618033989
196418	1.618033989	0.618033989
317811	1.618033989	0.618033989
514229	1.618033989	0.618033989
832040	1.618033989	0.618033989

نلاحظ أن

$B(n) \to \lambda_1 \approx 1.6180339,\ As\ n \to \infty$

$C(n) \to \lambda_2 \approx 0.6180339,\ As\ n \to \infty$

إجابة للسؤال الثالث:

(أ) الخاصية الماركوفية من الدرجة k Markovian Property of order

تقول على ان قيمة الظاهرة العشوائية عند الزمن t تعتمد على قيمها عند الأزمنة $t-1, t-2, ..., t-k$ فقط. فمثلا إذا كانت $\{y_t, -\infty < t < \infty\}$ فإن

$$P\left(y_t < s \mid y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-k}, y_{t-(k+1)}, ...\right) = P\left(y_t < s \mid y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-k}\right)$$

(ب)

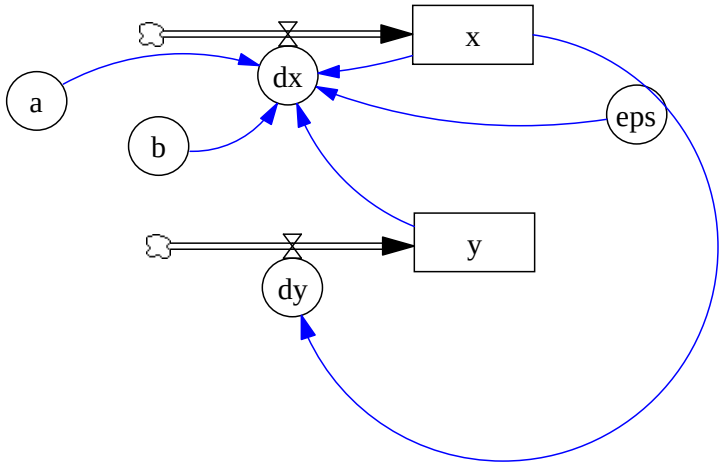
$$x_t - ax_{t-1} - bx_{t-2} = \varepsilon_t, \forall t \in T, \varepsilon_t \sim N(0,4)$$

$$\because y_{t-1} = x_{t-2} \Rightarrow y_t = x_{t-1}$$

$$\therefore \; x_t = ax_{t-1} + by_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = x_{t-1}$$

(ج)



(01) a = 1.2

(02) b = -0.7

(03) dx = a*x+b*y+eps

(04) dy = x

(05) eps = RANDOM NORMAL(-3.99,3.99 , 0 ,2 ,19)

(06) FINAL TIME = 2

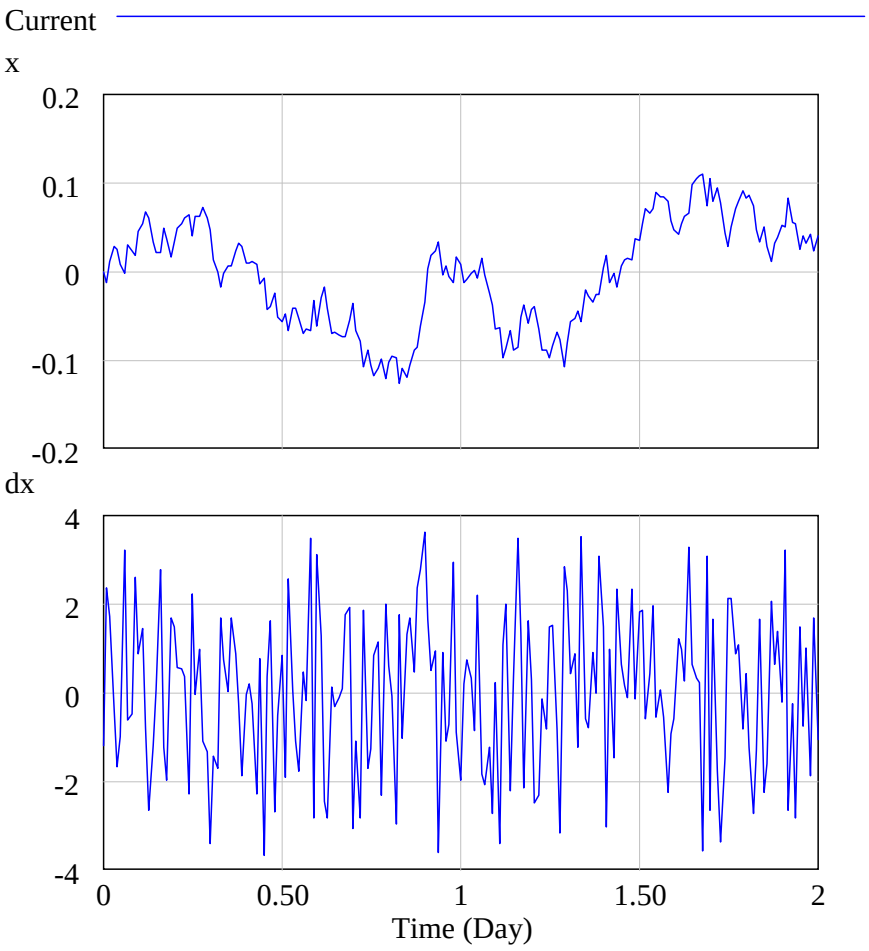
(07) INITIAL TIME = 0

(08) SAVEPER = TIME STEP

(09) TIME STEP = 0.01

(10) x = INTEG (dx, 0)

(11) y= INTEG (dy, 0)



النظام غير مستقر

(01) a = -1.2

(02) b = -0.7

(03) dx = a*x+b*y+eps

(04) dy = x

(05) eps = RANDOM NORMAL(-3.99,3.99 , 0 ,2 ,19)

(06) FINAL TIME = 2

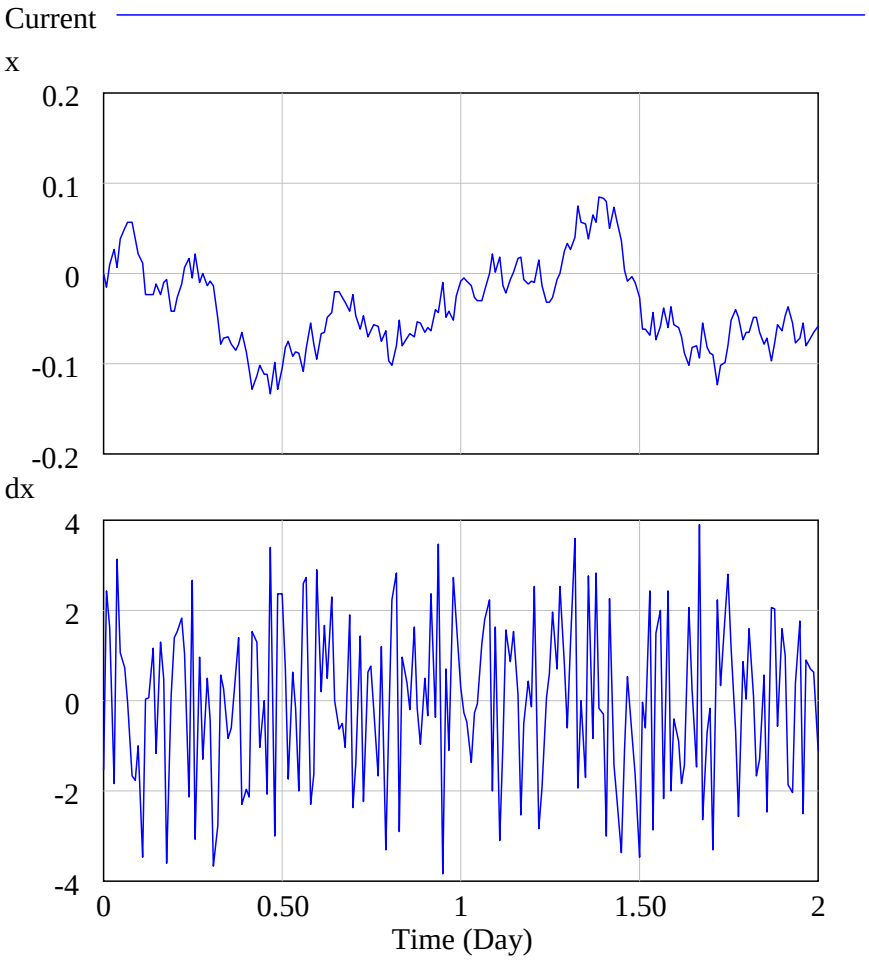
(07) INITIAL TIME = 0

(08) SAVEPER = TIME STEP

(09) TIME STEP = 0.01

(10) x = INTEG (dx, 0)

(11) y = INTEG (dy, 0)



النظام مستقر

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم

جامعة الملك سعود

الإختبار النهائي للفصل الثاني 1422/1421هـ

لمادة 203 بحث (بناء النماذج)

الزمن 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

لمجموعة المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equations التالية:

$$\dot{x} = -0.5x + ay, \quad |a| < 0.4$$
$$\dot{y} = x - 0.5y$$

(أ) أكتبها على شكل فضاء الحالة State Space $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ وأوجد الجزور المميزة Eigenvalues للمصفوفة $\mathbf{A}$ وبين أن قيمة a المعطاة تعطي حلا مستقرا للمعادلات التفاضلية.

(ب) أكتب المعادلات الفروقية الخطية Linear Difference Equations المكافئة للمجموعة السابقة وأكتبها على شكل فضاء الحالة State Space $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{Ax}_i, i = 0,1,2,\ldots$. هل الشرط على قيمة a يعطي حلا مستقرا هنا ايضا.

(ج) بإستخدام Excel حل مجموعة المعادلات الفروقية للقيم الأولية $x_0 = 1, y_0 = 1$ ولقيم $i = 1,2,\ldots,20$ و $a = 0.3$.

السؤال الثاني:

(عدد الآبارWells) x في حقل بترول يزداد بإنسياب داخل من (الآبار المحفورة Drilling Wells) $\dot{x}$ والتي تعتمد علي عدد الآبار وعلي (نسبة الحفر Drilling Fraction) d والذي هو حاصل ضرب (نسبة الحفر العادية Normal Drilling Fraction) n و (تأثير الإحتياطي على نسبة الحفر Effict of Reserves on Drilling Fraction) e وهذا الأخير يعطي علاقة موجبة بين (إحتياطي البترول Petroleum Reserves) r المتبقي

ونسبة الحفر. الجزء المتبقي من إحتياطي البترول هو عبارة عن نسبة المستوى الحالي لإحتياطي البترول الى (القيمة الأولية لإحتياطي البترول Initial Petroleum Reserves) i والنقص في هذه النسبة يعني ان كلما تبقي مقدار أقل من إحتياطي البترول كلما قلت كمية البترول الممكن إستخراجها وكلما قلت القيمة الإقتصادية في إخراجها وهكذا فإن نسبة الحفر تنقص.

عدد الآبار يتناقص بإنسياب خارج هو (الآبار المغلقة Closing Wells) $-\dot{x}$ والتي هي حاصل ضرب (نسبة الإغلاق العادية Normal Closing Fraction) c و (تأثير الإستخراج علي نسبة الإغلاق Effect of Extraction on Closing Fraction) f . تأثير الإستخراج علي نسبة الإغلاق هو دالة تبين التأثير علي (الإستخراج لكل بئر Extraction per Well) p بالمقارنة مع (الإستخراج الأعظم لكل بئر Maximum Extraction per Well) m علي نسبة الإغلاق . فألنقص في نسبة الإستخراج لكل بئر إلى الإستخراج الأعظم لكل بئر تعني أن الإستخراج اصبح أكثر صعوبة وانه من الأفضل قفل البئر لعدم جدواه الإقتصادية وبهذا تزداد نسبة الإغلاق. الإستخراج لكل بئر هو حاصل ضرب الإستخراج الأعظم لكل بئر و (تأثير الإحتياطي على الإستخراج لكل بئر Effect of Reserves on Extraction per Well) h وهذا الأخير يبدي علاقة موجبة بين البترول المستخرج والإحتياطي. فكلما تناقصت نسبة إحتياطي البترول فإن الإستخراج يصبح اكثر صعوبة وبالتالي فإن الإستخراج لكل بئر يتناقص. أخيرا ولأن البترول هو مصدر غير متجدد فإن مستوى إحتياطي البترول ليس له إنسياب داخل. الإنسياب الخارج $\dot{r}$ من إحتياطي البترول هو الكمية الكلية من (الإستخراج Extraction) g السنوية والتي هي حاصل ضرب الإستخراج لكل بئر و عدد الآبار.

(أ) أرسم مخطط مستوى وإنسياب (علاقات سببية) لهذا النظام وأكتب المعادلات الفروقية Difference Equations التي تتحكم فيه.

(ب) كون نموذج لإستخراج البترول بإستخدام Vensim

السؤال الثالث:

يمكن إعتبار قلب الإنسان كمضخة تنقل الدم الغني بالاكسجين من الرئة إلى جميع اجزاء الجسم. كما يمكن نمذجة قلب الإنسان (بشكل تقريبي جدا) كمتردد Oscillator . القلب كنظام يتردد بين حالتين بشكل عام: إنبساط Diastole أي حالة إرتخاء و إنقباض Systole أي حالة تقلص. يتسبب في إنقباض وإنبساط عضلات القلب محفز كهروكيميائي Electro-Chemical Stimulus . فإذا إفترضنا أن x هو طول ليفة عضلة Muscle Fiber في القلب و v كمية

المحفذ، فقد وجد من التجارب المعملية أن معدل الإنبساط والإنقباض في طول ليفة عضلة القلب يزداد مع كمية المحفذ وينقص متناسبا (بثابت تناسب $\mu > 0$) مع الفرق بين ثلث حجم الليفة (أعتبر الأبعاد متساوية) وطولها. كما وجد أن معدل كمية المحفذ تتناقص مع طول الليفة.

أولا: كون المعادلات التفاضلية Difference Equations لنموذج حركية ليفة عضلية من القلب معتمدا على المعطيات السابقة.

ثانيا: كون نموذج Vensim بالقيم التالية وناقش النتائج:

$$\mu = 2\ cm/\sec, \quad x(0) = 2\ cm$$
$$v(0) = 1\ microgrm, \quad t = 0(0.1)100\ \sec$$

السؤال الرابع:

هناك الكثير من الظواهر الطبيعية التي توصف حركيتها بالدالة اللوجستية Logistic Function. هذه الدالة تصف ظاهرة تبدأ بالنمو ببطئ (مرحلة التأسيس) ثم يصبح نموها اسي Exponential لفترة (مرحلة الإزدهار) ثم يتباطؤ نموها (مرحلة النضج) ثم يتوقف نموها (مرحلة الإستقرار). فإذا رمزنا لقيمة الظاهرة عند الزمن t بالرمز $n(t)$ فإن n_0 ترمز إلى القيمة الأولية او المبدئية Initial Value وإذا كان سقف النمو لهذه الظاهرة هو M (وهو أقصى مايمكن ان تصل اليه قيمة الظاهرة – في الحقيقة تصله عندما يؤول الزمن إلى مالانهاية) فإن المعادلة الحركية Dynamic Model التي تصف الظاهرة عند كل الأزمنة هي:

$$n(t) = \frac{M}{1 + \left[(M - n_0)/n_0\right]e^{-ct}}, \quad t \geq 0$$

(أ) كون مخطط Vensim لهذه الظاهرة.

(ب) من البيانات التالية:

Year	Volume	Year	Volume
1984	0.0	1992	15.0
1985	1.5	1993	18.5
1986	2.0	1994	20.0
1987	2.5	1995	22.5
1988	4.0	1996	23.5
1989	5.0	1997	23.0

1990	8.5	1998	27.0
1991	11.5	1999	27.5

قدر المعالم M و n_0 و c.

ملاحظة: أستخدم Curve Expert أو Excel وخذ المعادلة على الشكل $y = \frac{a}{1+be^{-cx}}$ أستخدم كقيم اولية $a_0 = 30, b_0 = 30, c_0 = 0.5$ أو أي قيم اخرى تجدها مناسبة.

(ج) خذ القيم المقدرة كمعالم للمخطط في الفقرة (أ) وأجري محاكاة للنظام وناقش النتائج.

ملاحظة: أستخدم العلاقة $\frac{dn(t)}{dt} = c \times \frac{M - n(t)}{M} \times n(t)$ للإنسياب.

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات محتملة للإختبار النهائي للفصل الثاني 1422/1421هـ

المادة 203 بحث

إجابة للسؤال الأول:

(أ)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5 & a\\ 1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-0.5 & a\\ 1 & -0.5\end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}\lambda)=\det\begin{pmatrix}-0.5-\lambda & a\\ 1 & -0.5-\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$(-0.5-\lambda)^2-a=0$$

$$\lambda_1=-\sqrt{a}-0.5$$

$$\lambda_2=\sqrt{a}-0.5$$

لقيم $-0.4<a<0.4$ نجد أن كلا من $\lambda_1<1$ و $\lambda_2<1$ وهذه شروط أن يكون الحل مستقرا.

(ب)

$$x_{i+1}=-0.5x_i+ay_i,\quad |a|<0.4,\quad i=0,1,2,...$$

$$y_{i+1}=x_i-0.5y_i$$

$$\begin{pmatrix}x_{i+1}\\ y_{i+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5 & a\\ 1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix},\ i=0,1,2,...$$

مصفوفة الحالة State Matrix هي نفسها وعليه فإن الإجابة في الفقرة السابقة تنطبق هنا ايضا.

(ج)

x	y
1	1
=-0.5*A2+0.3*B2	=A2-0.5*B2
=-0.5*A3+0.3*B3	=A3-0.5*B3
=-0.5*A4+0.3*B4	=A4-0.5*B4
=-0.5*A5+0.3*B5	=A5-0.5*B5
=-0.5*A6+0.3*B6	=A6-0.5*B6
=-0.5*A7+0.3*B7	=A7-0.5*B7
=-0.5*A8+0.3*B8	=A8-0.5*B8
=-0.5*A9+0.3*B9	=A9-0.5*B9

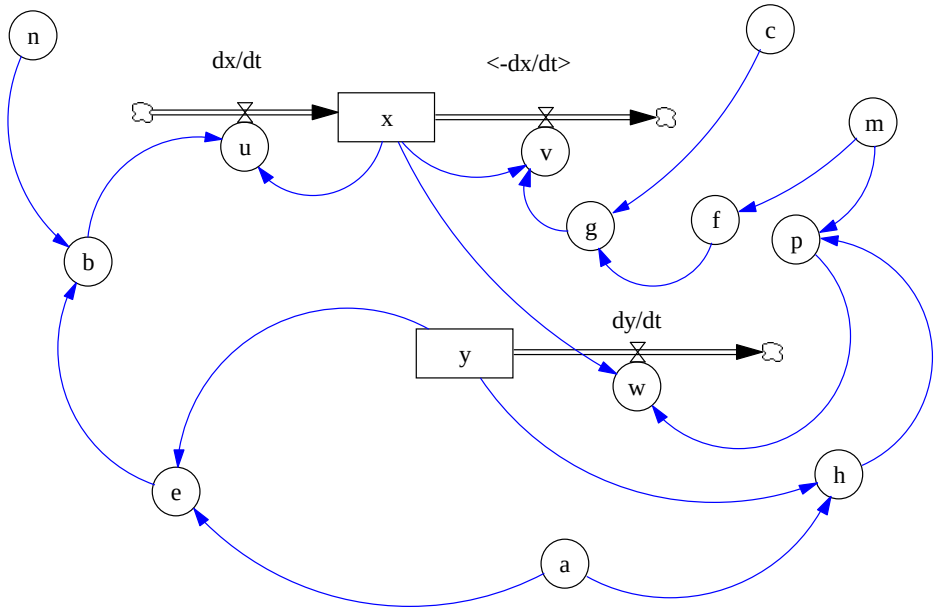
=-0.5*A10+0.3*B10	=A10-0.5*B10
=-0.5*A11+0.3*B11	=A11-0.5*B11
=-0.5*A12+0.3*B12	=A12-0.5*B12
=-0.5*A13+0.3*B13	=A13-0.5*B13
=-0.5*A14+0.3*B14	=A14-0.5*B14
=-0.5*A15+0.3*B15	=A15-0.5*B15
=-0.5*A16+0.3*B16	=A16-0.5*B16
=-0.5*A17+0.3*B17	=A17-0.5*B17
=-0.5*A18+0.3*B18	=A18-0.5*B18
=-0.5*A19+0.3*B19	=A19-0.5*B19

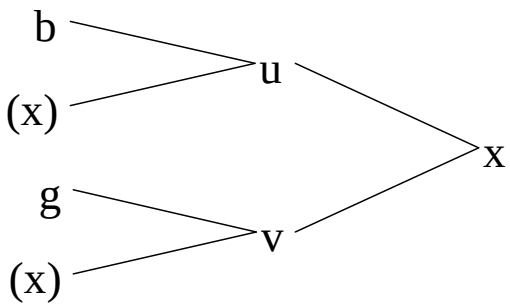
x	y
1	1
-0.2	0.5
0.25	-0.45
-0.26	0.475
0.2725	-0.4975
-0.2855	0.52125
0.299125	-0.546125
-0.3134	0.5721875
0.32835625	-0.59949375
-0.34402625	0.628103125
0.360444063	-0.65807781
-0.377645375	0.689482969
0.395667578	-0.72238686
-0.414549847	0.756861008
0.434333226	-0.79298035
-0.455060718	0.830823401
0.476777379	-0.87047242
-0.499530415	0.912013589
0.523369284	-0.95553721

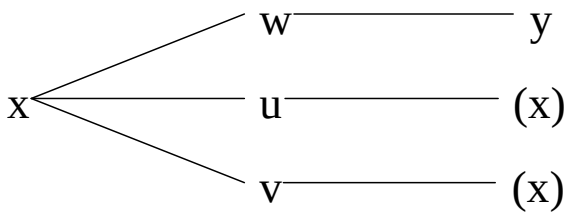
إجابة للسؤال الثاني:

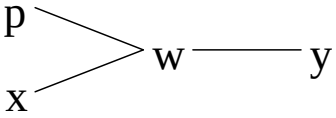
$$x(t) = x(t-dt) + (u-v)dt, \quad u = \dot{x}, \quad v = <-\dot{x}>$$
$$y(t) = y(t-dt) - wdt, \quad w = \dot{y}$$
$$\dot{x} = bx, \quad \dot{y} = px, \quad <-\dot{x}> = gx, \quad g = cf$$
$$b = ne, \quad p = mh, \quad f = p/m, \quad e = y/a, \quad h = y/a$$

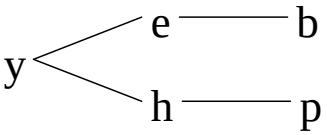
(ب)

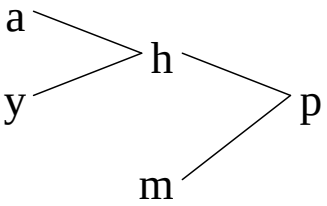


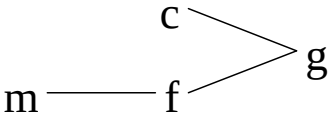



w
y
x
u
(x)
v
(x)


p
w
y
x


e
b
y
h
p


a
h
y
p
m


c
g
m
f

إجابة للسؤال الثالث:

(أ) بما أن معدل الإنبساط والإنقباض في طول ليفة عضلة القلب يزداد مع كمية المحفز وينقص متناسبا (بثابت تناسب $\mu > 0$) مع الفرق بين ثلث حجم الليفة وطولها إذا

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) - \mu\left[x^3(t)/3 - x(t)\right]$$

وبما أن معدل كمية المحفز تتناقص مع طول الليفة إذا

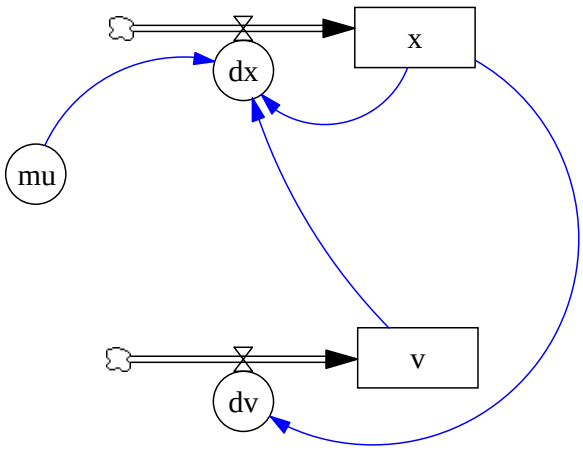
$$\frac{dv(t)}{dt} = -x(t)$$

ونكتبها بشكل مبسط

$$\frac{dx}{dt} = v - \mu\left(x^3/3 - x\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -x$$

(ب) النموذج ممثل ببرنامج Vensim



(01) dv= -x
Units: microgrm/sec

(02) dx= v-mu*(((x^3)/3)-x)
Units: cm/sec

(03) FINAL TIME = 100

Units: Second

The final time for the simulation.

(04) INITIAL TIME = 0

Units: Second

The initial time for the simulation.

(05) mu= 2

Units: cm/sec

(06) SAVEPER = TIME STEP

Units: Second

The frequency with which output is stored.

(07) TIME STEP = 0.1

Units: Second

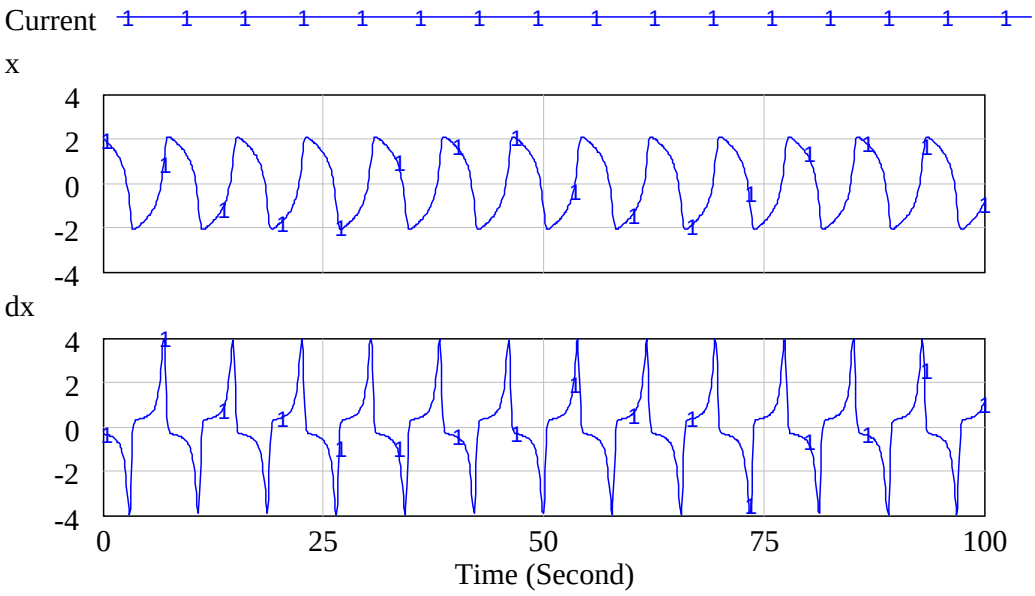
The time step for the simulation.

(08) v= INTEG (dv, 1)

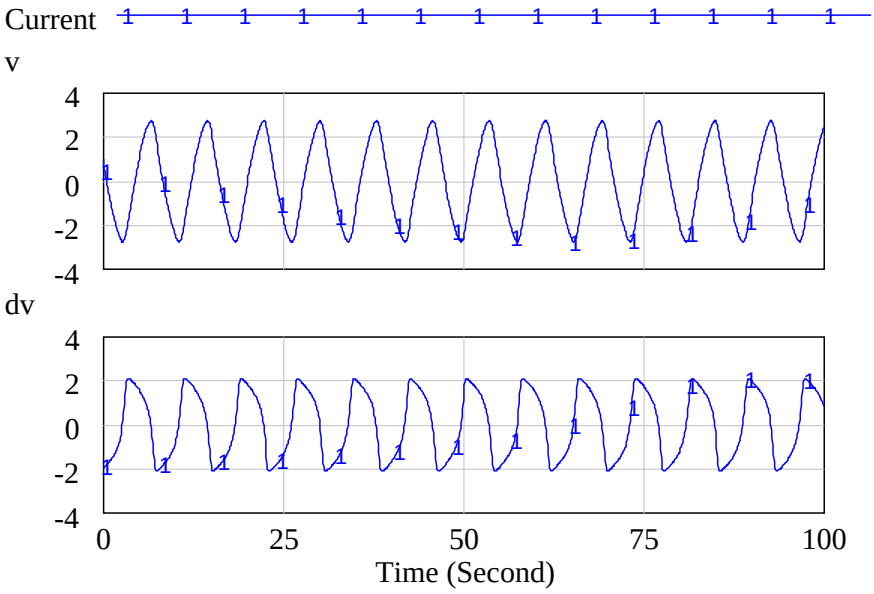
Units: microgrm

(09) x= INTEG (dx, 2)

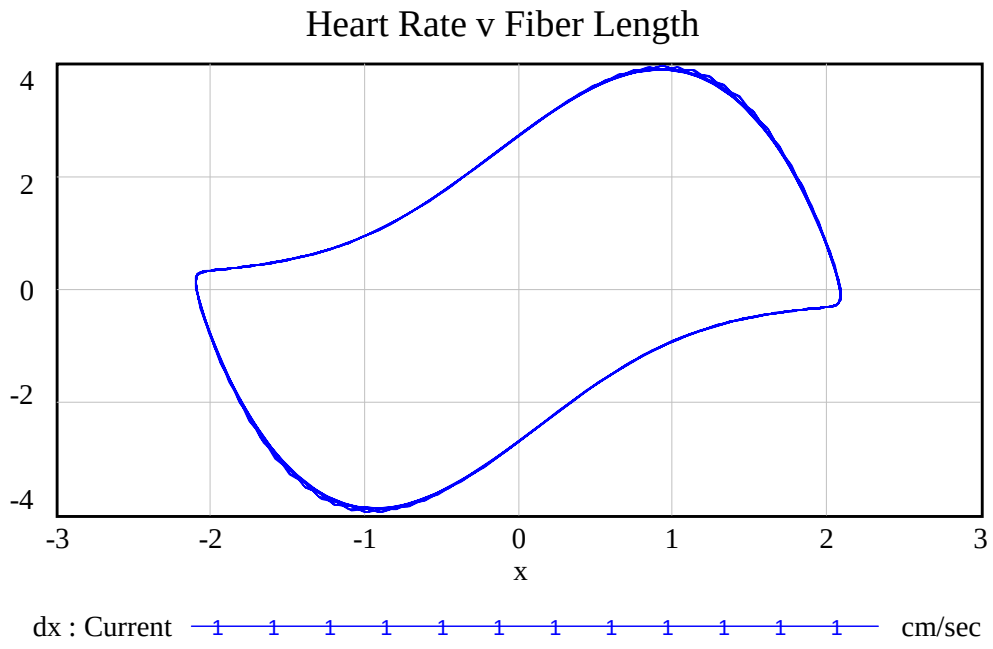
Units: cm


Current
x
4
2
0
-2
-4
dx
4
2
0
-2
-4
0
25
50
75
100
Time (Second)

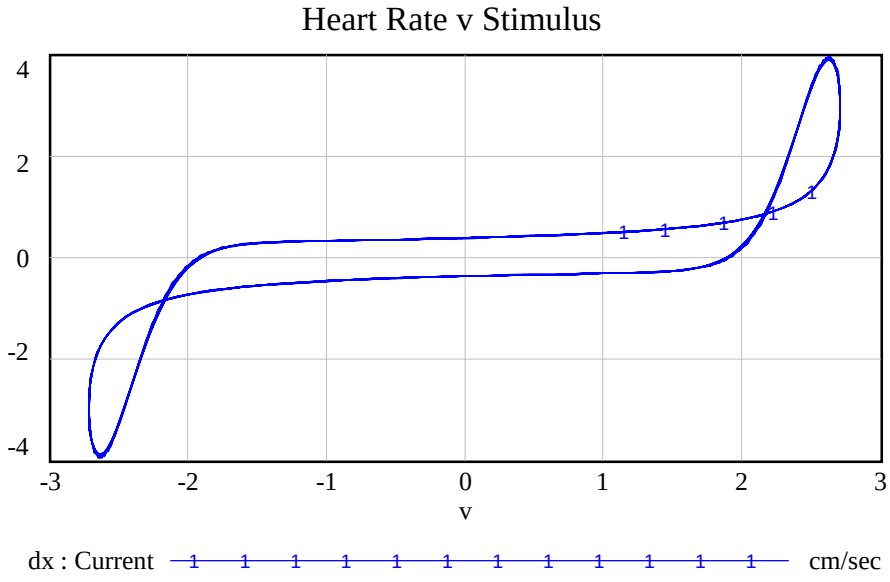
شكل (1)


Current
v
4
2
0
-2
-4
dv
4
2
0
-2
-4
0
25
50
75
100
Time (Second)

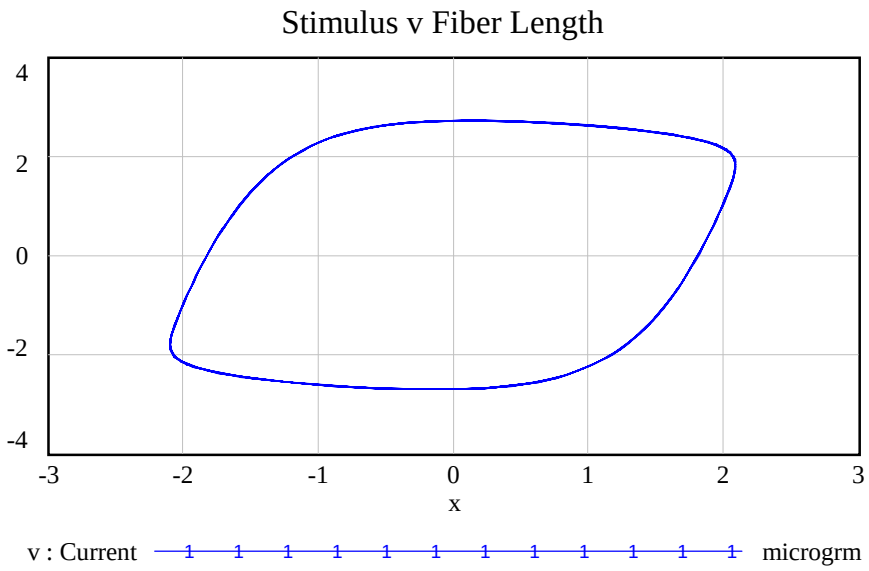
شكل (2)


Heart Rate v Fiber Length
4
2
0
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
dx : Current
1
cm/sec

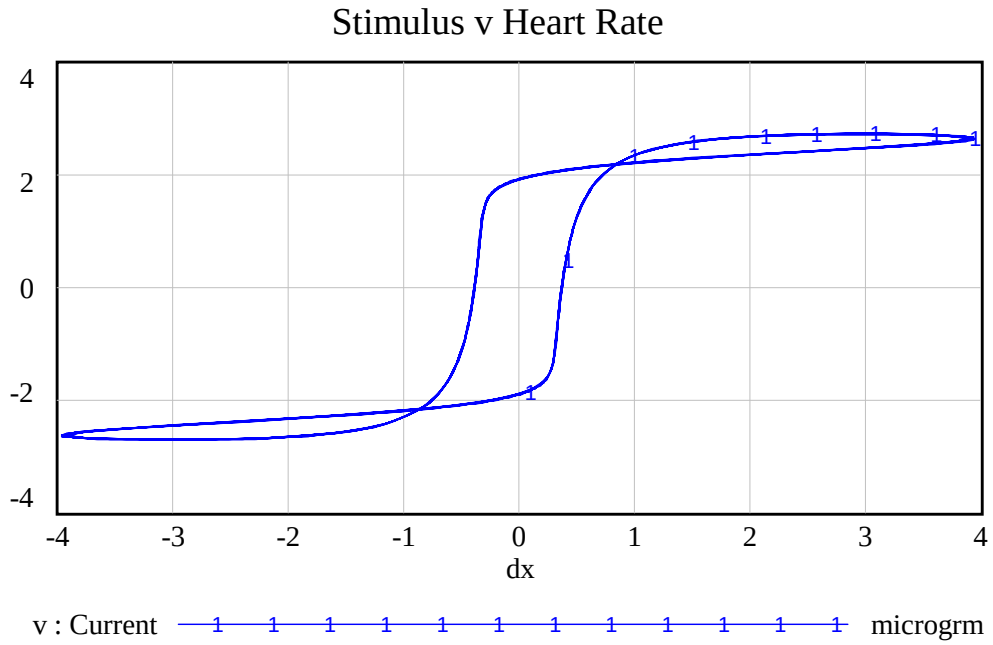
شكل (3)


Heart Rate v Stimulus
4
2
0
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
v
dx : Current
1
cm/sec

شكل (4)



شكل (5)



شكل (6)

مناقشة النتائج:

يلاحظ من شكل (1) أن الإنتقال من الإنبساط Diastole (ألياف طويلة) إلى الإنقباض Systole (ألياف قصيرة) تحدث فيها الإنقباض ببطء في الأول (حتي لايتسبب في إنسياب خلفي والذي

يؤذي القلب) ولكن عند كمية عالية من المحفذ فإن الألياف تنقبض بشكل سريع لدفع الدم إلى الخارج. شكل (2) يبين التردد Oscilation في مستوي المحفذ ومعدل تغيره. الأشكال من (3) إلى (6) توضح طبعة الترددات الدورية فى المستويات:

1- معدل نبضات عضلة القلب ضد طول العضلة شكل (3)

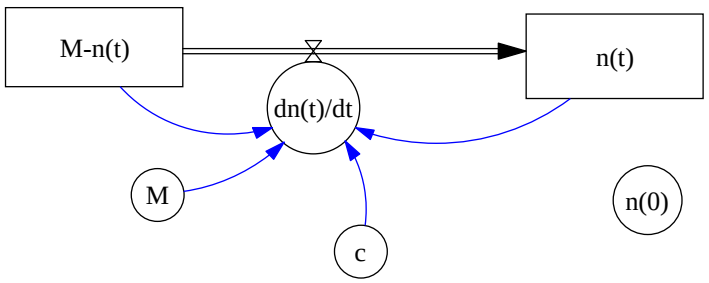
2- معدل نبضات عضلة القلب ضد كمية المحفذ شكل (4)

3- كمية المحفذ ضد طول العضلة شكل (5)

4- كمية المحفذ ضد معدل نبضات عضلة القلب شكل (6)

إجابة للسؤال الرابع:

(أ)



(ب) تقدير المعالم

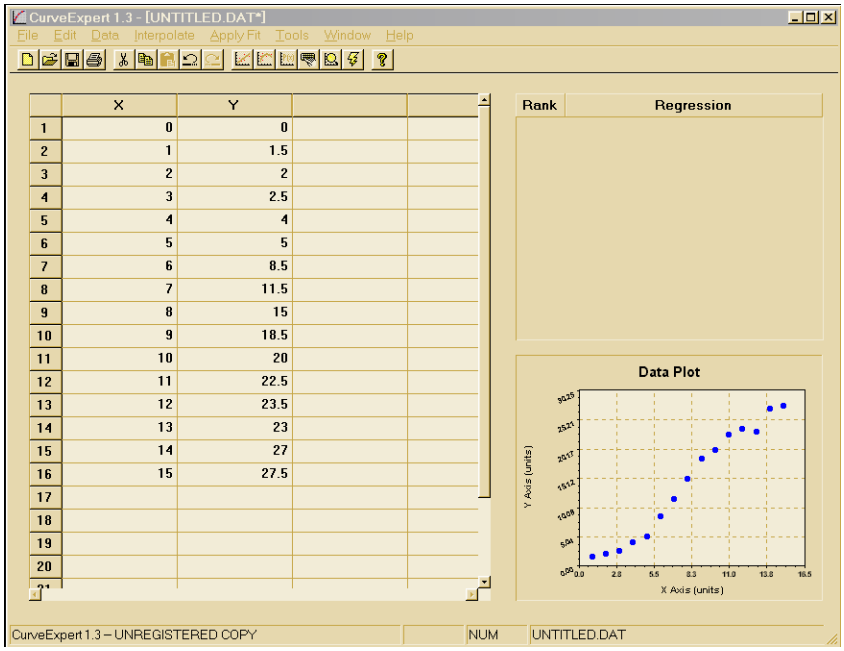
اولا بإستخدام Excel

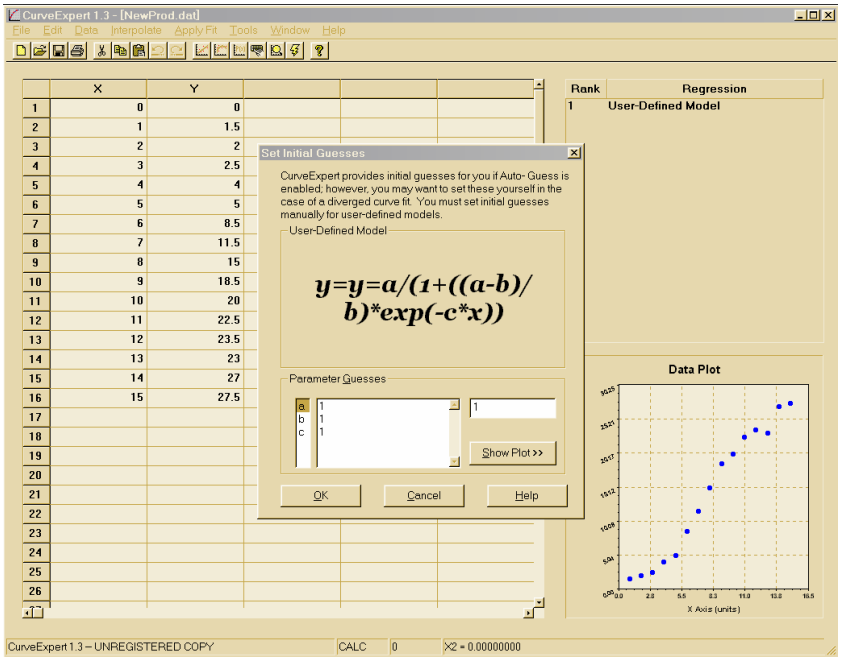
A	B	C	D	E
		c=	0.473488084598268	
		M=	27.218780487999	
		n0=	0.691567114138888	
Year	Delta Year	Value	Logistic	Sq Error
1980	=A5-$A$5	0	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B5))	=(D5-C5)^2
1981	=A6-$A$5	1.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B6))	=(D6-C6)^2
1982	=A7-$A$5	2	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B7))	=(D7-C7)^2
1983	=A8-$A$5	2.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B8))	=(D8-C8)^2
1984	=A9-$A$5	4	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B9))	=(D9-C9)^2

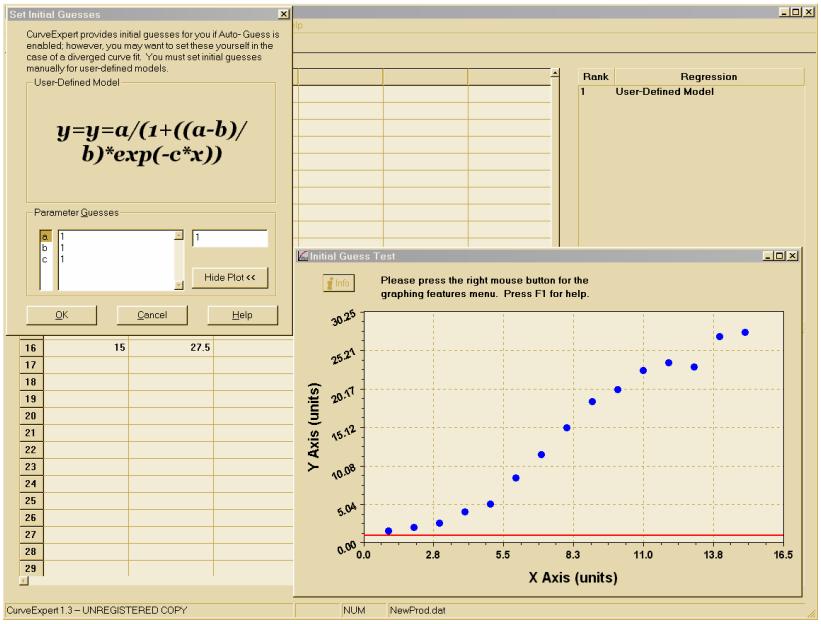
1985	=A10-$A$5	5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B10))	=(D10-C10)^2
1986	=A11-$A$5	8.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B11))	=(D11-C11)^2
1987	=A12-$A$5	11.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B12))	=(D12-C12)^2
1988	=A13-$A$5	15	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B13))	=(D13-C13)^2
1989	=A14-$A$5	18.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B14))	=(D14-C14)^2
1990	=A15-$A$5	20	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B15))	=(D15-C15)^2
1991	=A16-$A$5	22.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B16))	=(D16-C16)^2
1992	=A17-$A$5	23.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B17))	=(D17-C17)^2
1993	=A18-$A$5	23	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B18))	=(D18-C18)^2
1994	=A19-$A$5	27	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B19))	=(D19-C19)^2
1995	=A20-$A$5	27.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B20))	=(D20-C20)^2
			Sum=	=SUM(E5:E20)

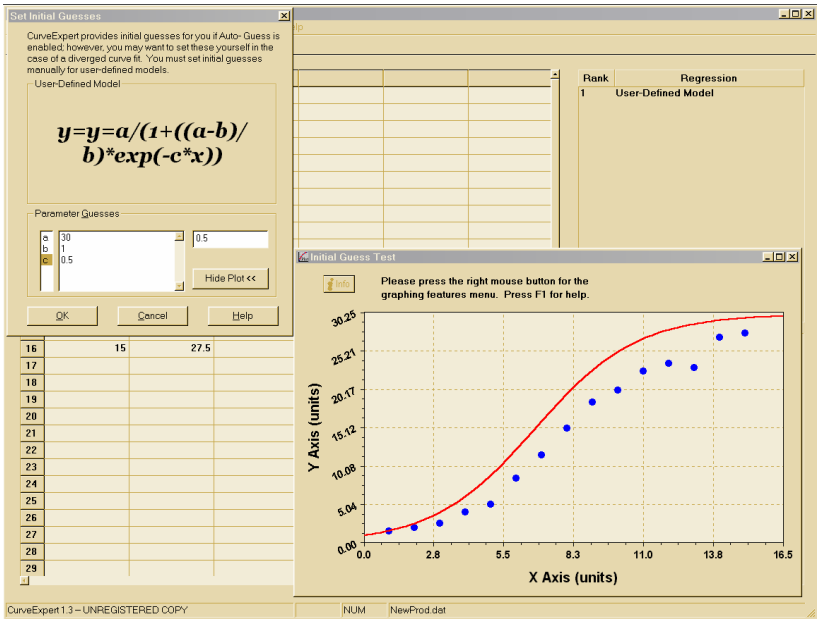
A	B	C	D	E
		c=	0.473488085	
		M=	27.21878049	
		n0=	0.691567114	
Year	Delta Year	Value	Logistic	Sq Error
1980	0	0	0.691567114	0.478265073
1981	1	1.5	1.093543839	0.165206611
1982	2	2	1.714073963	0.081753699
1983	3	2.5	2.650992755	0.022798812
1984	4	4	4.019328309	0.000373584
1985	5	5	5.923649251	0.85312794
1986	6	8.5	8.403403286	0.009330925
1987	7	11.5	11.36711781	0.017657676
1988	8	15	14.56684923	0.187619589
1989	9	18.5	17.66362481	0.699523461
1990	10	20	20.35934383	0.129127985
1991	11	22.5	22.49780667	4.81069E-06
1992	12	23.5	24.07261592	0.327888994
1993	13	23	25.16994472	4.708660072
1994	14	27	25.90542485	1.198094761
1995	15	27.5	26.38562558	1.241830348
			Sum=	10.12126434

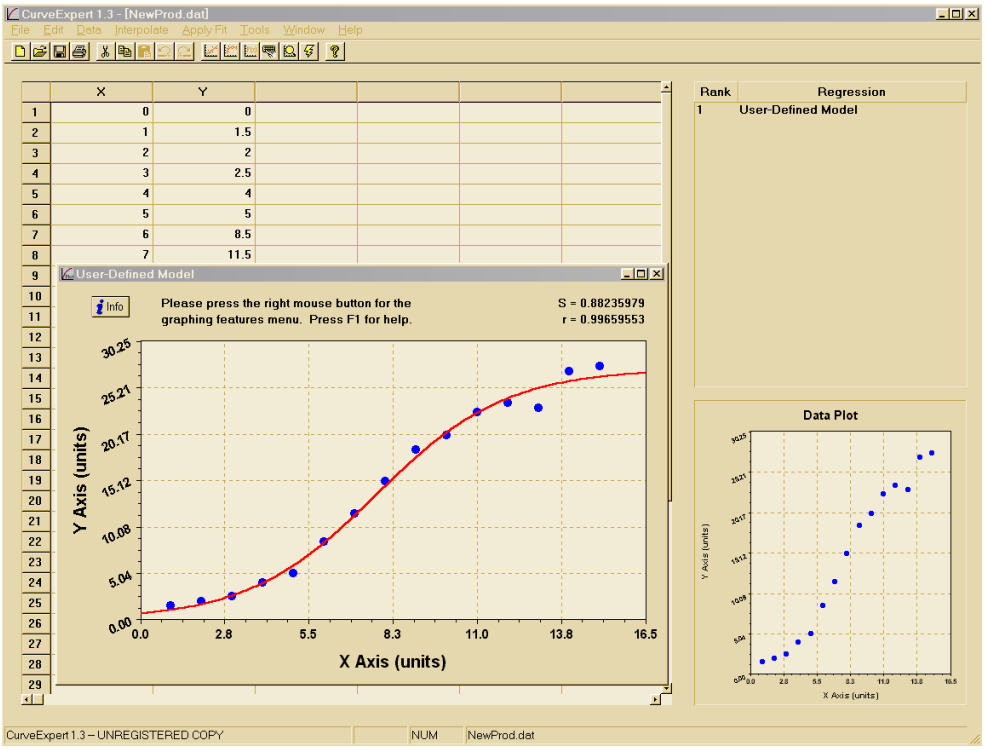
ثانيا بإستخدام Curve Expert

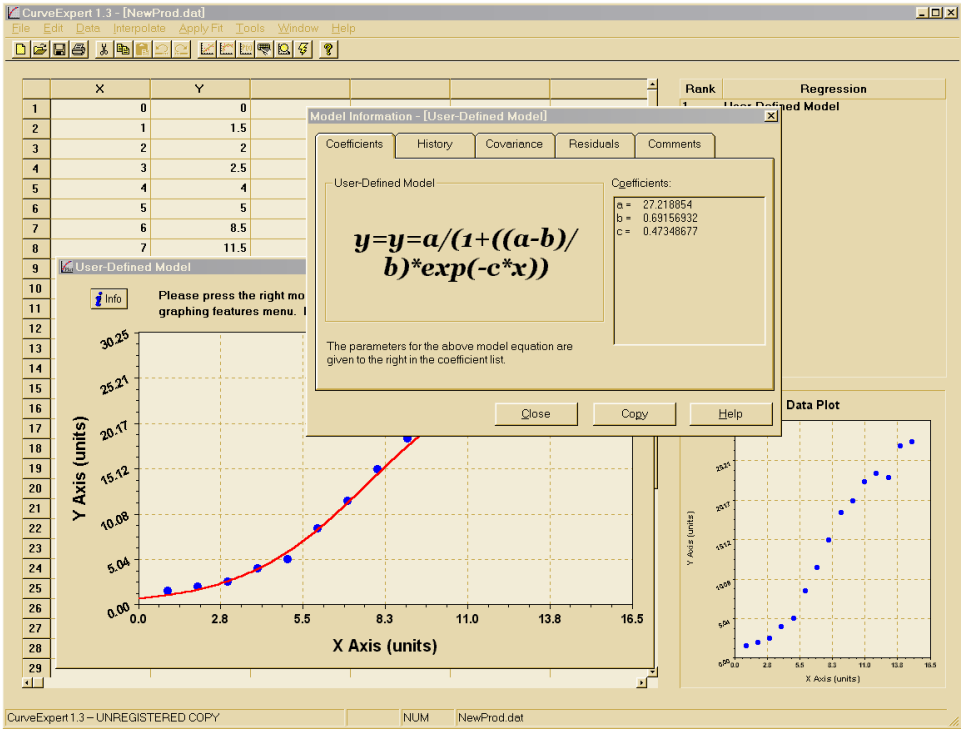

CurveExpert 1.3 - [UNTITLED.DAT*]
File Edit Data Interpolate Apply Fit Tools Window Help
X Y
1 0 0
2 1 1.5
3 2 2
4 3 2.5
5 4 4
6 5 5
7 6 8.5
8 7 11.5
9 8 15
10 9 18.5
11 10 20
12 11 22.5
13 12 23.5
14 13 23
15 14 27
16 15 27.5
17
18
19
20
21
Rank Regression
Data Plot
Y Axis (units)
X Axis (units)
CurveExpert 1.3 – UNREGISTERED COPY
NUM
UNTITLED.DAT


CurveExpert 1.3 - [NewProd.dat]
File Edit Data Interpolate Apply Fit Tools Window Help
X Y
1 0 0
2 1 1.5
3 2 2
4 3 2.5
5 4 4
6 5 5
7 6 8.5
8 7 11.5
9 8 15
10 9 18.5
11 10 20
12 11 22.5
13 12 23.5
14 13 23
15 14 27
16 15 27.5
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
Rank Regression
1 User-Defined Model
Set Initial Guesses
CurveExpert provides initial guesses for you if Auto-Guess is enabled; however, you may want to set these yourself in the case of a diverged curve fit. You must set initial guesses manually for user-defined models.
User-Defined Model
y=y=a/(1+((a-b)/b)*exp(-c*x))
Parameter Guesses
a 1
b 1
c 1
1
Show Plot >>
OK
Cancel
Help
Data Plot
Y Axis (units)
X Axis (units)
CurveExpert 1.3 – UNREGISTERED COPY
CALC
0
X2 = 0.00000000


Set Initial Guesses
CurveExpert provides initial guesses for you if Auto- Guess is enabled; however, you may want to set these yourself in the case of a diverged curve fit. You must set initial guesses manually for user-defined models.
User-Defined Model
y=y=a/(1+((a-b)/b)*exp(-c*x))
Parameter Guesses
a
b
c
1
1
1
1
Hide Plot <<
OK
Cancel
Help
Rank
Regression
1
User-Defined Model
Initial Guess Test
Info
Please press the right mouse button for the graphing features menu. Press F1 for help.
Y Axis (units)
X Axis (units)
0.00
5.04
10.08
15.12
20.17
25.21
30.25
0.0
2.8
5.5
8.3
11.0
13.8
16.5
16
15
27.5
CurveExpert 1.3 – UNREGISTERED COPY
NUM
NewProd.dat


Set Initial Guesses
CurveExpert provides initial guesses for you if Auto- Guess is enabled; however, you may want to set these yourself in the case of a diverged curve fit. You must set initial guesses manually for user-defined models.
User-Defined Model
y=y=a/(1+((a-b)/b)*exp(-c*x))
Parameter Guesses
a
b
c
30
1
0.5
0.5
Hide Plot <<
OK
Cancel
Help
Rank
Regression
1
User-Defined Model
Initial Guess Test
Info
Please press the right mouse button for the graphing features menu. Press F1 for help.
Y Axis (units)
X Axis (units)
0.00
5.04
10.08
15.12
20.17
25.21
30.25
0.0
2.8
5.5
8.3
11.0
13.8
16.5
16
15
27.5
CurveExpert 1.3 – UNREGISTERED COPY
NUM
NewProd.dat





ونجد القيم القدرة هي

User-Defined Model: y=a/(1+((a-b)/b)*exp(-c*x))

Coefficient Data:

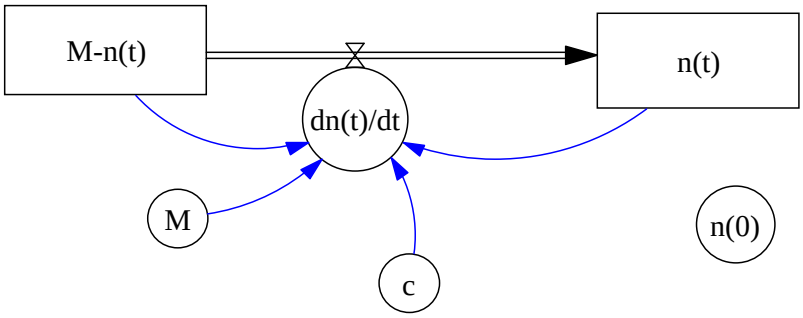
a = 27.218854

b = 0.69156932

c = 0.47348677

أي $M = 27.218854, \quad n_0 = 0.69156932, \quad c = 0.47348677$

(ج)



(01) c = 0.47

(02) dn(t)/dt = c*(M-n(t)/M)*n(t)

(03) FINAL TIME = 15

(04) INITIAL TIME = 0

(05) M = 27.22

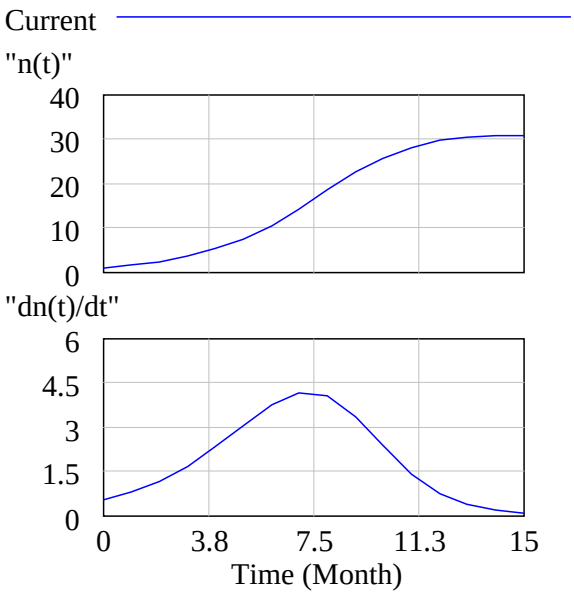
(06) M-n(t) = INTEG (-dn(t)/dt, 30)

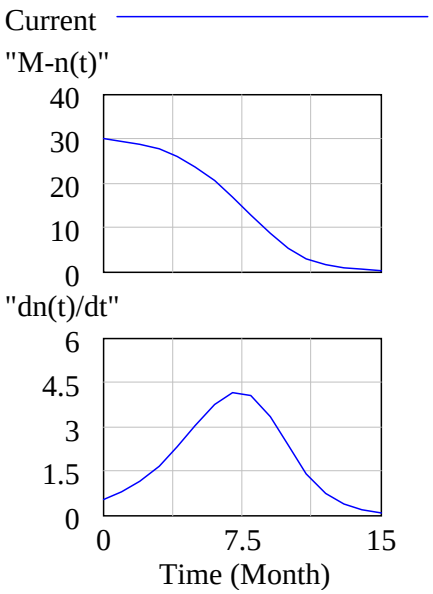
(07) n(0) = 0.69

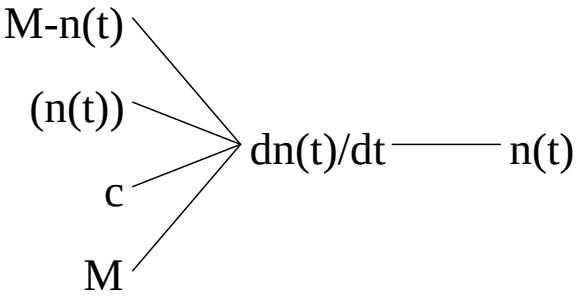
(08) n(t) = INTEG (dn(t)/dt, 1)

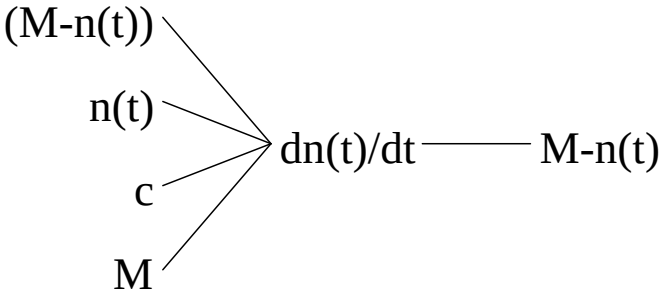
(09) SAVEPER = TIME STEP

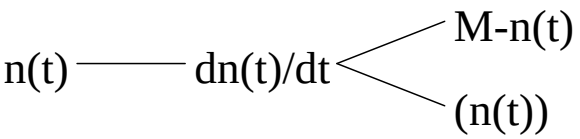
(10) TIME STEP = 1

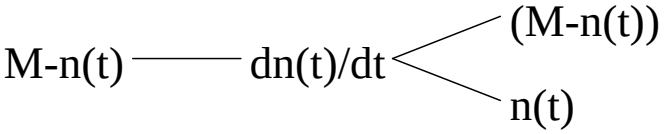












مناقشة النتائج:

نلاحظ من الرسومات البيانية الناتجة التصرف اللوجستي الموصوف في السؤال حيث أن المتاع Stock $n(t)$ ينمو ببطء ثم يتحول نموه إلى نمو اسي ثم يتوقف. الإنسياب Flow $dn(t)/dt$ يتغير من الزيادة البطيئة الى زيادة سريعة ثم توقف في الزيادة وتناقص سريع ويتباطأ التناقص ويستمر في التباطء حتى يتوقف.

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : بناء النماذج 203 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الثاني 1423/1422 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

أ) عرف التالي:

النظام System ، الكائن Entity ، الصفة Attribute ، النشاط Activity ، حالة النظام System State

ب) أذكر أنواع الأنظمة.

ج) كيف يمثل النظام في التفكير النظامي.

السؤال الثاني:

بإستخدام Excel حل المعادلات الفروقية التالية وارسم مسار الحل للقيم المعطاة:

1) $x_n = 0.3x_{n-1} + 10,\ x_0 = 0,\ n = 1,...,50$

2) $x_n = x_{n-1} / (1 + x_{n-1}),\ x_0 = 10,\ n = 1,...,50$

3) $x_n = x_{n-1}^2 + 0.7x_{n-1} + 0.2,\ x_0 = 1,\ n = 1,...,10$

السؤال الثالث:

طبق النموذج $y = a + bx^c$ على البيانات التالية مستخدما Excel Solver

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	32	47	65	92	132	190	275	312	509	690

ارسم القيم المعطاة والقيم المطبقة.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

مادة 203 بحث (بناء النماذج)

الإختبار النهائي للفصل الثاني 1423/1422 هـ

الزمن 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

عرف وبإختصار : (1) موس اوكهام Occam's Razor (2) مبدأ او قاعدة الشح Parsimony Principle

(3) حالة النظام System State (4) الأنشطة الداخلية Endogenous Activities (5) الأنشطة الخارجية Exogenous Activities (6) الأنشطة العشوائية Stochastic Activities (7) الأنظمة المنفصلة Discrete Systems (8) نمذجة النظام System Modeling (9) المتاع Stock (10) الأنسياب Flow

(11) المحولات Converters أو المتغيرات المساعدة Auxiliary Variables (12) الموصلات Connectors أو روابط المعلومات Information Link

السؤال الثاني:

هناك الكثير من الظواهر الطبيعية مثل الظواهر الحيوية والبيلوجية والإجتماعية والإقتصادية الخ تكون فيها كمية متغير في نظام ديناميكي عند الزمن t تساوي مجموع كميات المتغير عند الأزمنة $t-1$ و $t-2$. فإذا كانت $x_t, t \in T$ تمثل كمية المتغير عند الزمن t حيث T تمثل فترة زمنية معينة.

1) إشتق المعادلة الفروقية من الدرجة الثانية والتي تصف ديناميكية النظام عند أي لحظة زمنية $t \in T$.

علي الشكل 2State Space Form) ضع العلاقة السابقة في شكل فضاء حالة

$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1}, t = 0,1,...,T$

حيث

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) أوجد الجذور المميزة Eigenvalues للمصفوفة **A** .

4) بأخذ قيم أولية $x_1 = 1, x_2 = 1$ وبإستخدام EXCEL حل المعادلة الفروقية التي حصلت عليها في (1) لقيم $t = 1,2,...,30$. (ضع الحل في الخلايا $A1, A2,..., A30$).

5) بوضع $B1 = A1/A2,..., B29 = A29/A30$ و $C1 = A2/A1,..., C29 = A30/A29$ قارن القيم الناتجة مع الجذور المميزة للمصفوفة **A** .

<u>السؤال الثالث:</u>

(أ) يقول أحد خبراء الإقتصاد أن ظاهرة إقتصادية معينة لها الخاصية المركوفية Markovian Property من الدرجة الثانية فماذا يعني؟

(ب) سعر الإقفال اليومي لسهم شركة ما يتبع الخاصية المركوفية من الدرجة الثانية حسب المعادلة الفروقية

$x_t - ax_{t-1} - bx_{t-2} = \varepsilon_t, \forall t \in T, \quad \varepsilon_t \sim N(0,4)$

حول هذه المعادلة من درجة ثانية بمتغير حالة واحد (Second Order one State Variable) إلى درجة أولى بمتغيرى حالة (First Order two State Variables) وذلك بوضع $y_{t-1} = x_{t-2}$.

(ج) بإستخدام Vensim كون نموذج لهذا النظام وأختبر إستقراره (Steady State) لقيم $x_0 = 1$ و $y_0 = 1$ و

1) $a = 1.2, \quad b = -0.7$
2) $a = -1.2, \quad b = -0.7$

ملاحظة: إستخدم القيم التالية

RANDOM NORMAL(-3.99,3.99 , 0 ,2 ,seed=19)

INITIAL TIME = 0 FINAL TIME = 2

SAVEPER = TIME STEP TIME STEP = 0.01

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات محتملة للإختبار النهائى للفصل الثانى 1423/1422 هـ

مادة 203 بحث (بناء النماذج)

إجابة للسؤال الأول:

(1) موس اوكهام Occam's Razor وهو مبدأ فلسفي علمي يقول: لتبسيط الأشياء (المشاكل) إستبعد كل التفاصيل غير الضرورية أو على الأقل إبدأ بأهم التفاصيل التي تحدد هذا الشيئ (المشكلة)

(2) مبدأ او قاعدة الشح Parsimony Principle في البحث العلمي والذي يقول : إذا كان هناك أكثر من نموذج واحد يعطي نفس النتائج بالتمام فالنموذج الذي يحوي اقل عدد من المتغيرات والمعالم هو النموذج الأفضل.

(3) حالة النظام System State وهي متغيرات تصف كل الكائنات وصفاتها والأنشطة في النظام عند لحظة معينة. ويدرس تطور النظام بتتبع التغيرات في حالته.

(4) الأنشطة الداخلية Endogenous Activities وتصف الأنشطة داخل النظام.

(5) الأنشطة الخارجية Exogenous Activities وتصف الأنشطة في بيئة النظام والتي تؤثر علي هذا النظام. النظام الذي لايتأثر بأنشطة خارجية يسمي نظام مغلق بعكس النظام الذي يتأثر بالأنشطة الخارجية والذي يوصف بأنه نظام مفتوح.

(6) الأنشطة العشوائية Stochastic Activities وهي التي يتغير تأثيرها بشكل عشوائي وتكون لنتائجها إمكانيات متعددة توصف بتوزيع إحتمالي فمثلا الوقت الذي تستغرقه آلة للتجميع يوصف بتوزيع إحتمالي كما ان الزمن بين إعطال آلة يتغير بشكل عشوائي.

(7) الأنظمة المنفصلة Discrete Systems والتي تتغير فيها حالة النظام بشكل متقطع مع الزمن فمثلا إكمال بضاعة في الصنع يحدث بشكل متقطع، وصول طلب علي البضائع يحدث بشكل متقطع الخ.

(8) نمذجة النظام System Modeling لدراسة نظام ما يجب ان نكون او نبني نموذج Model لوصف هذا النظام لغرض إجراء التجارب للإجابة علي أسئلة وإفتراضات لايمكن إجرائها علي النظام مباشرة وذلك حتي لايضطرب النظام الأصلي ويحدث إرتباك في عمله يؤدي الي تغيير النظام وفقدانه لخواصه الأصلية كما ان دراسة النموذج بدلا من النظام تمكن من تجريب عدة حوارات حول النظام وذلك بإعادة النموذج الي الحالة الأصلية عند إجراء كل حوار بعكس النظام الأصلي الذي إذا تغير لايمكن إعادتة مرة اخرى لحالتة الأصلية فمثلا لدراسة نظام إقتصادي بتغيير سياسات العرض والطلب قد يؤدي الي نتائج لايمكن عكسها. كما أن النموذج يمكن ان يدرس في أزمنة إفتراضية فمثلا يمكن إجراء محاكاة للنظام بإستخدام النموذج ومعرفة بعض تصرفات النظام لفترات عدة اشهر او سنين في دقائق قليلة. وكذلك يمكن عن طريق النموذج دراسة النظام قبل إنشائه ووجوده اصلا فمثلا نريد بناء مصنع ولدينا عدة خيارات للبناء فلتحديد اي خيار افضل نكون نموذج لكل خيار ونحاكي تصرف المصنع تحت هذه الخيارات.

(9) المتاع Stock أي شيئ يتغير مع الزمن (ديناميكي، متحرك) يزداد وينقص ويسمى ايضا مستوى Level او متغير حالة State Variable ، المتاع يستوعب الأشياء لفترة زمنية وهذه الأشياء المستوعبة لاتظهر أو تختفي لحظيا إذ انها تضاف أو تسحب (تقل) خلال فترة زمنية.

(10) الإنسياب Flow هو معدل Rate يغير من حالة المتاع، فهو يُزيد أو يُنقِص من المتاع. الإنسياب الذي

يزيد المتاع يسمى ألإنسياب الداخل أو المصدر Source، والذي ينقص المتاع يسمى ألإنسياب الخارج

أو الغور Sink .

(11) المحولات Converters أو المتغيرات المساعدة Auxiliary Variables تحوى أرقام، تقوم بعمليات

حسابية أوجبرية أو منطقية وتعتبر المتحكمة Controllers في النموذج.

(12) الموصلات Connectors أو روابط المعلومات Information Link وهي التي تحمل أو تربط

المعلومات من جزء إلى آخر في النموذج، من المهم أن نلاحظ ان الموصلات لاتنقل كميات مادية (مثل

المياه او الطاقة او النقود) بل هي تنقل معلومات فقط فقيمة جزء من النموذج تنتقل لجزء آخر.

<u>إجابة للسؤال الثاني:</u>

1) من معطيات السؤال كمية المتغير عند الزمن t هي x_t وعند الزمن $t-1$ هي x_{t-1} وعند الزمن $t-2$ هي x_{t-2} إذا

$$x_t = x_{t-1} + x_{t-2},\ t \in T$$

أو على شكل معادلة فروقية:

$$x_t - x_{t-1} - x_{t-2} = 0, t \in T$$

2) نضع المعادلة الفروقية علي الشكل:

$$x_t = x_{t-1} + x_{t-2},\ t \in T$$

وبوضع $y_{t-1} = x_{t-2}$ نجد

$$x_t = x_{t-1} + y_{t-1}$$
$$y_t = x_{t-1}$$

وهي على الشكل

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$$

وهو الشكل المطلوب.

3) الجذور المميزة تستخرج من العلاقة

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$\lambda_1 = 1.618034$$
$$\lambda_2 = 0.618034$$

(4

1	1	1
1	0.5	2
2	0.666667	1.5
3	0.6	1.666667
5	0.625	1.6
8	0.615385	1.625
13	0.619048	1.615385
21	0.617647	1.619048
34	0.618182	1.617647
55	0.617978	1.618182
89	0.618056	1.617978
144	0.618026	1.618056
233	0.618037	1.618026
377	0.618033	1.618037
610	0.618034	1.618033
987	0.618034	1.618034
1597	0.618034	1.618034
2584	0.618034	1.618034
4181	0.618034	1.618034
6765	0.618034	1.618034
10946	0.618034	1.618034
17711	0.618034	1.618034
28657	0.618034	1.618034
46368	0.618034	1.618034
75025	0.618034	1.618034
121393	0.618034	1.618034
196418	0.618034	1.618034
317811	0.618034	1.618034
514229	0.618034	1.618034
832040		

نلاحظ أن القيمة في Bi تؤول إلى $\lambda_1 = 1.618034$ و القيمة في Ci تؤول إلى $\lambda_2 = 0.618034$

<u>إجابة للسؤال الثالث:</u>

(ا) : الخاصية الماركوفية من الدرجة k Markovian Property of order تقول على ان قيمة الظاهرة العشوائية عند الزمن t تعتمد على قيمها عند الأزمنة $t-1,t-2,...,t-k$ فقط. فمثلا إذا كانت $\{y_t, -\infty < t < \infty\}$ فإن

$$P\left(y_t < s \mid y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-k}, y_{t-(k+1)}, ...\right) = P\left(y_t < s \mid y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-k}\right)$$

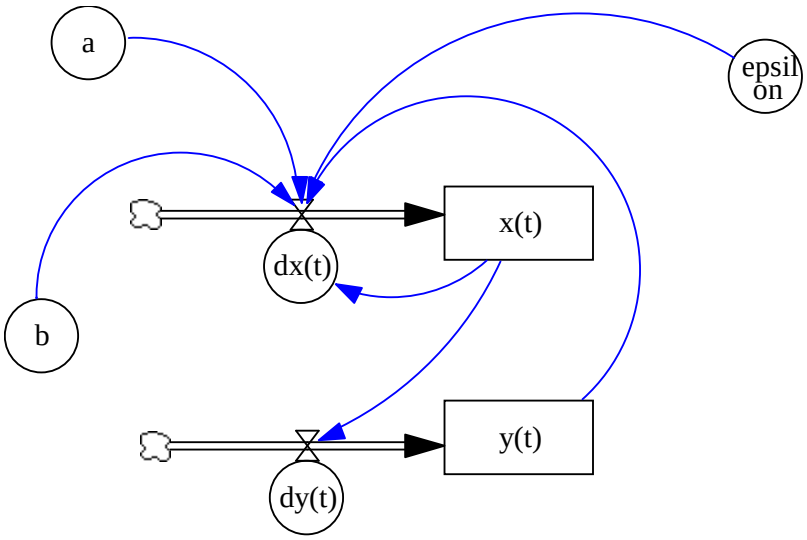
(ب) المعادلة الفروقية من الدرجة الثانية بمتغير حالة واحد (Second Order one State Variable)

$$x_t - ax_{t-1} - bx_{t-2} = \varepsilon_t, \forall t \in T, \quad \varepsilon_t \sim N(0,4)$$

توضع على شكل درجة أولى بمتغيرى حالة (First Order two State Variables)

$$x_t = ax_{t-1} + by_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,4)$$
$$y_t = x_{t-1}$$

(ج) النموذج للنظام بإستخدام Vensim



1- لقيم $a = 1.2, \quad b = -0.7$

(01) a= 1.2

Units: **undefined**

(02) b= -0.7

Units: **undefined**

(03) "dx(t)"= a*"x(t)"+b*"y(t)"+epsilon

Units: **undefined**

(04) "dy(t)"= "x(t)"

Units: **undefined**

(05) epsilon= RANDOM NORMAL(-3.99, 3.99 , 0 , 2 , 19)

Units: **undefined**

(06) FINAL TIME = 2 Units: Day

The final time for the simulation.

(07) INITIAL TIME = 0 Units: Day

The initial time for the simulation.

(08) SAVEPER = TIME STEP

Units: Day

The frequency with which output is stored.

(09) TIME STEP = 0.01 Units: Day

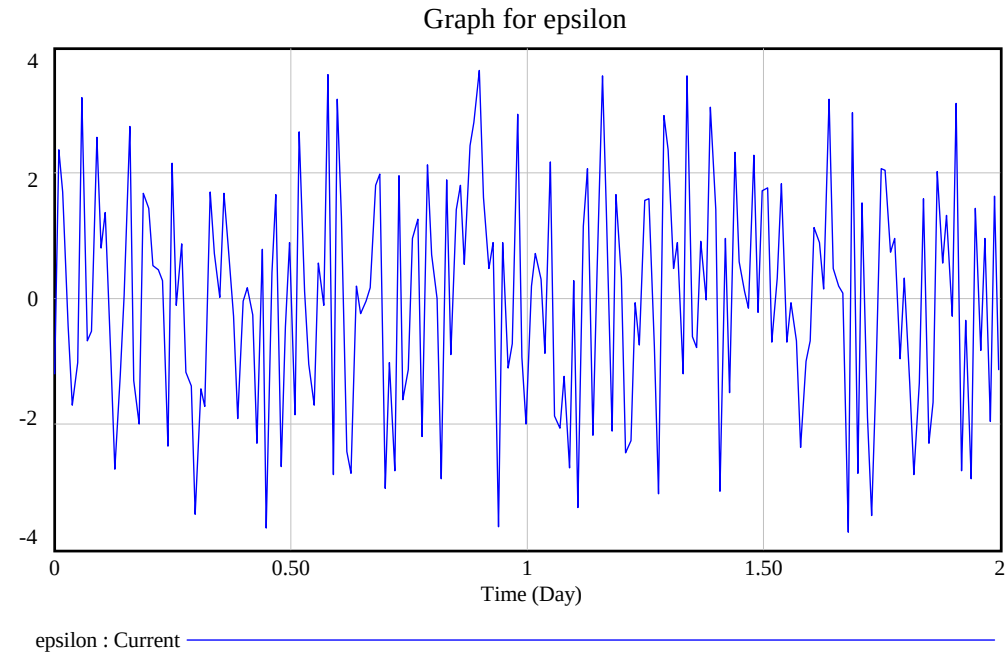
The time step for the simulation.

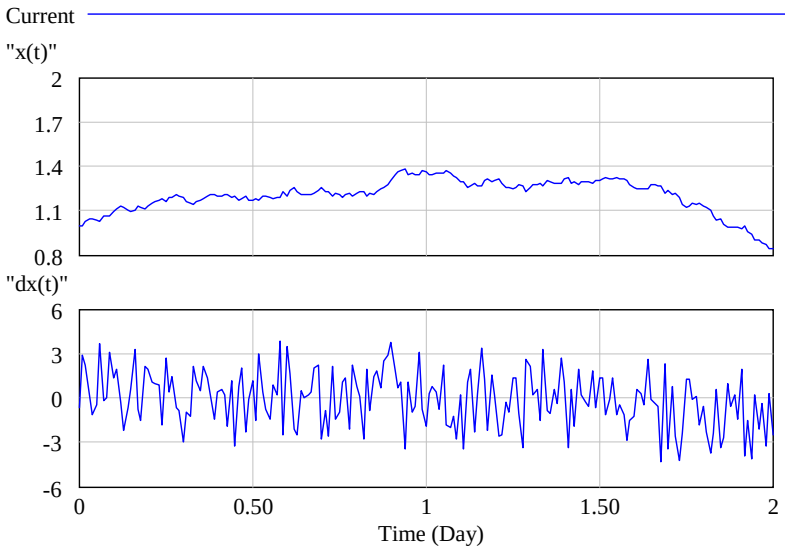
(10) "x(t)"= INTEG ("dx(t)", 1)

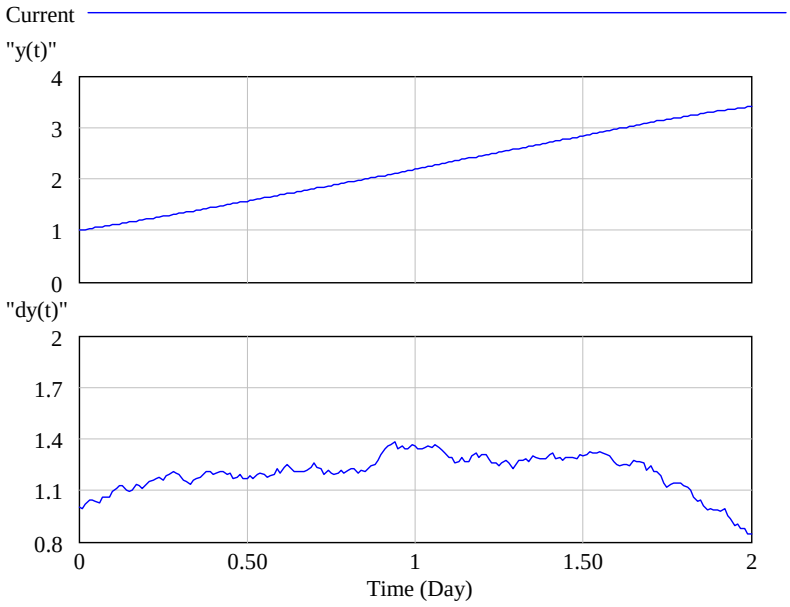
Units: **undefined**

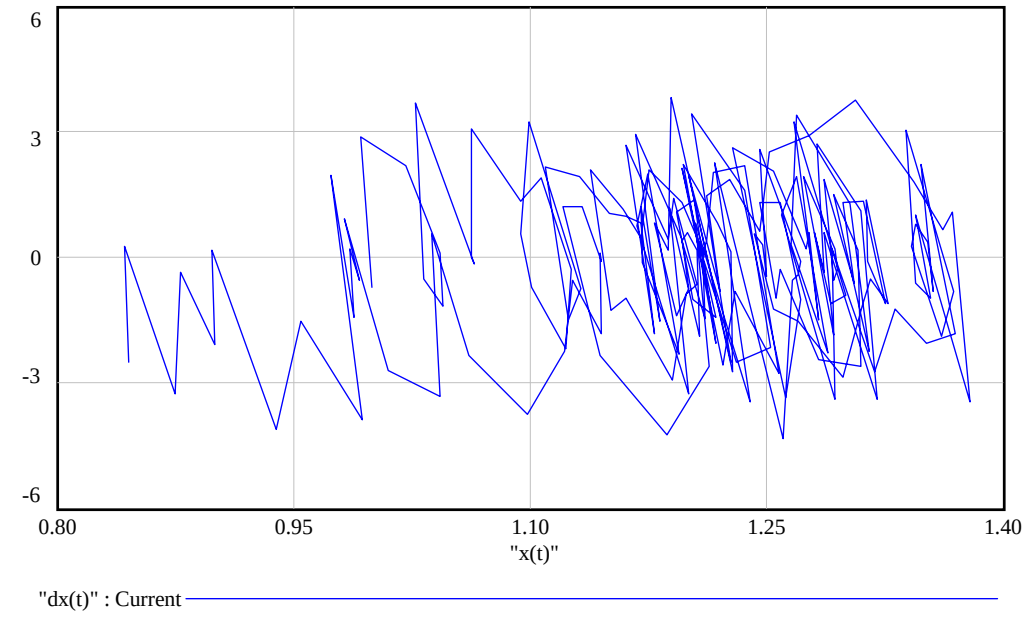
(11) "y(t)"= INTEG ("dy(t)", 1)

Units: **undefined**


Graph for epsilon
4
2
0
-2
-4
0
0.50
1
1.50
2
Time (Day)
epsilon : Current


Current
"x(t)"
2
1.7
1.4
1.1
0.8
"dx(t)"
6
3
0
-3
-6
0
0.50
1
1.50
2
Time (Day)





واضح من الشكل الأخير ان النموذج مستقر لقيم $a = 1.2, \quad b = -0.7$

2- لقيم $a = -1.2, \quad b = -0.7$

(01) a= -1.2

Units: **undefined**

(02) b= -0.7

Units: **undefined**

(03) "dx(t)"= a*"x(t)"+b*"y(t)"+epsilon

Units: **undefined**

(04) "dy(t)"= "x(t)"

Units: **undefined**

(05) epsilon= RANDOM NORMAL(-3.99, 3.99 , 0 , 2 , 19)

Units: **undefined**

(06) FINAL TIME = 2 Units: Day

The final time for the simulation.

(07) INITIAL TIME = 0 Units: Day

The initial time for the simulation.

(08) SAVEPER = TIME STEP Units: Day

The frequency with which output is stored.

(09) TIME STEP = 0.01 Units: Day

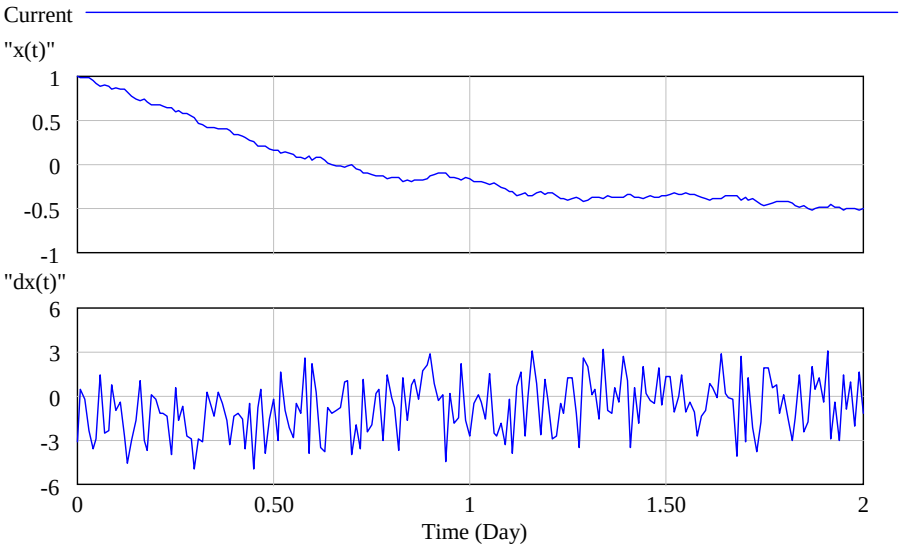
The time step for the simulation.

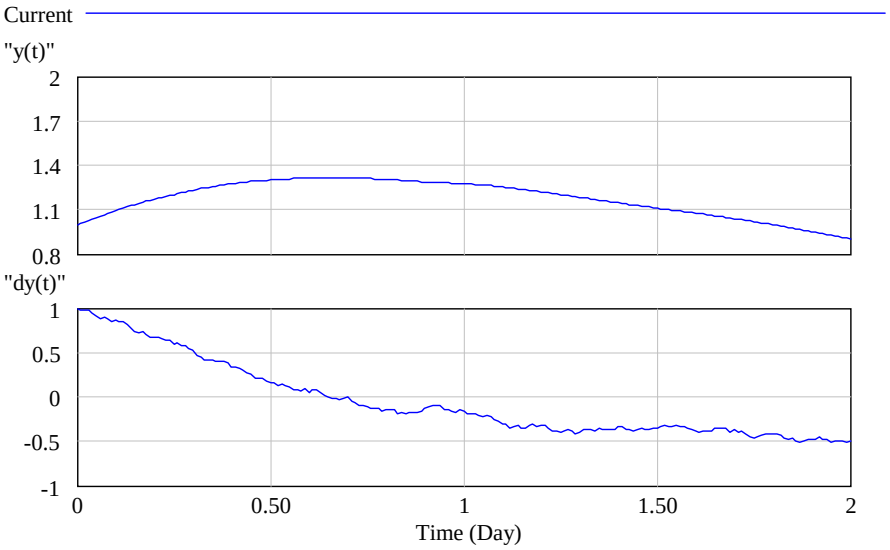
(10) "x(t)"= INTEG ("dx(t)", 1)

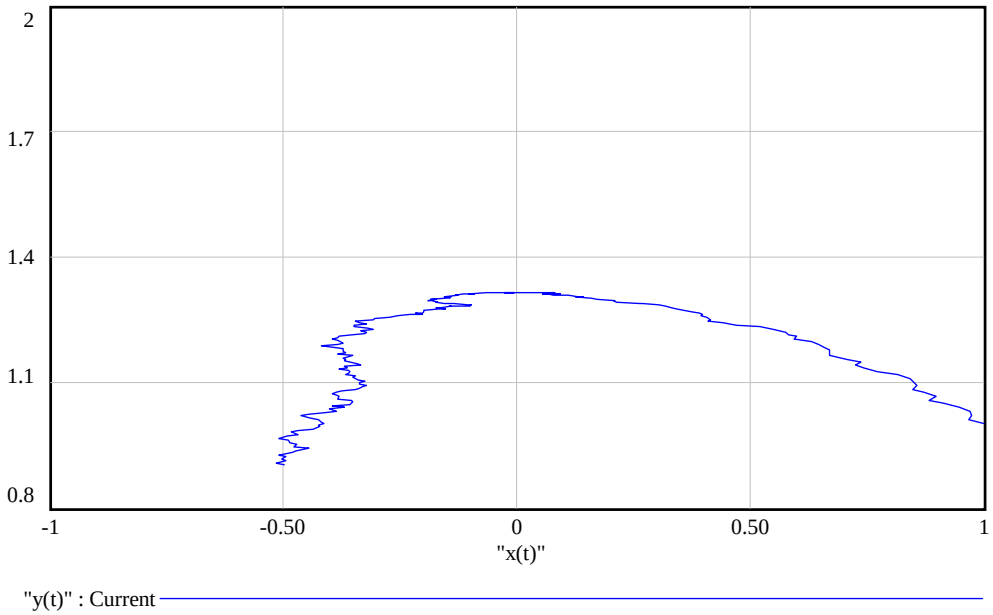
Units: **undefined**

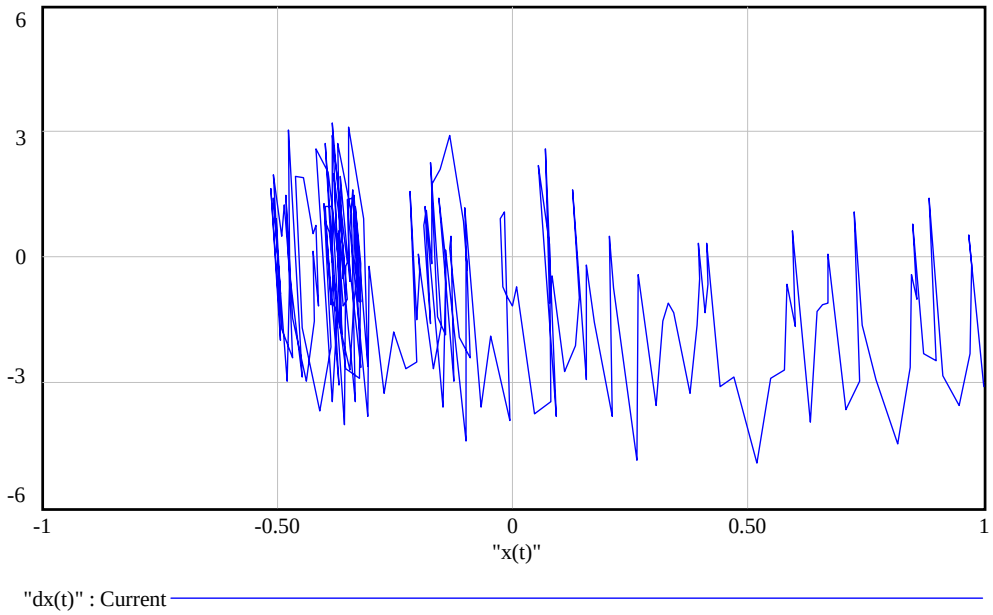
(11) "y(t)"= INTEG ("dy(t)", 1)

Units: **undefined**


Current
"x(t)"
1
0.5
0
-0.5
-1
"dx(t)"
6
3
0
-3
-6
0
0.50
1
1.50
2
Time (Day)


Current
"y(t)"
2
1.7
1.4
1.1
0.8
"dy(t)"
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.50
1
1.50
2
Time (Day)





واضح من الشكل الأخير ان النموذج غير مستقر لقيم $a=-1.2,\quad b=-0.7$

المراجع:

1) A Course in Mathematical Modeling
By: Douglas D. Mooney and Randall J. Swift
Published and Distributed by: The Mathematical Association of America.

2) Mathematics for Dynamic Modeling, 2nd ed.
By: Edwaed Beltrami
Published by: Academic Press

3) An Introduction to Mathematical Modeling
By: Edward A. Bender
Published by: Dover Publications, inc.

4) Mathematical Modelling Techniques
By: Rutherford Aris
Published by: Dover Publications, inc.

5) Introduction to Difference Equations
By: Samuel Goldberg
Published by: Dover Publications, inc.

6) Matrix Computations
By: Gene H. Golub & Charles F. Van Loan
Published by: North Oxford Academic

7) The State Space Equations and Their Time Domain Solution
Lecture Notes
By: Dr. J. R. White, UMass-Lowell